УДК 532.526

ОБ УРАВНЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ОБЛАСТЯХ С БОЛЬШИМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

Г. М. БАМ-ЗЕЛИКОВИЧ

(*Москва*)

В предположении, что в областях с большим градиентом давления изменение параметров потока в направлении, перпендикулярном градиенту давления, мало по сравнению с изменениями вдоль градиента давления, расчет пространственного пограничного слоя сводится к интегрированию уравнений, которые аналогичны уравнениям двумерного пограничного слоя, вдоль линий, касательных к градиенту давления.

1. Пусть имеется криволинейная триортогональная система координат ξ, η, ζ такая, что ось ζ направлена по нормали к обтекаемой поверхности и при $\zeta=0$ линии ξ и η лежат на обтекаемой поверхности. В пределах пограничного слоя можно принимать, что

$$ds^2 = h_1^2 d\xi^2 + h_2^2 d\eta^2 + d\zeta^2$$

причем h_1 и h_2 являются функциями только ξ и η.

Уравнения движения, неразрывности и энергии, описывающие течение в трехмерном ламинарном пограничном слое при этом имеют вид (см., например, [1])

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{v}{h_2}\frac{\partial u}{\partial \eta}+w\frac{\partial u}{\partial \zeta}-\frac{uv}{r_2}+\frac{v^2}{r_1}=-\frac{1}{\rho h_1}\frac{\partial p}{\partial \xi}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\mu\frac{\partial u}{\partial \zeta}$$

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{v}{h_2}\frac{\partial v}{\partial \eta}+w\frac{\partial v}{\partial \zeta}+\frac{u^2}{r_2}-\frac{uv}{r_1}=-\frac{1}{\rho h_2}\frac{\partial p}{\partial \eta}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\mu\frac{\partial v}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta}=0,\qquad \frac{1}{r_1}=-\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \xi},\qquad \frac{1}{r_2}=-\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \eta} \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial \rho u}{\partial \xi}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial \rho v}{\partial \eta}+\frac{\partial \rho w}{\partial \zeta}-\frac{\rho u}{r_1}-\frac{\rho v}{r_2}=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial H}{\partial \xi}+\frac{v}{h_2}\frac{\partial H}{\partial \eta}+w\frac{\partial H}{\partial \zeta}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\mu\left(\frac{\partial H}{\partial \zeta}+\frac{1-\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial c_pT}{\partial \zeta}\right)\right]$$

$$H=\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)+\frac{\varkappa p}{(\varkappa-1)\rho} \tag{1.3}$$

Здесь u, v, w — проекции вектора скорости на оси ξ, η, ζ; ρ — плотность; p — давление; T — температура; H — полная энтальпия; μ — коэффициент вязкости; Pr — число Прандтля; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; $\varkappa$ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме; $1/r_1$ и $1/r_2$ — геодезические кривизны линий $\xi=\mathrm{const}$ и $\eta=\mathrm{const}$ соответственно. Обозначим еще через U и V проекции скорости на границе пограничного слоя на оси ξ и η.

Во многих практических интересных случаях течение таково, что пограничный слой на теле развивается на значительной длине в условиях отсутствия градиента давления или при небольшом градиенте давления, и только в зонах, имеющих сравнительно небольшую протяженность по сравнению с размерами тела, действует большой градиент давления, приводящий часто, в случае положительного градиента, к отрыву пограничного слоя. К таким течениям можно отнести обтекание препятствий той или иной формы, установленных на пластине на значительном удалении от ее передней кромки, течение при взаимодействии ударных волн с развитым пограничным слоем, течения вблизи изломов конусов, клиньев и т. п., течение вблизи рулей или других выступающих частей на фюзеляже самолета или корпусе ракеты и многие другие случаи.

Решение полных уравнений трехмерного пограничного слоя при наличии значительного градиента давления сопряжено с большими трудностями в связи с тем, что при этом в пограничном слое возникает существенное вторичное течение. Поэтому представляет интерес рассмотреть возможные упрощения уравнений, связанные со сравнительно малой протяженностью зон с большим градиентом давления.

Сформулируем основные предположения, при которых будет рассматриваться в дальнейшем задача.

1. Линии ξ в каждой точке касаются вектора $\operatorname{grad} p$. При таком выборе координатных линий $\partial p / \partial \eta \equiv 0$.

2. В рассматриваемой области течения градиент давления велик, а протяженность области мала по сравнению с размером тела. Иными словами, если характерный размер обтекаемого тела L, а характерный размер рассматриваемой зоны по линии ξ (линии $\eta = \text{const}$) — l, то будем предполагать, что давление p и проекция скорости u изменяются на порядок своей величины на длине l и что $l \ll L$.

3. Геодезические кривизны выбранных координатных линий имеют порядок $1 / L$.

4. В направлении, поперечном к градиенту давления, т. е. в направлении по линии η (линии $\xi = \text{const}$), размер рассматриваемой зоны имеет порядок L.

5. Если поверхность обтекаемого тела неравномерно нагрета, то характерный размер изменения температуры поверхности также имеет порядок L.

6. Если рассматриваемое тело обтекается потоком, неравномерным на большом расстоянии перед телом (на ∞ перед телом), то характерная длина, на которой параметры потока на большом расстоянии перед телом меняются на порядок своей величины, не меньше L.

Оценим, исходя из сделанных предположений, величину различных членов в уравнениях (1.1) — (1.3). Вследствие первых двух предположений $(1 / h_1) \partial u / \partial \xi \approx U / l$. Так как $\partial p / \partial \eta \equiv 0$, то изменение u вдоль линии η может происходить или из-за неравномерности набегающего потока или из-за криволинейности системы координат. В обоих случаях в силу третьего и шестого предположений будет $(1 / h_2) \partial u / \partial \eta \sim U / L$. Таким образом, получаем, что

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \xi} \sim \frac{U^2}{l}, \quad \frac{v}{h_2}\frac{\partial u}{\partial \eta} \sim \frac{UV}{L}, \quad \frac{uv}{r_2} \sim \frac{UV}{L}, \quad \frac{v^2}{r_1} \sim \frac{V^2}{L}$$

и, следовательно, последними тремя выписанными членами можно пренебречь по сравнению с первым, если только V порядка или меньше U.

При этом первое уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \xi} + w\frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\rho h_1}\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\mu\frac{\partial u}{\partial \zeta} \tag{1.4}$$

Аналогично, так как изменение компоненты v скорости (проекции скорости на направление, перпендикулярное $\operatorname{grad} p$) может быть связано только либо с неравномерностью внешнего потока, либо с кривизной координатных линий, то

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial \xi} \sim \frac{V}{L}, \quad \frac{1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial \eta} \sim \frac{V}{L}$$

Изменение ρ в направлении η в выбранной системе координат может быть вызвано или изменением проекций скорости, или неравномерностью плотности в набегающем потоке, или переменной температурой стенки. Вследствие сделанных уже оценок, а также пятого и шестого предположений в рассматриваемом случае будет

$$\frac{1}{h_2}\frac{\partial \rho v}{\partial \eta} \sim \frac{\rho_\infty V}{L} \ll \frac{1}{h_1}\frac{\partial \rho u}{\partial \xi} \sim \frac{\rho_\infty U}{l}$$

где ρ_∞ — значение плотности на внешней границе пограничного слоя. Поэтому вместо уравнения неразрывности (1.2) можно написать

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial \rho u}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho w}{\partial \zeta} = 0 \tag{1.5}$$

Оценим так же, как это обычно делается, величину компоненты скорости w

$$\rho_\infty w = \int_0^\delta \frac{1}{h_1}\frac{\partial \rho u}{\partial \xi} d\zeta \sim \frac{\rho_\infty U \delta}{l}, \qquad w \sim U\frac{\delta}{l}$$

где δ — толщина пограничного слоя. Теперь можно оценить во втором уравнении движения член, содержащий w

$$\frac{w\,\partial v}{\partial \zeta} \sim \frac{U\delta}{l}\frac{V}{\delta} = \frac{UV}{l} \gg \frac{u}{h_1}\frac{\partial v}{\partial \xi} \sim \frac{UV}{L}$$

Таким образом и второе уравнение движения значительно упрощается

$$w\frac{\partial v}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\mu\frac{\partial v}{\partial \zeta} \tag{1.6}$$

2. Перейдем в уравнениях (1.4), (1.5) от переменных ξ, η, ζ к переменным ξ_1, η, ζ

$$\xi_1 = \int_{\xi_0}^{\xi} h_1\, d\xi, \qquad \frac{\partial}{\partial \xi} = h_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)_\xi = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)_{\xi_1} \tag{2.1}$$

где ξ_0 — некоторое значение ξ, вообще говоря, различное на разных линиях $\eta = \text{const}$. Выражение производных по η в новых переменных не существенно, так как в уравнения (1.4), (1.5) производные по η не входят. Вместо (1.4), (1.5) получаем

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + w\frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi_1} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right), \qquad \frac{\partial \rho u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \rho w}{\partial \zeta} = 0 \tag{2.2}$$

Если рассматривается течение несжимаемой жидкости, то уравнения (2.2) представляют собой замкнутую систему уравнений для нахождения u и w. Эта система совпадает с уравнениями двумерного пограничного слоя. Это, однако, не означает, что течение в пограничном слое в рассматриваемой зоне двумерно (т. е. не зависит от какой-либо координаты). Течение остается существенно трехмерным, так как на каждой линии $\eta = \text{const}$ давление изменяется по-разному, т. е. функция $p(\xi_1, \eta)$ на разных линиях $\eta = \text{const}$ различна. Кроме того, различными будут начальные условия. Поэтому для получения картины течения необходимо уравнения (2.2) интегрировать вдоль ряда линий $\eta = \text{const}$. Полученный результат имеет следующий физический смысл: в случаях, когда изменение параметров, вызванное большим градиентом давления, велико по сравнению с их изменением в направлении, перпендикулярном $\operatorname{grad} p$, влияние такого изменения в перпендикулярном направлении на картину течения в направлении $\operatorname{grad} p$, настолько мало, что в первом приближении им можно пренебречь. При этом можно вычислять проекции скорости на направление $\operatorname{grad} p$ и на нормаль к поверхности, двигаясь вдоль линии, касательной к градиенту давления, и не обращая внимания на то, как ведет себя поток по обе стороны от нее.

После того как из (2.2) будут определены u и w, третья компонента скорости v может быть найдена из уравнения (1.6). Уравнение (1.6) показывает, что в зонах с большим градиентом давления профиль компоненты v скорости, ортогональной градиенту давления, зависит в основном от поведения компоненты w скорости по нормали к обтекаемой поверхности. Иными словами, картина течения в пограничном слое оказывается следующей: вследствие сильного изменения компоненты u скорости под действием большого градиента давления сильно изменяется толщина пограничного слоя, причем, вообще говоря, по-разному на разных линиях $\eta = \text{const}$. Таким образом, течение в направлении, перпендикулярном $\operatorname{grad} p$, происходит как бы в канале с сильно изменяющейся площадью сечения. Это изменение площади сечения наряду с вязкостью и является определяющим в формировании профиля скорости v. Влияние остальных факторов на величину v (неравномерности набегающего потока, кривизны координатных линий и т. п.) оказывается пренебрежимо малым.

3. При решении задачи о пограничном слое в сжимаемом газе необходимо рассматривать уравнение энергии (1.3). Так как производные H — линейные функции от производных p, ρ, u, v, w, то из приведенных выше оценок следует, что в рассматриваемой области

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial H}{\partial \xi} \sim \frac{UH_\infty}{l}, \qquad \frac{v}{h_2}\frac{\partial H}{\partial \eta} \sim \frac{VH_\infty}{L}, \qquad w\frac{\partial H}{\partial \zeta} \sim \frac{UH_\infty}{l}$$

где H_∞ — значение H на границе пограничного слоя. Пренебрегая снова величинами порядка l / L по сравнению с единицей и переходя к независимой переменной ξ_1 по формуле (2.1), получаем вместо (1.3)

$$u\frac{\partial H}{\partial \xi_1} + w\frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\mu\left(\frac{\partial H}{\partial \zeta} + \frac{1-\Pr}{\Pr}\frac{\partial c_p T}{\partial \zeta}\right)\right] \tag{3.1}$$

В это уравнение, так же как в (2.2), не входит ни η, ни производные по η, но функция H зависит от проекции v скорости на направление η. Оценим вклад слагаемого $v^2 / 2$ в величину H. Введем обозначения

$$M_v^2 = \frac{\rho v^2}{\varkappa p}, \qquad M_1^2 = \frac{\rho(u^2+w^2)}{\varkappa p}, \qquad M^2 = \frac{\rho(u^2+v^2+w^2)}{\varkappa p}$$

Тогда можно представить H в следующем виде:

$$H = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\rho}\left(1+\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\right)(1+\varepsilon), \qquad \varepsilon = \frac{\varkappa-1}{2}M_v^2\left(1+\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\right)^{-1}$$

Если величина ε пренебрежимо мала по сравнению с единицей, то это значит, что можно пренебречь величиной $v^2 / 2$. Потребовав, например, чтобы было $\varepsilon \leqslant 0.1$, получим, что при $M \leqslant 0.7$ соотношение между компонентами скорости u и v может быть произвольным (в частности, v может быть даже намного больше u). Это связано с тем, что при небольших числах M вклад члена, содержащего M^2, в полную энтальпию вообще пренебрежимо мал. При числе M порядка или меньше единицы v может быть порядка или меньше u, чтобы было $\varepsilon \leqslant 0.1$. При $M \sim 2$ обязательно должно быть $v \leqslant {}^2/_3 u$, при $M \sim 3$ $v \leqslant 0.4u$.

Таким образом, при скоростях, вплоть до близких к скорости звука, с достаточной степенью точности всегда можно пренебречь слагаемым $v^2 / 2$ в выражении H, а при умеренных сверхзвуковых скоростях этим слагаемым можно заведомо пренебречь при v, несколько меньших чем u.

При этом уравнения (2.2), (3.1) вместе с соответствующим уравнением состояния образуют замкнутую систему, из которой могут быть определены u, w, p, ρ и T. Эта система, как и в рассмотренном выше случае несжимаемой жидкости, по виду в точности совпадает с системой уравнений двумерного пограничного слоя.

Интересно отметить, что после того как система (2.2), (3.1) будет решена, вычисление v сводится к квадратурам. Действительно, (1.6) можно представить в виде

$$\left(\mu\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right)=\frac{\rho w}{\mu}$$

Отсюда, интегрируя дважды по ζ, получаем

$$v=C_2(\xi,\eta)+C_1(\xi,\eta)I(\xi,\eta,\zeta),\qquad I(\xi,\eta,\zeta)=\int\limits_0^\zeta\frac{1}{\mu}\exp\left(\int\limits_0^\zeta\frac{\rho w}{\mu}d\zeta\right)d\zeta \tag{3.2}$$

Так как $v=0$ при $\zeta=0$ и $v=V(\xi,\eta)$ при $\zeta=\infty$ (т. е. на границе пограничного слоя), то

$$C_2(\xi,\eta)=0,\qquad C_1(\xi,\eta)=V(\xi,\eta)\,/\,I(\xi,\eta,\infty)$$

Подставляя эти значения C_1 и C_2 в (3.2), получаем

$$v=V(\xi,\eta)I(\xi,\eta,\zeta)\,/\,I(\xi,\eta,\infty)$$

4. Рассмотрим, наконец, течение в зоне с большим градиентом давления при турбулентном пространственном пограничном слое. Уравнения движения, неразрывности и энергии в криволинейных ортогональных координатах в этом случае могут быть представлены в следующем виде [2]:

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{v}{h_2}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\left(w+\frac{\langle\rho'w'\rangle}{\rho}\right)\frac{\partial u}{\partial \zeta}-\frac{uv}{r_2}+\frac{v^2}{r_1}=$$
$$=-\frac{1}{\rho h_1}\frac{\partial p}{\partial \xi}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial \zeta}-\rho\langle u'w'\rangle\right)$$

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{v}{h_2}\frac{\partial v}{\partial \eta}+\left(w+\frac{\langle\rho'w'\rangle}{\rho}\right)\frac{\partial v}{\partial \zeta}+\frac{u^2}{r_2}-\frac{uv}{r_1}=$$
$$=-\frac{1}{\rho h_2}\frac{\partial p}{\partial \eta}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial \zeta}-\rho\langle v'w'\rangle\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho h_2 u)+\frac{\partial}{\partial \eta}(\rho h_1 v)+ \tag{4.1}$$
$$+\frac{\partial}{\partial \zeta}[h_1h_2(\rho w+\langle\rho'w'\rangle)]=0$$

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial H}{\partial \xi}+\frac{v}{h_2}\frac{\partial H}{\partial \eta}+\left(w+\frac{\langle\rho'w'\rangle}{\rho}\right)\frac{\partial H}{\partial \zeta}=$$
$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\mu\left(\frac{\partial H}{\partial \zeta}+\frac{1-\Pr}{\Pr}\frac{\partial c_pT}{\partial \zeta}\right)-\rho\langle w'H'\rangle\right]$$

Здесь u, v, w, ρ, p, T, H — осредненные величины проекций скорости, плотности, давления, температуры и полной энтальпии, штрихами обозначены соответствующие турбулентные флуктуации, тупые угловые скобки обозначают среднюю величину произведения.

Выберем снова за направление линий ξ (линий $\eta = \text{const}$) направление вектора $\operatorname{grad} p$ и будем считать, что выполнены все те предположения, которые были сформулированы в п. 1. Тогда для осредненных величин останутся справедливыми и все те оценки производных, которые делались выше. Пренебрегая в уравнениях (4.1) величинами порядка l / L по сравнению с единицей и вводя переменное ξ_1, получим

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \left(w + \frac{\langle \rho' w' \rangle}{\rho}\right)\frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi_1} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial \zeta} - \rho\langle u' w' \rangle\right) \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial \rho u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\rho w + \langle \rho' w' \rangle) = 0 \tag{4.3}$$

$$u\frac{\partial H}{\partial \xi_1} + \left(w + \frac{\langle \rho' w' \rangle}{\rho}\right)\frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\mu\left(\frac{\partial H}{\partial \zeta} + \frac{1 - \Pr}{\Pr}\frac{\partial c_p T}{\partial \zeta}\right) - \rho\langle w' H' \rangle\right] \tag{4.4}$$

$$\left(w + \frac{\langle \rho' w' \rangle}{\rho}\right)\frac{\partial v}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial \zeta} - \rho\langle v' w' \rangle\right) \tag{4.5}$$

Так как остаются справедливыми оценки величины слагаемого $v^2 / 2$ по сравнению с другими слагаемыми в H, то, сделав еще естественное предположение, что величина $\langle w' H' \rangle$ пропорциональна $\partial H / \partial \zeta$, можем считать, что в уравнении (4.4) с принятой степенью точности можно пренебречь членами, содержащими v. При этом уравнения (4.2) — (4.4) не будут содержать в явном виде ни проекций v и ее производных, ни производных по координате η от других функций, ни самой координаты η, т. е. по форме будут совпадать с уравнениями двумерного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе.

Однако здесь необходимо проявить известную осторожность, так как входящие в уравнения величины $\langle u' w' \rangle$, $\langle \rho' w' \rangle$ и т. п. в принципе могут зависеть от величины проекции v скорости на направление, перпендикулярное $\operatorname{grad} p$. По-видимому, роль этой зависимости во многих интересных случаях в зонах с большим $\operatorname{grad} p$ оказывается достаточно слабой. Можно привести некоторые соображения в пользу этого утверждения. Если оценить слой, в котором вязкие силы играют большую роль, то окажется, что в зонах, где имеется большой градиент давления (где происходит резкое изменение скорости), этот слой значительно меньше по толщине, чем вся толщина пограничного слоя. Это связано с тем обстоятельством, что в рассматриваемых областях инерционные члены в уравнениях существенно больше, чем при течении без градиента давления или с малым градиентом. Поэтому в верхней части пограничного слоя турбулентное перемешивание, в рассматриваемых зонах, играет относительно небольшую роль. В пристеночной же области роль турбулентных пульсаций уменьшается при переходе к ламинарному подслою. Таким образом, в зонах с большим градиентом давления влияние турбулентного перемешивания на характер течения в значительной по толщине части пограничного слоя невелико и возможные ошибки, связанные с неучетом влияния v на $\langle u'w'\rangle$ и т. п., не будут приводить к сколько-нибудь ощутимому изменению результатов расчета.

Из этого можно сделать вывод, что и в случае турбулентного пограничного слоя в зонах с большим градиентом давления задача об интегрировании уравнений трехмерного пограничного слоя с большой степенью точности сводится к задаче об интегрировании уравнений двумерного турбулентного пограничного слоя вдоль линий, касательных к вектору $\mathrm{grad}\, p$.

Этот вывод подтверждается также результатами экспериментов. Так, в [3] приведены экспериментальные данные по обтеканию полуконусов, установленных на плоской пластине, сверхзвуковым потоком. Исследуя зону взаимодействия ударной волны с пограничным слоем на пластине, авторы делают вывод, что «случай отрыва при обтекании круговых полуконусов с углом $\theta < 35°$, установленных на пластине, можно считать квазидвумерным, если рассматривать сечения нормальные к линии отрыва». В рассматриваемом случае направление линии отрыва совпадает с направлением ударной волны, а градиент давления направлен по нормали к ударной волне. Поэтому направление, в котором авторы считают течение квазидвумерным, и есть как раз направление линии, касательной к градиенту давления.

Необходимо отметить, что при взаимодействии сильной ударной волны с пограничным слоем может оказаться существенной проекция градиента давления на направление нормали к поверхности (на ось ζ). При этом следует использовать для расчета уравнения более общие, чем уравнения пограничного слоя (например, использовать проекцию уравнения движения на ось ζ, не пренебрегая инерционными членами). Однако и в этом случае останутся справедливыми все приведенные выше соображения и оценки, позволяющие упростить уравнения и свести задачу к интегрированию вдоль линий, касательных к градиенту давления. Это и подтверждают экспериментальные данные работы [3]. Вообще, по-видимому, при выполнении предположений, сформулированных в начале работы, соответствующие упрощения могут быть получены для общих уравнений Навье — Стокса.

Поступило 8 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
2. Cooke J. C. Three-dimensional turbulent boundary layers. Aeronaut. Res. Concil. Current Papers, 1963, No. 635. (Рус. перев.: Механика. Переод. сб. перев. иностр. статей, 1964, № 5.)
3. Авдуевский В. С., Грецов В. К. Исследование трехмерного отрывного обтекания полуконусов, установленных на плоской пластине. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.