

УДК 534.222.2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ АТМОСФЕРЕ

Х. С. КЕСТЕНБОЙМ, З. Н. КУЗИНА

(Москва)

Рассматривается плоский взрыв в среде с экспоненциальным распределением плотности. В отличие от так называемого секторного приближения [1] учитывается перетекание энергии из нижней области в верхнюю, поэтому решение рассматриваемой задачи дает более правильное качественное представление о течении газа на поздней стадии точечного взрыва в неоднородной атмосфере. Численное решение как в верхней, так и в нижней областях течения выходит на соответствующие предельные автомодельные режимы [2, 3]. Расчет проводится до «прорыва» атмосферы [4]. Метод расчета основан на неявных разностных аппроксимациях.

1. В неоднородной по вертикальному направлению x атмосфере происходит взрыв в плоскости $x = 0$ с энергией E^0 на единицу площади. В результате образуется ударная волна, распространяющаяся вверх при $x > 0$ (вниз при $x < 0$). Предполагается барометрическая зависимость атмосферных плотности ρ_0' и давления p_0' от высоты

$$\rho_0' = \rho_{00}' \exp(-x'/\Delta), \quad p_0' = p_{00}' \exp(-x'/\Delta) \quad (1.1)$$

где ρ_{00}' , p_{00}' — плотность и давление газа в точке взрыва, Δ — масштаб длины, характеризующий неоднородность атмосферы.

Газ предполагается совершенным, идеальным; теплопроводность и излучение не учитываются. В базисных переменных

$$t = \frac{t'}{(\rho_{00}' \Delta^3 / E)^{1/2}}, \quad x = \frac{x'}{\Delta}, \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho_{00}'}, \quad p = \frac{p'}{E/\Delta} \quad (1.2)$$

$$u = \frac{u'}{(E/\rho_{00}' \Delta)^{1/2}}, \quad E = \frac{E^0}{\alpha_0}, \quad \alpha_0 = \alpha_0(\gamma)$$

система уравнений газовой динамики принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + A_g = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

$$A_g = \frac{g \rho_{00}' \Delta^2}{E}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

Решение системы (1.3), (1.4) рассматривается в области, ограниченной поднимающейся и опускающейся волнами ($\varphi_- \leq x \leq \varphi_+$, $t_0 \leq t \leq T$, см. фиг. 1). Начальные условия при $t = t_0$ определяются из решения автомодельной задачи о сильном взрыве [5]. В качестве граничных условий использованы соотношения на ударной волне. При $x = \varphi_{\pm}(t)$

$$p = \frac{\exp(-x)}{4} [(\gamma + 1)u^2 + 4A_p \pm u \sqrt{(\gamma + 1)^2 u^2 + 16\gamma A_p}] \quad (1.5)$$

$$\rho = \exp(-x) \frac{(\gamma + 1)p + (\gamma - 1)A_p \exp(-x)}{(\gamma + 1)A_p \exp(-x) + (\gamma - 1)p}, \quad A_p = \frac{p_{00}' \Delta}{E} \quad (1.6)$$

$$\dot{\phi} = \pm \left[\frac{(\gamma + 1)p + (\gamma - 1)A_p \exp(-x)}{2 \exp(-x)} \right]^{1/2} \quad (1.7)$$

В формулах следует брать знак плюс (минус) для поднимающейся (опускающейся) ударной волны. Величины A_g и A_p — параметры задачи, выражающие влияние силы тяжести и противодействия.

2. Краевая задача, сформулированная выше, решается численно с помощью неявной разностной методики. Так же, как и в работе [9], окрестность лагранжевой точки взрыва, где из-за большой скорости звука разностный счет затруднителен, окружается центральной областью G_0 с границами $x = f_+(t)$ и $x = f_-(t)$. В области G_0 давление p_0 считается функцией одного времени t , а скорость предполагается линейно изменяющейся по x от значения u_{-1} на левой границе до значения u_{+1} на правой границе центральной области. Границы центральной области, введенной условно, задаются некоторым простым способом, при этом размеры G_0 определяются следующим условием: численное решение в G_+ и G_- должно хорошо сшиваться с асимптотикой решения в G_0 . Каждый из отрезков $[f_+, \phi_+]$ и $[f_-, \phi_-]$ переводится в отрезок $[0, 1]$ с помощью преобразования

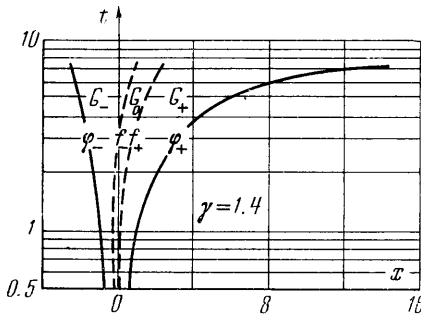
$$\mu = \left[k \frac{x-f}{\phi-f} + \left(\frac{x-f}{\phi-f} \right)^a \right] (k+1)^{-1} \quad (2.1)$$

где a, k — параметры преобразования.

В плоскости переменных μ, t вводится сетка

$$\mu_m = (m-1)h, \quad m = 1, \dots, M, \\ t^n = t^0 + n\tau, \quad n = 0, 1, \dots$$

где h, τ — пространственный и временной шаг сетки. Система уравнений (1.3), (1.4), преобразованная к новым переменным,



Фиг. 1

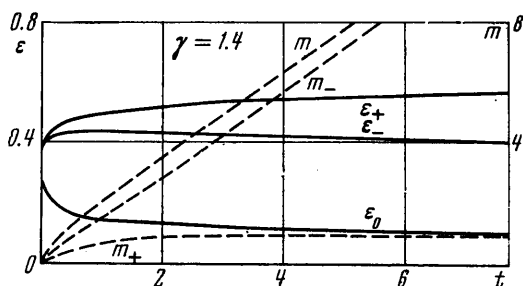
аппроксимируется разностями с помощью схемы «прямоугольник» с весами по времени. Задавая соответственно параметры a, k в каждой из двух расчетных областей, можно выбрать сетку, хорошо учитывающую структуру решения.

Система разностных уравнений на верхнем временном слое расщепляется на пару уравнений для u, p и одно уравнение для ρ и решается методом прогонки. С помощью прогнанных соотношений краевые условия (1.5) переносятся на границу G_0 , где к ним присоединяются локальный баланс энергии, записанный для G_0 , и условие равенства давления на границах центральной области. После определения из получившейся системы соотношений величин $u_{\pm 1}, p_{\pm 1}$ при $x = f_{\pm}(t)$ производится обратная прогонка для уравнений (1.3), позволяющая вычислить значения функций u, p во всех узлах сетки в G_+ и G_- вплоть до границ $x = \phi_{\pm}(t)$. Для определения функции ρ совершаются односторонние прогонки для разностного аналога уравнения (1.4) с краевыми условиями (1.6) в разных областях в направлении к границам G_0 .

На поздней стадии движения в области G_+ в системе координат, связанной с волной, у характеристик первого семейства появляются две точки поворота (см. п. 3). В связи с этим для сохранения устойчивого счета алгоритм прогонок в G_+ модифицируется. Аналогичные вопросы подробно рассматривались в работах [7, 8].

3. По изложенной выше методике проведены расчеты плоского взрыва при $A_g = A_p = 0$. Отметим некоторые особенности движения. Влияние неоднородности становится заметным при уходе фронта на расстояние порядка масштаба неоднородности Δ от точки взрыва. Хотя в это время отступления от симметрии в расположении верхнего и нижнего фронтов невелики, а распределения ρ и p вдоль верхнего и нижнего лучей качественно схожи, отличия в самих величинах уже существенны: так, при $t = 0.984 \phi_+ = 1.188$, $\phi_- = 0.861$, а отношения величин на фронте ρ_{-M} / ρ_{+M} , p_{-M} / p_{+M} соответственно равны 2, 7.5. В дальнейшем влияние неоднородности усиливается. Начинает всплывать вверх центральная область (фиг. 1). Перераспределяется энергия и масса газа между верхней и нижней областями.

На фиг. 2 приведены данные, характеризующие доли полной энергии ε_- , ε_0 , ε_+ , заключенные соответственно в областях G_- , G_0 , G_+ (сплошные кривые). Видно, что происходит перетекание энергии из G_- в G_+ при некотором уменьшении энергии в G_0 , составляющей всего 0.1 общей энергии возмущенного газа (кинетическая энергия, содержащаяся в G_0 , составляет доли процента). Пунктиром отмечен рост полной массы m газа, захваченного возмущенной областью, и изменение долей массы m_- , m_+ со временем соответственно в областях G_- , G_+ . Масса, заключенная в G_0 , пренебрежимо мала. Масса m_+ , захваченная верхней областью, практически



Фиг. 2

не увеличивается, несмотря на значительное увеличение размеров G_+ . Связанное с увеличением объема возмущенной области падение давления за верхним фронтом начинается с некоторого момента времени отставать от экспоненциального падения плотности. В результате поднимающаяся волна, достигнув минимального значения своей скорости $\phi = 0.96$ при $t = 1.25$, $\phi = 1.5$, начинает ускоряться. Распространяющаяся к центру волна разрежения приводит к перестройке решения; в окрестности верхнего фронта возникают отрицательные градиенты плотности и давления (фиг. 3). В связи с все усиливающимся разгоном фронт и прилегающий к нему слой газа как бы вырывается из сферы влияния периферии, и возмущения, идущие из центра области к фронту по характеристикам первого семейства, не могут его настигнуть. Это проявляется в том, что в окрестности верхнего фронта в плоскости переменных μ , t образуется точка поворота характеристик первого семейства типа локальной волны разрежения. Ниже этой точки поворота возникает зона, в которой все характеристики направлены от фронта к центру. (Указанная зона ограничивается вблизи границы $f_+(t)$ второй точкой поворота характеристик первого семейства типа локальной волны сжатия.)

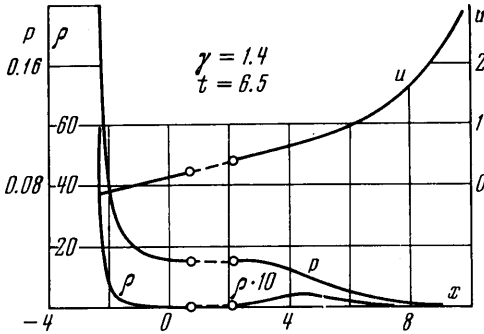
Движение в примыкающей к верхнему фронту области приобретает черты, характерные для предельного автомодельного режима [2]. В автомодельном решении [2] в безразмерных переменных координата и скорость фронта зависят от времени следующим образом:

$$\eta = A(t_n - t)^\alpha, \quad \dot{\phi} = \frac{\alpha}{t_n - t}, \quad \eta = \int_{\phi}^{\infty} \exp(-x) dx \quad (3.1)$$

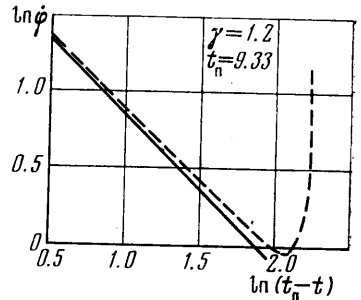
где η — лагранжева координата фронта, t_n — время прорыва, α — показатель автомодельности, A — некоторая постоянная асимптотики. Из спивки приведенного выше автомодельного решения с численным расчетом определяется время прорыва $t_n = 9.33$ ($\gamma = 1.2$) и величина $A = 0.32 \cdot 10^{-6}$. На фиг. 4 сравнивается закон изменения скорости верхнего фронта, полученный в расчете (пунктир), с результатом работы [2] (сплошная прямая). На фиг. 5 на автомодельные распределения функций $u^* = u/u_M$, $p^* = \lg(p/p_M)$, $\rho^* = \lg(\rho/\rho_M)$ за фронтом (сплошные кривые) по пе-

ременной $\xi = \varphi_+ - x$ нанесены результаты численного расчета. К моменту $t = 6.5$ неплохое совпадение с асимптотикой [2] наблюдается приблизительно в $1/6$ части области G_+ ; так, при $\xi = 1.5$ погрешность в плотности составляет $\sim 10\%$.

Рассматривая движение газа за опускающейся в более плотные слои атмосферы ударной волной, отметим большие градиенты в профилях ρ и

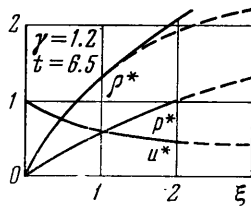


Фиг. 3

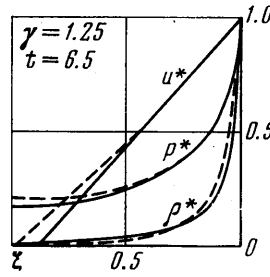


Фиг. 4

ρ в окрестности фронта и линейность в распределении скорости (Фиг. 3). Поднимающаяся ударная волна вторгается в сильно разреженную среду и плотность газа в области G_+ падает. Это приводит к тому, что не вся масса газа, содержащаяся в G_- , увлекается опускающейся ударной волной, а часть ее начинает двигаться вверх, вынося при этом из G_- энергию



Фиг. 5



Фиг. 6

(Фиг. 2, 3). Так для течения за опускающейся ударной волной создаются условия, характерные для ситуации кратковременного удара, что обеспечивает выход численного решения на предельный автомодельный режим [2]. На Фиг. 6 построены для $\gamma = 1.25$ автомодельные профили

$$p^* = p / p_M, \quad \rho^* = \rho / \rho_M, \quad u^* = u / u_M$$

(сплошные кривые) и соответствующие функции, полученные из численного расчета в момент $t = 6.5$ (пунктир), в зависимости от автомодельной переменной $\xi = \varphi_- - x$. Отмечается удовлетворительное совпадение расчета с асимптотическим решением в зоне за распространяющейся вниз ударной волной, составляющей $1/6$ часть области G_- ; например, погрешность в давлении при $\xi = 0.5$ составляет 7% .

Автомодельный закон изменения координаты нижнего фронта аналогичен (3.1)

$$\eta = Bt^{\beta} \quad (3.2)$$

Постоянная B также определяется из сшивки численного решения с асимптотикой (3.2) и для $\gamma = 1.25$ $B = 0.54$.

Точность расчетов контролируется по балансам массы и энергии (см. фиг. 2). Максимальные ошибки по массе составляют 3%, по энергии — 2%. Следует заметить, что при приближении к времени прорыва вычислительные погрешности растут вследствие того, что в преобразованных уравнениях движения при производных по времени имеется малый множитель $1/\varphi$.

4. Для сопоставления с полученными выше результатами был произведен расчет плоского взрыва в экспоненциальной среде в секторном приближении (без учета взаимодействия верхнего и нижнего поля течения). При этом оказалось, что численное решение по-прежнему выходит на асимптотику [2] в верхней области, но не выходит на автоматическое решение [3] в нижней области. Так, например, отношение давления в G_0 к давлению на фронте опускающейся ударной волны здесь стремится к постоянной величине ($p_0/p_m \rightarrow 0.334$ для $\gamma = 1.25$), тогда как в модели с перетеканием энергии аналогичное отношение приближается к нулю. Расчет взрыва по секторному приближению выполнен при помощи описанного в [9] явного разностного метода.

Авторы искренне признательны Л. А. Чудову за постоянное внимание к работе и полезные советы и благодарят Э. И. Андрианкина за содержательное обсуждение статьи.

Поступило 6 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Laumbach D. D., Probstein R. F. A point explosion in a cold exponential atmosphere. *J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 35, pt 1. (Рус. перев.: *Механика*. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1969, № 3.)
2. Райзер Ю. П. Распространение ударной волны в неоднородной атмосфере в сторону уменьшения плотности. *ПМТФ*, 1964, № 4.
3. Райзер Ю. П. Движение в неоднородной атмосфере, вызванное кратковременным плоским ударом. *Докл. АН СССР*, 1963, т. 153, № 3.
4. Компанеев А. С. Точечный взрыв в неоднородной атмосфере. *Докл. АН СССР*, 1960, т. 130, № 5.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, Изд. 6. М., «Наука», 1967.
6. Кестенбойм Х. С., Турецкая Ф. Д., Чудов Л. А. Точечный взрыв в неоднородной атмосфере. *ПМТФ*, 1969, № 5.
7. Ландау Л. Д., Мейман Н. Н., Халатников И. М. Численные методы интегрирования уравнения в частных производных методом сеток. *Тр. III Всес. матем. съезда*, М., 1956, М., Изд-во АН СССР, 1958, т. 3.
8. Бабенко К. И., Иванова В. И., Казанджан Э. П., Кукаркина М. А., Радвогин Ю. Б. Нестационарное обтекание головной части затупленного тела идеальным газом. М., *Ин-т прикл. матем.*, 1969.
9. Кестенбойм Х. С. Расчет точечного взрыва с противодействием по явной разностной схеме. В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 15, М., Изд-во МГУ, 1970.