

УДК 533.6.011

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА МЕТОДОМ ПРЯМЫХ

И. БИЙБОСУНОВ, А. РЫСКУЛОВ

(Фрунзе)

В статье методом прямых решено уравнение Чаплыгина. Это решение описывает обтекание профиля потоком газов с большой дозвуковой скоростью с местной сверхзвуковой зоной, ограниченной искривленным скачком уплотнения.

В работе [1] Ф. И. Франкль сформулировал краевые задачи в плоскости годографа, которые приводят к обтеканиям профилей с местными сверхзвуковыми областями, оканчивающимися искривленными скачками уплотнения. В частности, требуется найти решения уравнения Чаплыгина

$$\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + b(\eta) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \quad \left( b(\eta) = \frac{d \ln B(\eta)}{d \eta} \right) \quad (1)$$

при следующих краевых условиях (фиг. 1):

$$\psi = 0 \text{ на } BCEFK \quad (2)$$

$$\psi(\theta, 0) = f(\theta) \text{ на звуковой линии } GK \quad (3)$$

(где  $f(\theta)$  — заданная функция) при  $\eta = \eta_p$  и  $\theta = 0$  решение должно иметь особенность вида

$$\psi = \rho^{-1/2} \sin^{1/2} t + o(\rho^{1/2}), \quad \rho = (\theta^2 + 4/9(\eta^{3/2} - \eta_p^{3/2})^2)^{1/2} \quad (4)$$

$$t = \arcsin \theta / \rho$$

на дуге  $BAH$

$$(W_2 - W_1)^2 (W_2 W_1 - a_*^2) = 2W_1 W_2 \sin^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \times \\ \times \left( W_1^2 + W_2^2 + 2a_*^2 - \frac{4\kappa}{\kappa + 1} W_1 W_2 \cos^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \quad (5)$$

в соответствующих одна другой точках скачка уплотнения должно выполняться равенство

$$\psi(\theta_1, \eta_1) = \psi(\theta_2, \eta_2) \quad (6)$$

вдоль искривленного скачка уплотнения, т. е. вдоль кривых  $AB$  и  $AH$  имеет место следующее соотношение:

$$\frac{d\varphi_1}{d\psi_1} = \frac{d\varphi_2}{d\psi_2} = \left( \frac{\rho_0}{\rho_1 W_1} + \frac{\rho_0}{\rho_2 W_2} \right) \frac{W_1 W_2}{W_2 - W_1} \operatorname{tg} \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \quad (7)$$

В этих формулах в окрестности значения  $\eta = 0$  разлагаются в ряд

$$b(\eta) = b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + b_3 \eta^3 + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \eta^m \quad (8)$$

$$b_0 = -\frac{2\kappa + 5}{5(\kappa + 1)^{1/3}}, \quad b_1 = \frac{46\kappa^2 + 105\kappa + 125}{175(\kappa + 1)^{2/3}}$$

$$b_2 = -\frac{422\kappa^3 + 915\kappa^2 + 500\kappa + 375}{2625(\kappa + 1)}$$

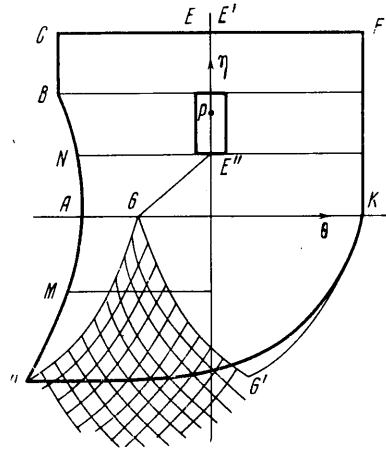
$$b_3 = \frac{287998\kappa^4 + 605605\kappa^3 + 155125\kappa^2 - 394625\kappa - 174373}{3031875(\kappa + 1)^{1/3}}$$

где  $W_1, W_2$  — скорости потока газа соответственно перед и за скачком уплотнения,  $a_*$  — критическая скорость звука,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — углы наклона скорости перед и за скачком,  $\eta_1$  и  $\eta_2$  — значения функции модуля скорости в соответствующих точках сверхзвуковой и дозвуковой сторон скачка уплотнения.

В данной работе указанная краевая задача решается методом прямых при помощи электронно-вычислительной машины «Минск-22». Предположим, что дуги  $AH$  и  $AB$ , соответствующие сверхзвуковой и дозвуковой сторонам скачка уплотнения, задаются уравнениями

$$\theta_1 = \frac{2}{3} \sum_0^2 k_{i1} (-\eta_1)^{3/2+i} + \theta_A$$

$$\theta_2 = \frac{2}{3} \sum_0^2 k_{i2} \eta_2^{3/2+i} + \theta_A \quad (9)$$



Фиг. 1

Здесь  $k_{i1}$  и  $k_{i2}$  — пока неизвестные постоянные коэффициенты. Далее проведем прямые, параллельные оси  $\theta$ , и расстояние между двумя соседними параллельными прямыми в верхней полуплоскости обозначим через  $h_2$ , а в нижней полуплоскости — через  $h_1$ .

В уравнении (1) производные по  $\eta$  заменим соответствующими разностными отношениями, тогда получим следующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\eta_k \psi_k''(\theta) + h^{-2} [\psi_{k+1}(\theta) - 2\psi_k(\theta) + \psi_{k-1}(\theta)] + h^{-1} b(\eta) [\psi_{k+1}(\theta) - \psi_k(\theta)] = 0 \quad (10)$$

с начальными условиями

$$\psi_{-2}(\theta) = \psi_3(\theta) = 0 \quad (k = -1, 0, 1, 2)$$

Решения системы уравнений (10) будем искать в виде

$$\psi_k(\theta) = \gamma(k) v(\theta) \quad (11)$$

Подставляя это выражение в систему уравнений (10), имеем

$$\eta_k \gamma(k) v''(\theta) + \{h^{-2} [\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)] + h^{-1} b(\eta) [\gamma(k+1) - \gamma(k)]\} v(\theta) = 0$$

или

$$\frac{v''(\theta)}{v(\theta)} = - \frac{[1 + b(\eta)h]\gamma(k+1) - [2 + b(\eta)h]\gamma(k) + \gamma(k-1)}{\eta_k h^2 \gamma(k)} = \delta^2 \quad (12)$$

Отсюда для  $\gamma(k)$  получим однородное разностное уравнение

$$[1 + b(\eta)h]\gamma(k+1) - [2 + b(\eta)h - h^2\eta_k\delta^2]\gamma(k) + \gamma(k-1) = 0 \quad (13)$$

с начальными условиями

$$\gamma(-2) = \gamma(3) = 0 \quad (14)$$

Пусть общее решение разностного уравнения (13) имеет вид

$$\gamma(k) = C_1' \lambda_1^{k+2} + C_2' \lambda_2^{k+2} \quad (15)$$

Здесь  $C_1'$  и  $C_2'$  — произвольные постоянные, а  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — корни характеристического уравнения

$$[1 + b(\eta)h]\lambda^2 - [2 + b(\eta)h - \eta_k h^2 \delta^2]\lambda + 1 = 0 \quad (16)$$

Отсюда по свойству корней квадратного уравнения

$$\lambda_1 \lambda_2 = [1 + b(\eta)h]^{-1}$$

с другой стороны, на основании начальных условий (14)

$$\begin{aligned} \gamma(-2) = C_1' + C_2' = 0, & \quad \gamma(-3) = C_1' \lambda_1^5 + C_2' \lambda_2^5 = 0 \\ \lambda_1 = [1 + b(\eta)h]^{-1/2} e^{i/5\pi i s}, & \quad \lambda_2 = [1 + b(\eta)h]^{-1/2} e^{-i/5\pi i s} \end{aligned}$$

Тогда

$$\gamma_s(k) = [1 + b(\eta)h]^{-1/2(k+2)}, \quad C_0 \sin^{1/5}\pi s (k+2) \quad (17)$$

Далее найдем значения  $\delta$ ; из разностного уравнения (13) получим

$$[1 + b(\eta_{-1})h_1]\gamma(1) - [3 + b(\eta_{-1})h_1 - 2h_1^2\eta_{-1}\delta^2]\gamma(-1) = 0$$

$$[2 + 2b(\eta_1)h_2]\gamma(2) - [3 + 2b(\eta_1)h_2 - 2h_2^2\eta_1\delta^2]\gamma(1) + \gamma(-1) = 0$$

$$[2 + b(\eta_2)h_2 - h_2^2\eta_2\delta^2]\gamma(2) - \gamma(1) = 0$$

Приравнивая главный определитель данной системы к нулю и подставляя численные значения  $b(\eta_k)$  из формулы (8), найдем, что

$$\delta_1 = \pm 6.61605, \quad \delta_2 = \pm 13.57718, \quad \delta_3 = 11.66807i$$

(при этом было принято  $h_1 = 0.2115$ ,  $h_2 = 0.2111$ ).

Тогда согласно уравнению (12) имеем

$$v''(\theta) - \delta_s^2 v(\theta) = 0 \quad (s = 1, 2, 3)$$

Отсюда

$$v(\theta) = A_s' e^{\delta_s \theta} + B_s' e^{-\delta_s \theta} \quad (18)$$

Искомые решения (11) на основании формул (17) и (18) примут вид

$$\psi_k(\theta) = \sum_1^3 (A_s e^{\delta_s \theta} + B_s e^{-\delta_s \theta}) [1 + b(\eta_k)h]^{-1/2(k+2)} \sin \pi s (k+2)^{1/5} \quad (19)$$

где  $A_s$  и  $B_s$  — произвольные постоянные. Для удобства решения задачи рассматриваемую область (фиг. 1) разбиваем на две области

$$L_1 = \{HMANBCSE'E'GH\}, \quad L_2 = \{GE'E'FKG\}$$

Точка  $G$  будет общей точкой для этих двух подобластей, поэтому в ней значения функции тока  $\psi$  слева и справа совпадают

$$\psi_0(\theta) = \bar{\psi}_0(\theta) \quad (20)$$

Определим неизвестные коэффициенты  $k_{i1}$  и  $k_{i2}$ , входящие в уравнение (9). Выражения (5) после несложного преобразования приводятся к виду [2]

$$\theta_2 - \theta_1 = (\eta_2 - \eta_1) \left[ -^{1/2}(\eta_2 + \eta_1) \right]^{1/2} \left[ 1 + \frac{3}{4(\kappa + 1)^{1/2}} (\eta_2 + \eta_1) + \frac{3(8\kappa + 5)}{160(\kappa + 1)^{3/2}} (\eta_2^2 + \eta_1^2) + \frac{11}{16(\kappa + 1)^{3/2}} \eta_2 \eta_1 + \dots \right] \quad (21)$$

( $\kappa = 1.4$  для воздуха).

Решая уравнения (9) и (21) совместно, для конкретных значений функции модуля скорости  $\eta$  находим

$$\begin{aligned} k_{02} &= -0.10221, & k_{01} &= -0.19272 \\ k_{12} &= -0.20283, & k_{11} &= -0.20469 \\ k_{22} &= -0.58107, & k_{21} &= -0.57506 \end{aligned} \quad (22)$$

Предполагая  $\theta_A = -0.24671$ , из формулы (9) имеем

$$\theta_B = -0.3, \quad \theta_H = 0.31676$$

В первой подобласти  $L_1$ , согласно формулам (2) — (7), краевыми условиями будут [2]

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_M}{d\psi_M} = \frac{d\varphi_N}{d\psi_N} &= \pm C \left[ -^{1/2}(\eta_M + \eta_N) \right]^{1/2} \left[ 1 + c_1(\eta_M + \eta_N) + \right. \\ &\quad \left. + c_2(\eta_M^2 + \eta_N^2) + c_3\eta_M\eta_N + \dots \right] \\ \frac{d\varphi_B}{d\psi_B} = \frac{d\varphi_H}{d\psi_H} &= \pm C \left[ -^{1/2}(\eta_B + \eta_H) \right]^{1/2} \left[ 1 + c_1(\eta_B + \eta_H) + \right. \\ &\quad \left. + c_2(\eta_B^2 + \eta_H^2) + c_3\eta_B\eta_H + \dots \right] \\ &\quad (c = 2.1111) \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$c_1 = \frac{5 - 4\kappa}{20(\kappa + 1)^{1/2}}, \quad c_2 = \frac{64\kappa^2 + 280\kappa + 5}{1120(\kappa + 1)^{3/2}}, \quad c_3 = \frac{272\kappa^2 - 280\kappa + 625}{2800(\kappa + 1)^{3/2}}$$

$$\psi(\theta_M, \eta_M) = \psi(\theta_N, \eta_N) \quad (24)$$

$$\psi(\theta_B, \eta_B) = \psi(\theta_H, \eta_H) = 0 \quad (25)$$

Далее на основании выражения (4) значения функции тока в окрестности особой точки имеют вид

$$\psi_1(-0.05, 0.2111) = 3.49335, \quad \psi_2(-0.05, 0.4222) = 2.86514 \quad (26)$$

Пользуясь краевыми условиями (23) — (26) из равенства (19), получаем системы уравнений

$$\begin{aligned} &0.0883A_1 + 4.67658B_1 - 0.0177A_2 - 61.07551B_2 - \\ &\quad - 1.03011A_3 - 0.14111B_3 = 0 \\ &0.07006A_1 + 1.81789B_1 - 0.05165A_2 - 62.67016B_2 + 1.78937A_3 + \\ &\quad + 0.16203B_3 = 0 \\ &0.46195A_1 + 0.89454B_1 - 0.52735A_2 - 2.04996B_2 + \\ &\quad + 0.86772A_3 - 0.57281B_3 = 2.86514 \\ &0.76443A_1 + 1.48027B_1 - 0.33333A_2 - 1.29574B_2 - 0.54846A_3 + \\ &\quad + 0.36206B_3 = 3.49335 \\ &0.1996A_1 + 5.65588B_1 - 0.02558A_2 - 15.47838B_2 + 0.65294A_3 + \\ &\quad + 0.07564B_3 = 0 \\ &0.07354A_1 + 5.4585B_1 - 0.01851A_2 - 58.27941B_2 - 1.06346A_3 + \\ &\quad + 0.10231B_3 = 0 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A_1 &= 2.65185, & B_1 &= -0.09854 \\ A_2 &= -4.05467, & B_2 &= -0.00053 \\ A_3 &= -0.17975, & B_3 &= 0.44532 \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда согласно формуле (19) функции тока для первой подобласти имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_{-1}(\theta) &= 1.86921e^{\delta_1\theta} - 0.06946e^{-\delta_1\theta} - 4.62431e^{\delta_2\theta} - 0.00061e^{-\delta_2\theta} - \\ &\quad - 0.205 \cos \delta_3\theta + 0.50788 \sin \delta_3\theta \\ \psi_0(\theta) &= 2.52207e^{\delta_1\theta} - 0.09371e^{-\delta_1\theta} - 2.38329e^{\delta_2\theta} + 0.00031e^{-\delta_2\theta} + \\ &\quad + 0.10566 \cos \delta_3\theta - 0.26175 \sin \delta_3\theta \\ \psi_1(\theta) &= 2.81984e^{\delta_1\theta} - 0.10478e^{-\delta_1\theta} + 2.66469e^{\delta_2\theta} + 0.00055e^{-\delta_2\theta} + \\ &\quad + 0.11813 \cos \delta_3\theta - 0.29266 \sin \delta_3\theta \\ \psi_2(\theta) &= 1.70405e^{\delta_1\theta} - 0.06332e^{-\delta_1\theta} + 4.21576e^{\delta_2\theta} + 0.00055e^{-\delta_2\theta} - \\ &\quad - 0.18689 \cos \delta_3\theta + 0.46301 \sin \delta_3\theta \end{aligned} \quad (28)$$

Теперь из уравнения Чаплыгина [3]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -B(\eta) \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \eta B(\eta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (29)$$

определяем значения потенциала скорости  $\varphi$  на каждой линии  $\eta_k$

$$\begin{aligned} \varphi_k(\theta) &= h^{-1}B(\eta) \int (\psi_k - \psi_{k+1}) d\theta, \\ \varphi_{k+1}(\theta) &= h^{-1}B(\eta) \int (\psi_{k-1} - \psi_k) d\theta + B(\eta) h \eta_k \psi'_k(\theta) \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B(\eta) &= C \left[ 1 - \frac{5 + 2\kappa}{5(\kappa + 1)^{1/3}} \eta + \frac{74\kappa^2 + 245\kappa + 300}{350(\kappa + 1)^{2/3}} \eta^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1840\kappa^3 - 7050\kappa^2 + 1112\kappa + 9000}{15750(\kappa + 1)} \eta^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

или согласно выражению (28) получим

$$\begin{aligned}
 \varphi_{-2}(\theta) &= -4.93302e^{\delta_1\theta} - 0.1833e^{-\delta_1\theta} + 5.94682e^{\delta_2\theta} - 0.00078e^{-\delta_2\theta} + \\
 &\quad + 0.30676 \sin \delta_3\theta + 0.75997 \cos \delta_3\theta + \text{const} \quad (31) \\
 \varphi_{-1}(\theta) &= 1.28686e^{\delta_1\theta} - 0.04782e^{-\delta_1\theta} - 2.15262e^{\delta_2\theta} + 0.00028e^{-\delta_2\theta} - \\
 &\quad - 0.34723 \sin \delta_3\theta - 0.86023 \cos \delta_3\theta + \text{const} \\
 \varphi_0(\theta) &= -0.45005e^{\delta_1\theta} - 0.01672e^{-\delta_1\theta} - 3.71817e^{\delta_2\theta} + 0.00049e^{-\delta_2\theta} - \\
 &\quad - 0.01069 \sin \delta_3\theta - 0.02649 \cos \delta_3\theta + \text{const} \\
 \varphi_1(\theta) &= 1.3595e^{\delta_1\theta} + 0.0505e^{-\delta_1\theta} - 0.9209e^{\delta_2\theta} + 0.00012e^{-\delta_2\theta} + \\
 &\quad + 0.21073 \sin \delta_3\theta + 0.52207 \cos \delta_3\theta + \text{const} \\
 \varphi_2(\theta) &= 1.80429e^{\delta_1\theta} + 0.06704e^{-\delta_1\theta} + 2.17517e^{\delta_2\theta} - 0.00029e^{-\delta_2\theta} - \\
 &\quad - 0.11221 \sin \delta_3\theta - 0.27798 \cos \delta_3\theta + \text{const} \\
 \varphi_3(\theta) &= 2.51181e^{\delta_1\theta} + 0.09333e^{-\delta_1\theta} + 6.35038e^{\delta_2\theta} - 0.00083e^{-\delta_2\theta} + \\
 &\quad + 0.44311 \sin \delta_3\theta + 1.09775 \cos \delta_3\theta + \text{const}
 \end{aligned}$$

Перейдем ко второй подобласти  $L_2$ ; в ней краевыми условиями являются

$$\theta = 0.3, \quad \psi_1^\circ(\theta) = 0, \quad \psi_2^\circ(\theta) = 0, \quad \psi_0(\theta_c) = \psi_0^\circ(\theta_c) \quad (32)$$

в окрестности особой точки

$$\psi_1^\circ(0.05, 0.2111) = 2.66124, \quad \psi_2^\circ(0.05, 0.4222) = 0.65095 \quad (33)$$

Решая, как и в первой подобласти, и пользуясь краевыми условиями (32) и (33), находим функции тока и потенциала скорости на каждой линии  $\eta_k$

$$\psi_0^\circ(\theta) = 0.54592 - 1.819700 + \dots$$

$$\begin{aligned}
 \psi_1^\circ(\theta) &= -0.00818e^{\delta_1\theta} + 1.07939e^{-\delta_1\theta} - 0.02335e^{\delta_2\theta} - 1.14692e^{-\delta_2\theta} - \\
 &\quad - 2.40057\theta + 1.61537 \quad (34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_2^\circ(\theta) &= -0.01386e^{\delta_1\theta} + 1.82797e^{-\delta_1\theta} + 0.02284e^{\delta_2\theta} - 1.1214e^{-\delta_2\theta} + \\
 &\quad + 0.21784\theta + 0.40011
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_0^\circ(\theta) &= 0.00592e^{\delta_1\theta} + 0.78037e^{-\delta_1\theta} + 0.02364e^{\delta_2\theta} - 1.16086e^{-\delta_2\theta} + \\
 &\quad + 2.92454\theta^2 - 10.69501\theta + c_0^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_1^\circ(\theta) &= 0.00331e^{\delta_1\theta} + 0.43625e^{-\delta_1\theta} = 0.03768e^{\delta_2\theta} - 1.85066e^{-\delta_2\theta} - \\
 &\quad - 10.55361\theta^2 + 9.79631\theta + c_1^\circ \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_2^\circ(\theta) &= -0.00702e^{\delta_1\theta} - 0.92574e^{-\delta_1\theta} + 0.01619e^{\delta_2\theta} + 0.79508e^{-\delta_2\theta} + \\
 &\quad + 0.76301\theta^2 + 2.80286\theta + c_2^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_3^\circ(\theta) &= -0.02109e^{\delta_1\theta} + 2.78122e^{-\delta_1\theta} - 0.00284e^{\delta_2\theta} - 0.13933e^{-\delta_2\theta} - \\
 &\quad - 8.63658\theta^2 + 8.01639\theta + 0.0274 + c_3^\circ
 \end{aligned}$$

$$\delta_1^\circ = 13.8324, \quad \delta_2^\circ = 9.88036$$

Таким образом определены функции тока  $\psi$  и потенциал скорости  $\varphi$  на каждой линии  $\eta_k$  в двух подобластях, а их значения между этими линиями определяются параболическим интерполированием. Теперь решим на характеристическом треугольнике  $KG'G$  задачу Коши. Для этой цели заметим, что в указанном треугольнике всегда существует регулярное решение уравнения (1), которое вместе со своей производной  $\partial\psi/\partial\eta$  принимает на отрезке  $KG$  произвольные заранее заданные значения [4]. Оно имеет

вид [5]

$$\psi = \int_0^1 \tau \left[ \theta + \frac{2}{3} (-\eta)^{3/2} (2t-1) \right] [t(1-t)]^{-5/6} dt - \left( \frac{4}{3} \right)^{2/3} \eta \int_0^1 v \left[ \theta + \frac{2}{3} (-\eta)^{3/2} (2t-1) \right] [t(1-t)]^{-1/6} dt \quad (36)$$

$$\psi = \gamma_1 \tau(\theta), \quad \partial \psi / \partial \eta = \gamma_2 v(\theta) \quad \text{при } \eta = 0$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma^2(1/6)}{\Gamma(1/3)}, \quad \gamma_2 = \left( \frac{4}{3} \right)^{2/3} \frac{\Gamma^2(5/6)}{\Gamma(5/3)}$$

Следует отметить, что функции  $\tau(\theta)$  и  $v(\theta)$  ограничены и непрерывны внутри отрезка  $KG$  и могут быть представлены в виде

$$\tau(\theta) = a_0 + a_1 \theta + a_2 \theta^2 + a_3 \theta^3 + a_4 \theta^4 + \dots$$

$$v(\theta) = b_0 + b_1 \theta + b_2 \theta^2 + b_3 \theta^3 + b_4 \theta^4 + \dots$$

$$a_0 = 0.54592,$$

$$b_0 = 15.46295$$

$$a_1 = -1.81970,$$

$$b_1 = -123.24230$$

$$a_2 = 0.00016,$$

$$b_2 = 581.10521$$

$$a_3 = -0.00119,$$

$$b_3 = -1417.87010$$

$$a_4 = 0.00125,$$

$$b_4 = 925.03402$$

Подставляя значения  $\tau(\theta)$  и  $v(\theta)$  в формулы (36), после несложных преобразований имеем [6]

$$\psi = \gamma_1 (a_0 \theta + a_1 \theta + a_2 \theta^2 + a_3 \theta^3 + a_4 \theta^4) - \gamma_2 (b_0 + b_1 \theta + b_2 \theta^2 + b_3 \theta^3 + b_4 \theta^4) \eta - \frac{1}{3} \gamma_1 (a_2 + 3a_3 \theta + 6a_4 \theta^2) \eta^2 + \frac{1}{6} \gamma_2 (b_2 + 3b_3 \theta + 6b_4 \theta^2) \eta^4 + \frac{2}{15} \gamma_1 a_4 \eta^6 - \frac{1}{21} \gamma_2 b_4 \eta^7 \quad (37)$$

Из уравнения (29) и на основании выражения (37) находим потенциал скорости

$$\varphi = B(\eta) [\gamma_2 (b_0 + \frac{1}{2} b_1 \theta + \frac{1}{3} b_2 \theta^2 + \frac{1}{4} b_3 \theta^3 + \frac{1}{5} b_4 \theta^4) \theta + \gamma_1 (a_2 + \frac{3}{2} a_3 \theta^2 + 2a_4 \theta^3) \theta \eta^2 - \frac{2}{3} \gamma_2 (b_2 + \frac{3}{2} b_3 \theta^2 + 2b_4 \theta^3) \theta \eta^3 - \frac{1}{5} \gamma_1 a_4 \theta \eta^5 + \frac{1}{3} \gamma_2 b_4 \theta \eta^6] \quad (38)$$

Для нахождения линии  $HG'$ , на которой  $\psi = 0$ , необходимо исходить из уравнения Чаплыгина в характеристических координатах

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = -\sqrt{-\eta} B(-\eta) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \sqrt{-\eta} B(-\eta) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \quad (39)$$

При этом следует учесть, что на характеристических линиях  $GG'$  и  $GH$  значения функции тока и потенциала скорости заранее известны, а их значения между этими линиями определяются методом характеристик, т. е. через точки  $i, k = 1, 2, \dots, s$  линий  $GG'$  и  $GH$  проведем характеристические линии первого и второго семейства, тогда для узловых точек полученной сетки из уравнения (39) получим систему конечно-разностных уравнений

$$\Phi_{i, k} - \Phi_{i-1, k} = -B(-\eta) \sqrt{-\eta_{i-1, k}} (\psi_{i, k} - \psi_{i-1, k})$$

$$\Phi_{i, k} - \Phi_{i, k-1} = B(-\eta) \sqrt{-\eta_{i, k-1}} (\psi_{i, k} - \psi_{i, k-1})$$

при помощи которой и находятся значения  $\psi$  и  $\varphi$ . Переходим на физическую плоскость.

Из формул Чаплыгина

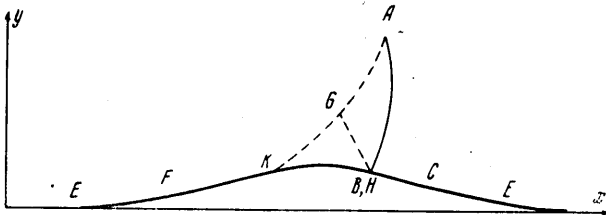
$$dx = \frac{\cos \theta}{W} d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho W} \sin \theta d\psi, \quad dy = \frac{\sin \theta}{W} d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho W} \cos \theta d\psi$$

или, учитывая уравнения (29), получаем [2]

$$a_{*x} = \varphi + (\kappa + 1)^{-1/3} \int \eta d\varphi + \frac{5 + 2\kappa}{10(\kappa + 1)^{2/3}} \int \eta^2 d\varphi - \\ - \frac{6\kappa^2 - 70\kappa - 75}{350(\kappa + 1)} \int \eta^3 d\varphi - \frac{1}{2} \int \theta^2 d\varphi - \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{(\kappa-1)^{-1}} \int \theta d\psi - \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{(\kappa-1)^{-1}} (\kappa + 1)^{1/3} \int \theta \eta^3 d\psi$$

$$a_{*y} = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{(\kappa-1)^{-1}} \psi + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{(\kappa-1)^{-1}} (\kappa + 1)^{1/3} \int \eta^2 d\psi - \\ - \frac{2\kappa}{15} \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{(\kappa-1)^{-1}} \int \eta^3 d\psi + \frac{82\kappa^2 - 595\kappa - 900}{2100(\kappa + 1)^{1/3}} \times \\ \times \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{(\kappa-1)^{-1}} \int \eta^4 d\psi - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{(\kappa-1)^{-1}} \int \theta^2 d\psi + \\ + \int \theta d\varphi + (\kappa + 1)^{-1/3} \int \theta \eta d\varphi + \frac{5 + 2\kappa}{10(\kappa + 1)^{2/3}} \int \theta \eta^2 d\varphi$$

Отсюда на основании формул (34), (35), (28), (31) найдем  $x$  и  $y$  на



Фиг. 2

линии  $\psi = 0$ , звуковую линию и линию скачка уплотнения в зависимости от функций скорости  $\eta$ . Линия  $\psi = 0$

$$a_{*x} = (0.01055\theta^2 - 0.00152\theta - 0.03566)e^{\delta_1 \cdot \theta} - (1.39061\theta^2 + \\ + 0.20107\theta - 4.70322)e^{-\delta_1 \cdot \theta} + (0.00142\theta^2 - 0.00029\theta - 0.00479)e^{\delta_2 \cdot \theta} + \\ + (0.06966\theta^2 + 0.00141\theta - 0.23491)e^{-\delta_2 \cdot \theta} + 1.07957\theta^4 - \\ - 1.3364\theta^3 - 14.65014\theta^2 + 13.5988\theta + \text{const}$$

$$a_{*y} = (0.03475\theta - 0.00251)e^{\delta_1 \cdot \theta} + (4.58214\theta + 0.33126)e^{-\delta_1 \cdot \theta} - \\ - (0.00468\theta - 0.00047)e^{\delta_2 \cdot \theta} - (0.22955\theta + 0.02323)e^{-\delta_2 \cdot \theta} - \\ - 9.48602\theta^3 + 6.60399\theta^2 + \text{const}$$



Звуковая линия ( $\eta = 0$ )

а) на линии *AG*

$$a_*x = (0.22503\theta^2 - 4.04643\theta + 0.16156)e^{\delta_1\theta} + (0.00836\theta^2 + 0.15035\theta + 0.00600)e^{-\delta_1\theta} + (1.85909\theta^2 + 3.48565\theta - 3.9749)e^{\delta_2\theta} - (0.00025\theta^2 - 0.00045\theta + 0.00053)e^{-\delta_2\theta} + (0.01325\theta^2 - 0.16575\theta + 0.00871)\cos\delta_3\theta + (0.00535\theta^2 + 0.41062\theta - 0.02505)\sin\delta_3\theta = \text{const}$$

$$a_*y = (3.95554 + 0.15128\theta - 1.98921\theta^2)e^{\delta_1\theta} - (0.14697 - 0.00562\theta - 0.07391\theta^2)e^{-\delta_1\theta} - (3.46526 + 3.71817\theta - 1.87975\theta^2)e^{\delta_2\theta} - (0.00045 - 0.00053\theta - 0.00024\theta^2)e^{-\delta_2\theta} + (0.16697 + 0.0089\theta - 0.08334\theta^2)\cos\delta_3\theta - (0.41365 - 0.00359\theta - 0.20645\theta^2)\sin\delta_3\theta + \text{const}$$

б) на линии *GK*

$$a_*x = (0.00589 + 0.00043\theta - 0.00296\theta^2)e^{-\delta_1\theta} + (0.77629 - 0.05642\theta - 0.39018\theta^2)e^{-\delta_1\theta} + (0.0234 + 0.02393\theta - 0.01182\theta^2)e^{\delta_2\theta} + (1.14897 - 0.11749\theta - 0.58043\theta^2)e^{-\delta_2\theta} - 0.97485\theta^3 + 4.35977\theta^2 - 10.69501\theta + \text{const}$$

$$a_*y = 0.00043(\delta_1\theta - 1)e^{\delta_1\theta} + 0.05642(\delta_1\theta + 1)e^{-\delta_1\theta} + 0.00239(\delta_2\theta - 1)e^{\delta_2\theta} + 0.11749(\delta_2\theta + 1)e^{-\delta_2\theta} + 0.35881\theta^4 + 1.80616\theta^3 - 5.34726\theta^2 - 2.87047\theta + 0.86116 + \text{const}$$

Скачок уплотнения

$$a_*x = 0.43315\eta - 0.23108\eta^{3/2} + 8.55598\eta^2 - 0.81186\eta^{5/2} + 8.03612\eta^3 - 2.01456\eta^{7/2} - 1.79574\eta^4 - 2.38254\eta^{9/2} + 4.11767\eta^5 - 0.64605\eta^{11/2} - 3.05171\eta^6 + \text{const}$$

$$a_*y = 0.17789 + 1.70223\eta - 0.90811\eta^{3/2} - 3.69008\eta^2 - 3.39047\eta^{5/2} - 1.61606\eta^3 - 8.98170\eta^{7/2} - 0.26752\eta^4 - 11.20966\eta^{9/2} - 1.44050\eta^5 - 5.12927\eta^{11/2} + 0.26324\eta^6 + \text{const}$$

графические изображения найденных линий даны на фиг. 2.

В заключение авторы благодарят С. В. Фальковича за ценные советы.

Поступило 12 X 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Обтекание профиля дозвуковым потоком с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся искривленным скачком уплотнения. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
2. Бийбосунов И., Карыбеков Н. Плоское транзвуковое течение газа с искривленным скачком уплотнения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5.
3. Фалькович С. В. К теории сопла Лавала. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
4. Трикоми Ф. О линейных уравнениях частных производных второго порядка смешанного типа. М., Гостехиздат, 1947.
5. Франкль Ф. И. О задаче Коши для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с начальными данными на переходной линии. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1944, № 8.
6. Рыскулов А., Бийбосунов И. Задача об обтекании тела околзвуковым потоком газов. Изв. АН КиргССР, 1970, № 1.