УДК 536.24:536.42

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛООБМЕНА ДЛЯ РАВНОВЕСНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ОБТЕКАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. Ш. ДОРФМАН

(*Киев*)

Приведено приближенное решение уравнения теплообмена для равновесных турбулентных пограничных слоев, для которых распределение скоростей и коэффициента турбулентной вязкости может быть описано функциями от двух параметров.

В работах [1–4] исследовались равновесные турбулентные пограничные слои, характеризующиеся постоянством безразмерного градиента давления

$$\beta = \frac{\delta^{*\circ}}{\tau_w^\circ}\left(\frac{dP^\circ}{dx^\circ}\right)$$

В [4] вычислены профили дефекта скорости для таких слоев во всем диапазоне значений $-0.5 \leqslant \beta \leqslant \infty$, а в [5] указан метод сопряжения профилей дефекта скорости с универсальными профилями закона стенки и предложена составная функция, определяющая коэффициент турбулентной вязкости.

В данной работе строятся решения уравнения теплообмена для равновесных слоев в предположении, что распределение скоростей в слое и коэффициента турбулентной вязкости описывается полученными в [4, 5] функциями безразмерной координаты $\eta = y/\Delta$, зависящими от двух параметров β и Re_*, а турбулентное число Прандтля Pr_t либо постоянно, либо также является известной функцией η и параметров β и Re_*.

Температура поверхности $T_w(x)$ считается произвольной функцией продольной координаты и решение строится в виде рядов по формпараметрам, содержащим производные от функции $T_w(x)$.

Эти формпараметры аналогичны использованным в работах [6–9] при построении точных решений уравнений ламинарного пограничного слоя.

Уравнение турбулентного теплового пограничного слоя и соответствующие граничные условия первого рода, записанные в безразмерных переменных, имеют вид

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_e^\circ}{\nu^\circ}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mathrm{Ec}\frac{\nu_e}{\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{1}$$

$$y = 0, \quad T = T_w(x), \quad y = \infty, \quad T = 1$$

где a_e° — коэффициент эффективной температуропроводности, определяемый как сумма коэффициентов молекулярной a° и турбулентной a_t° температуропроводностей.

Перейдем в этом уравнении к новым независимым переменным типа переменных Прандтля — Мизеса

$$\Phi = \int_0^x U\,dx, \qquad \varphi = \frac{\psi}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\Phi}} \tag{2}$$

где Re определено по скорости потока U_∞° вдали от тела и характерному размеру L°.

Используя формулы перехода к новым переменным, будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial x}=U\frac{\partial T}{\partial \Phi}-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\left(\varphi U+\frac{v}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\right),\qquad \frac{\partial T}{\partial y}=\frac{u}{\Phi\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

Подставляя эти выражения в (1) и вводя вместо T разность $t=T-1$, получаем

$$\Phi\frac{\partial t}{\partial \Phi}-\varphi\frac{\partial t}{\partial \varphi}-\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{u}{U}\varepsilon_a\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right)=Ecf\varepsilon\frac{u}{U}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{u}{U}\right)\right]^2 \tag{3}$$

$$\varphi=0,\quad t=t_w(\Phi);\qquad \varphi=\infty,\quad t=0 \tag{4}$$

Здесь введены обозначения

$$\varepsilon_a=\frac{a_e^\circ}{\nu^\circ\,\mathrm{Re}\,\Phi}=\frac{1}{\Phi\,\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}+\frac{e-1}{\mathrm{Pr}_t}\right),$$

$$\varepsilon=\frac{\nu_e^\circ}{\nu^\circ},\quad f=\frac{U^2}{\Phi\,\mathrm{Re}} \tag{5}$$

Решение уравнения (3) представим в виде суммы

$$t=t_1+\mathrm{Ec}\,t_2 \tag{6}$$

где t_1 — решение однородного уравнения при граничных условиях (4), а t_2 — учитывающее диссипацию решение неоднородного уравнения при нулевых граничных условиях:

$$t_2(0)=0,\qquad t_2(\infty)=0$$

Решения t_1 и t_2 будем искать в виде

$$t_1=\sum_{k=0}^{\infty}G_k(\varphi)\Phi^k t_w^{(k)},\qquad t_2=B(\varphi)f \tag{7}$$

где $t_w^{(k)}$ — k-я производная от t_w по Φ.

Дифференцируя первое из равенств (7) и умножая результат на Φ, после замены в одной из сумм индекса $k+1$ на k, будем иметь

$$\Phi\frac{\partial t_1}{\partial \Phi}=\sum_{k=1}^{\infty}(kG_k+G_{k-1})\Phi^k t_w^{(k)}$$

Подставляя теперь (7) в (3) и принимая во внимание это выражение, придем к следующим двум равенствам:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Phi^k t_w^{(k)}\left[kG_k+G_{k-1}-\varphi G_k'-\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{u}{U}\varepsilon_a G_k'\right)\right]-$$

$$-t_w\left[\varphi G_0'+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{u}{U}\varepsilon_a G_0'\right)\right]=0 \tag{8}$$

$$\frac{\Phi}{f}\frac{\partial f}{\partial \Phi}B-\varphi B'-\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{u}{U}\varepsilon_0 B'\right)-\varepsilon\frac{u}{U}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{u}{U}\right)\right]^2=0 \tag{9}$$

Для равновесных течений, когда распределение относительных скоростей u/U в слое может быть описано функцией одной переменной $\eta=y/\Delta$, зависящей от параметров β и Re_*, переменная φ тоже оказывается функцией только η, зависящей от тех же параметров.

Действительно, для равновесных течений имеем [4]

$$\frac{U}{\Delta}\frac{d\Delta}{dU}=\frac{1}{m}\qquad \beta=\frac{\delta^*}{\tau_w}\frac{dP}{dx}=-\frac{\Delta}{\sqrt{\mathrm{Re}}\,\gamma U}\frac{dU}{dx} \tag{10}$$

Тогда, пренебрегая, как обычно, слабой зависимостью m и γ от x, получаем

$$\Phi = \int_0^x U\,dx = \int_0^{(U\Delta)} = \frac{U}{\Delta(1+1/m)}\left(\frac{dU}{dx}\right)^{-1} d(U\Delta) = \frac{\mathrm{Re}_*}{\beta_1\gamma^2\,\mathrm{Re}} \qquad (11)$$

$$\beta_1 = -\beta\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

Используя этот результат и определение функции тока, приведем второе из равенств (2) к виду

$$\varphi = \beta_1\gamma \int_0^\eta \frac{u}{U}\,d\eta$$

Из этого равенства следует, что для равновесных течений ($\beta = \mathrm{const}$) при фиксированном значении числа Re_* переменная φ однозначно связана с переменной η и потому относительные скорость u/U и эффективная вязкость $\varepsilon = \nu_e^\circ/\nu^\circ$, зависящие в таких течениях только от переменной η, могут быть представлены как функции только переменной φ. При этом ε_a, определяемая первым из равенств (5), при заданном числе Pr также зависит только от φ, если турбулентное число Прандтля Pr_t считается постоянным или зависящим от η. Из (5), (10) и (11) следует, кроме того, что коэффициент при B в уравнении (9)

$$\frac{\Phi}{f}\frac{df}{d\Phi} = \frac{2\Phi}{U^2}\frac{dU}{dx} - 1 = \frac{m-1}{m+1}$$

для таких течений постоянен.

При таких условиях выражения в квадратных скобках уравнения (8) и левая часть уравнения (9) оказываются зависящими только от переменной φ и параметров β и Re_*. Поэтому, приравнивая указанные выражения в квадратных скобках нулю, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих коэффициенты $G_k(\varphi)$ ряда (7)

$$(\omega\varepsilon_a G_k')' + \varphi G_k' - kG_k = G_{k-1} \qquad (k = 0, 1, \ldots) \qquad (12)$$

где через $\omega(\varphi, \beta, \mathrm{Re}_*)$ обозначено отношение u/U в равновесных течениях.

Граничные условия для уравнений (12) следуют из условий (4)

$$\varphi = 0,\quad G_0 = 1,\quad G_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots);\quad \varphi = \infty,\quad G_k = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

Для коэффициента $B(\varphi)$ в решении для t_2 получаем уравнение из равенства (9)

$$(\omega\varepsilon_a B')' + \varphi B' - \frac{m-1}{m+1}B = \varepsilon\omega(\omega')^2 \qquad (13)$$

$$\varphi = 0,\quad B = 0;\qquad \varphi = \infty,\quad B = 0$$

Используя равенства (7), нетрудно определить тепловые потоки через поверхность обтекаемого тела. Введем, как обычно, число Стантона

$$\mathrm{St} = -\frac{1}{\mathrm{Pr}\sqrt{\mathrm{Re}}\,Ut_w}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\,\Phi U t_w}\left(-u\frac{\partial t}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0} \qquad (14)$$

Принимая во внимание, что

$$\tau_w = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{\Phi\sqrt{\mathrm{Re}}}\left(u\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0}$$

и интегрируя после умножения на $d\varphi$ обе части этого равенства, найдем, что вблизи стенки, если ограничиться первым членом разложения, скорость в слое может быть представлена в виде

$$u = (2\mathrm{Re}\,\varphi\Phi)^{1/2}\gamma U$$

После подстановки в (14) этого значения u и производной $\partial t / \partial\varphi$, найденной дифференцированием равенств (6) и (7), представим полученный результат в следующем виде:

$$\mathrm{St} = -\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}\sqrt{\Phi\,\mathrm{Re}}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(\sqrt{2\varphi}\,G_k')_{\varphi=0}\frac{\Phi^k t_w^{(k)}}{t_w} + \mathrm{Ec}(\sqrt{2\varphi}\,B')_{\varphi=0}\frac{U^2}{\Phi\,\mathrm{Re}}\right]$$

Заменяя теперь $\Phi\,\mathrm{Re}$ его значением согласно равенству (11) и вводя обозначения

$$g_k = -\sqrt{\frac{2\beta_1}{\mathrm{Re}_*}}(\varphi^{1/2}G_k')_{\varphi=0}, \qquad b = \left(\frac{2^{1/3}\beta_1}{\mathrm{Re}_*}\right)^{3/2}(\varphi^{1/2}B')_{\varphi=0}$$

получаем

$$\mathrm{St} = \frac{c_f}{2\,\mathrm{Pr}}\sum_{k=0}^{\infty} g_k\frac{\Phi^k t_w^{(k)}}{t_w} - b\,\frac{\mathrm{Ec}\,c_f^2 U^2}{4\,\mathrm{Pr}\,t_w} \tag{15}$$

Коэффициенты $G_k(\varphi)$, $B(\varphi)$, g_k и b при заданных Pr и Pr_t могут быть протабулированы для различных значений β и Re_* путем численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (12) и (13). При известных коэффициентах формула (15) позволяет весьма просто рассчитать тепловые потоки через поверхность, а формулы (7) в случае необходимости — распределение температуры в слое для равновесных пограничных слоев при любом заданном законе изменения температуры поверхности $t_w(x)$. Для этого достаточно вычислить с помощью (2) по известному распределению скоростей $U(x)$ вне слоя равновесных течений функцию $\Phi(x)$, а затем производные от заданной функции t_w по Φ.

Для пластины ($U = 1$), в частности, $\Phi = x$ и формула (15) при отсутствии диссипации принимает вид

$$\mathrm{St} = \frac{c_f}{2\,\mathrm{Pr}}\left(g_0 + g_1 x\frac{dt_w}{dx} + g_2 x^2\frac{d^2t_w}{dx^2} + \ldots\right)$$

Для изотермической пластины при $\mathrm{Pr} = 1$ имеем в соответствии с аналогией Рейнольдса (при $\mathrm{Pr} = 1$, $g_0 = 1$)

$$\mathrm{St} = {}^1/_2 c_f$$

Заметим, что уравнения (12) и (13), определяющие коэффициенты G_k, g_k, B и b, строго говоря, справедливы при постоянном вдоль течения числе Re_*. В действительности в равновесных течениях число Re_* изменяется. Учитывая, однако, что коэффициент теплоотдачи слабо зависит от числа Рейнольдса и что эта зависимость в равенстве (15) в основном уже учтена функцией $c_f(\mathrm{Re}_*)$, можно считать коэффициенты g_k и b слабыми функциями Re_*. Тогда, пренебрегая, как обычно при расчете равновесных течений, слабой зависимостью коэффициентов от продольной координаты, их можно вычислить, используя результаты интегрирования уравнений (12) и (13). При этом локальные значения Re_* определяются из равенства (11) по известным $\Phi\mathrm{Re}$.

Коэффициенты $G_k(\varphi)$ удобно разыскивать в виде сумм

$$G_k = \sum_{i=0}^{i=k}(-1)^{k+i}\frac{F_i}{(k-i)!} \tag{16}$$

позволяющих заменить неоднородные уравнения (12) однородными [10]

$$(\omega\varepsilon_a F_i')' + \varphi F_i' - iF_i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots) \tag{17}$$

$$\varphi = 0, \quad F_i = 1 / i!; \qquad \varphi = \infty, \quad F_i = 0$$

При $i \neq 0$ уравнение (17) имеет особую точку на стенке ($\varphi = 0$), свойственную уравнению пограничного слоя в форме Прандтля — Мизеса [11].

Особенность может быть устранена, если в уравнении (17) перейти к новой независимой переменной $\xi = \varphi^{1/2}$. Выполнив преобразования, получим

$$(\omega\varepsilon_u F_i')'\xi + (2\xi^4 - \omega\varepsilon_u)F_i' - 4i\xi^3 F_i = 0 \tag{18}$$

$$\xi = 0, \quad F_i = 1/i!; \quad \xi = \infty, \quad F_i = 0 \tag{19}$$

где штрих означает дифференцирование по переменной ξ.

Анализ показывает, что краевая задача (18), (19) для каждой функции F_i может быть сведена к задаче Коши для двух функций w_i и h_i со следующими граничными условиями в точке $\xi = 0$:

$$w_i(0) = 1, \quad w_i'(0) = 0, \quad h_i(0) = 0, \quad h_i'(0) = 1 \tag{20}$$

При этом функции F_i, определяющие коэффициенты G_k ряда (7), выражаются через функции w_i и h_i, а коэффициенты g_k ряда (15) — через значения этих функций при $\xi \to \infty$.

$$F_i = \frac{1}{i!}\left[w_i - \frac{w_i(\infty)}{h_i(\infty)}h_i\right]$$

$$g_k = \left(\frac{2\beta_1}{\mathrm{Re}_*}\right)^{1/2} \sum_{i=0}^{i=k} \frac{(-1)^{k+i} w_i(\infty)}{(k-i)!\,i!\,h_i(\infty)} \tag{21}$$

Выполнив численное интегрирование уравнения (18) при граничных условиях (20) и найдя в результате $w_i(\infty)$ и $h_i(\infty)$, можно из (16) и (21) вычислить коэффициенты G_k и g_k и составить таблицы.

Расчеты были выполнены для $\mathrm{Pr} = \mathrm{Pr}_t = 1$ и $\mathrm{Re}_* = 10^5$ ($\mathrm{Re}_x \sim 10^8$). Приводим значения коэффициентов g_k

$$g_0 = 1, \qquad g_1 = 0.131, \qquad g_2 = -0.0332, \qquad g_3 = 0.00738, \qquad g_4 = -0.00137$$

Как и в случае ламинарного пограничного слоя [12, 13], коэффициенты быстро убывают, так что при расчетах обычно можно ограничиться первыми несколькими членами ряда.

Равенства (15) позволяют исследовать влияние неизотермичности обтекаемой поверхности на ее теплоотдачу. В частности, так как $g_1 > 0$, то из (15) следует, что при отрицательных градиентах температурного напора ($t_w^\circ = T_w^\circ - T_\infty^\circ$) коэффициент теплоотдачи меньше, чем для изотермической поверхности, а при положительных градиентах — больше. Такой характер влияния градиента температурного напора получен и в экспериментах [14]. Заметим, что он аналогичен характеру влияния градиента скорости внешнего течения на коэффициент трения.

Из (15) следует также, что при достаточно больших отрицательных градиентах температурного напора возможно обращение теплового потока в некоторой точке поверхности в нуль и даже изменение знака его. Возможность такого явления для ламинарного пограничного слоя была показана в [15] и объясняется (подобно тому, как явление отрыва объясняется деформацией профилей скорости) деформацией профилей температуры в пограничном слое.

Равенства (15) позволяют, кроме того, изучить влияние старших производных от $t_w(x)$ на величину коэффициентов теплоотдачи. Они могут быть использованы также для решения сопряженных задач о теплообмене между двумя жидкостями, разделенными стенкой [13], при турбулентном и смешанном (с одной стороны, ламинарном, с другой — турбулентном) течении жидкостей.

Коэффициенты g_k могут быть использованы и для решения задачи о теплообмене при граничных условиях второго рода, когда задано не распределение температуры обтекаемой поверхности, а распределение удельных тепловых потоков $q_w(x)$. В этом случае из равенства (15) может быть найдено соответствующее распределение температуры обтекаемой поверхности.

Заменяя в (15) St его выражением через $q_w = -(\partial t / \partial y)_{y=0}$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k \Phi^k t_w^{(k)} = \frac{2q_w}{c_f U \sqrt{\mathrm{Re}}} + b\,\mathrm{Ec}\,\frac{c_f}{2} U^2 \tag{22}$$

Правая часть этого равенства при заданном $q_w(x)$ является известной функцией x, а следовательно, и Φ. Поэтому равенство (22), содержащее производные от t_w по Φ, может рассматриваться как обыкновенное дифференциальное уравнение для искомого распределения температуры поверхности t_w.

Решение неоднородного уравнения (22) можно представить как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Легко видеть, что решением однородного уравнения, т. е. уравнения (22) без правой части, удовлетворяющим условиям рассматриваемой задачи будет $t_w = 0$. В самом деле, равенство нулю правой части в (22) означает, что рассматривается случай обтекания теплоизолированной поверхности ($q_w = 0$) и тепло, выделяющееся вследствие трения, во внимание не принимается ($\mathrm{Ec} = 0$). Очевидно, что в этом случае температура поверхности тела будет равна температуре жидкости и потому $t_w = T_w - 1 = 0$.

Частное решение неоднородного уравнения (22) может быть представлено рядом

$$t_w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi^n \sigma^{(n)} \tag{23}$$

$$\sigma(\Phi) = \frac{2q_w}{c_f U \sqrt{\mathrm{Re}}} + b\,\mathrm{Ec}\,\frac{c_f}{2} U^2 \tag{24}$$

$\sigma^{(n)}$ — n-я производная от σ по Φ.

Коэффициенты c_n определяются после подстановки ряда (23) в уравнение (22). Дифференцируя (23) и умножая результат на Φ, получаем

$$\Phi t_w' = \sum_{n=0}^{\infty} [n c_n \Phi^n \sigma^{(n)} + c_n \Phi^{n+1} \sigma^{(n+1)}] = \sum_{n=0}^{\infty} (n c_n + c_{n+1}) \Phi^n \sigma^{(n)}$$

Аналогично найдем

$$\Phi^2 t_w'' = \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) c_n + 2(n-1) c_{n-1} + c_{n-2}] \Phi^n \sigma^{(n)}$$

$\Phi^3 t_w'''$ и т. д. Подставляя полученные результаты в (22) и собирая члены, содержащие одинаковые выражения $\Phi^n \sigma^{(n)}$, получаем соотношения, из которых последовательно определяются коэффициенты c_n:

$$c_0 = 1,\ g_0 c_n + g_1 (n c_n + c_{n-1}) + g_2 [n(n-1) c_n + 2(n-1) c_{n-1} + \\ + c_{n-2}] + g_3 [n(n-1)(n-2) c_n + 3(n-1)(n-2) c_{n-1} + \\ + 3(n-2) c_{n-2} + c_{n-3}] + \ldots = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Коэффициенты c_n могут быть протабулированы так же, как и коэффициенты g_k.

Для случая, когда тепловой поток через обтекаемую поверхность равен нулю (задача о термометре [11]), первый член в (24) исчезает. В этом случае, если пренебречь слабой зависимостью b и c_f от продольной координаты, равенство (23) принимает вид

$$t_w = b\,\mathrm{Ec}\frac{c_f}{2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi^n (U^2)^{(n)}$$

Сравнивая это равенство с выражением для равновесной температуры обтекаемой поверхности

$$t_w = {}^1/_2 r\,\mathrm{Ec}$$

получаем соотношение, определяющее коэффициент восстановления в равновесных турбулентных течениях

$$r = b\frac{c_f}{2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi^n (U^2)^{(n)}$$

Поступило 31 VIII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Клаузер Ф. Турбулентный пограничный слой. В кн.: «Проблемы механики», вып. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
2. Таусенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
3. Ротта И. К. Турбулентный пограничный слой. Л., «Судостроение», 1967.
4. Меллор Д. Л., Джибсон Д. М. Равновесные турбулентные пограничные слои. Механика. Сб. перев. иностр. статей, 1967, № 2.
5. Меллор Д. Л. Влияние градиентов давления на турбулентное течение вблизи гладкой стенки. Механика, 1967, № 2 (102).
6. Шкадов В. Я. Об интегрировании уравнений пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4.
7. Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
8. Бубнов В. А., Гришмановская К. И. О точных решениях задач неизотермического пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 230, Л., «Машиностроение», 1964.
9. Ока С. Расчет температурного ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости на плоской пластине с заданной переменной температурой поверхности. В кн. «Тепло- и массоперенос», т. 9, Минск, «Наука и техника», 1968.
10. Дорфман А. Ш. Приближенный метод интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя. Прикл. механ., 1966, т. 2, вып. 6.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
12. Дорфман А. Ш. Применение преобразования Прандтля — Мизеса к расчету поля скоростей и температур в потоках жидкостей и газа. В кн. «Тепло- и массоперенос», т. 1, М., «Энергия», 1968.
13. Дорфман А. Ш. Теплообмен между двумя жидкостями при двустороннем обтекании пластины. Теплофизика высоких температур, 1970, № 3.
14. Леонтьев А. И., Мухин В. А., Миронов Б. П., Ивакин В. П. Влияние граничных условий на развитие теплового турбулентного пограничного слоя. В кн. «Тепло- и массоперенос», т. 1, М., «Энергия», 1968.
15. Chapman D. R., Rubesin M. W. Temperature and velocity profiles in the compressible, laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature. J. Aeronaut. Sci., 1949, vol. 16, No. 9. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. иностр. статей, 1950, № 4.)