

**К РАСЧЕТУ КОАГУЛЯЦИИ ЧАСТИЦ КОНДЕНСАТА  
В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ**

А. П. ТИШИН, Р. И. ХАЙРУТДИНОВ  
(Москва)

Приводятся методика расчета процесса коагуляции частиц вследствие различного скоростного запаздывания в сопле и результаты вычислений, выполненных с использованием методов Эйлера и Лагранжа. Оба метода обеспечивают хорошую точность при численном счете изменения дисперсности частиц в сопле.

Процесс столкновения и слияния капель конденсата вследствие различного скоростного запаздывания частиц различных размеров при неравновесном течении двухфазного потока в соплах рассматривается в работах [1-5].

Для описания изменения дисперсности системы частиц возможны два подхода — метод Эйлера и метод Лагранжа [6]. В методе Эйлера предполагается скачкообразный рост частиц при столкновении и слиянии двух капель. При этом для частиц фиксированных фракций с массой  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) определяется уменьшение количества этих частиц в единице объема  $n(m_i)$  за счет ухода их при слиянии с каплями других фракций и увеличение  $n(m_i)$  вследствие образования частиц  $m_i$  при слиянии капель фракций  $m$  и  $(m_i - m)$ , где  $m < m_i$ . Такая модель расчета процесса коагуляции частиц в сопле использовалась в работах [2-5]. В наиболее полной постановке неравновесное течение в сопле с учетом соударений, слияния, обмена энергией и количеством движения между частицами рассмотрено в работе [3].

При использовании метода Лагранжа для фиксированных  $i$ -частиц рассматривается непрерывное увеличение массы  $m_i$  за счет слияния с более мелкими  $j$ -ми каплями ( $j = 1, \dots, i-1$ ) и уменьшение количества частиц в единице объема  $n_i$  за счет поглощения их более крупными частицами ( $j = i+1, \dots, n$ ). Такой подход рассмотрен в работе [4]. Ниже приводится методика расчета процесса коагуляции частиц в сопле методом Лагранжа и анализируются результаты вычислений на ЭВМ, выполненных с использованием обоих рассмотренных методов.

1. Применим метод Лагранжа к системе с дискретным распределением частиц конденсата по размерам, которое будем характеризовать величинами  $g_i = z_i/z$ , причем  $\sum g_i = 1$ . Здесь  $z$ ,  $z_i$  — весовые доли всей конденсированной фазы и  $i$ -х частиц. Значение  $g_i$  может быть определено из соотношения

$$g_i = \frac{1-z}{z} \frac{\rho_i W_i}{\rho W} \tag{1.1}$$

где  $W_i$ ,  $\rho_i = m_i n_i$  — скорость и плотность  $i$ -х частиц,  $W$ ,  $\rho$  — скорость и плотность газа.

В предположении о прямолинейности движения частиц при сближении и их слиянии при каждом соприкосновении увеличение массы  $i$ -х частиц за счет поглощения ими более мелких капель определяется в виде

$$\frac{dm_i}{dt} = \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} n_j m_j \quad (i = 1, \dots, n) \tag{1.2}$$

Уменьшение количества  $i$ -х частиц за счет слияния их с более крупными частицами описывается уравнением

$$\frac{dn_i}{dt} = -n_i \sum_{j=i+1}^n k_{ij} n_j \quad (i = 1, \dots, n) \tag{1.3}$$

Здесь и ниже знак частной производной условно означает изменение параметров частиц только вследствие их слияния. В приведенных выражениях

$$k_{ij} = 1/4\pi (d_i + d_j)^2 |W_j - W_i|$$

Здесь  $k_{ij}$  — коэффициенты коагуляции,  $d_i$ ,  $d_j$  — диаметры частиц. Учитывая, что значение  $g_i$  изменяется только за счет изменения массы и количества частиц при коагуляции, из соотношения (1.1) можно получить

$$\frac{dg_i}{dx} = \frac{3(1-z)\rho_i}{2\rho_k z \rho W} \left( \frac{1}{d_i^3} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{d_j^3} \right) \quad (i = 1, \dots, n) \tag{1.4}$$

где

$$a_{ij} = (d_i + d_j)^2 |W_j - W_i| \rho_k$$

а  $\rho_k$  — плотность конденсированного вещества,  $x$  — координата вдоль оси сопла. Изменение диаметра  $i$ -х частиц определяется из выражения (1.2) как

$$\frac{dd_i}{dx} = \frac{1}{2\rho_k W_i d_i^2} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.5)$$

Слияние крупных капель с мелкими, которые имеют более высокую скорость и меньшую температуру, приводит к увеличению их скорости и уменьшению температуры. Эти изменения не должны нарушать условия сохранения количества движения и энергии всей системы частиц. Для выполнения этих условий необходимо соответствующим образом изменить параметры  $W_i$  и  $T_i$ . Окончательные выражения для определения изменения скорости и температуры  $i$ -х частиц за счет слияния капель, полученные аналогично работе [3], имеют следующий вид:

$$\frac{\partial W_i}{\partial x} = \frac{3}{2\rho_k d_i^3 W_i} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} (W_j - W_i) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial x} = \frac{1}{c_k} \left[ \frac{3}{2\rho_k d_i^3 W_i} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} (E_j - E_i) - W_i \frac{\partial W_i}{\partial x} \right] \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.7)$$

$$E_i = c_k T_i + \frac{1}{2} W_i^2$$

где  $E_i$  — энергия единицы массы  $i$ -х частиц,  $c_k$  — теплоемкость конденсированного вещества. Если прибавить к правым частям уравнений, описывающих изменение скорости и температуры частиц при разгоне в сопле [3], соотношения (1.6) и (1.7) и присоединить зависимости (1.4) и (1.5), то получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую неравновесное двухфазное течение с учетом процесса коагуляции частиц в сопле. Решение этой системы сводится к решению задачи Коши.

Таблица 1

$d_0$ , мм		$n$	$d_{0i}$ , мкм	$\Delta I_0$ , %	$d_*$ , мм		$n$	$d_{0i}$ , мкм	$\Delta I_0$ , %
20	I	20	4.95	4.5	500	I	20	32.4	3.0
		20	4.85	4.5			20	28.0	2.8
	II	15	4.85	4.6		15	26.0	2.75	
		10	4.8	4.4		10	21.0	2.6	
		5	4.8	4.5		5	29.0	2.65	
100	I	20	10.1	3.2	1000	I	20	54	3.1
		20	10.9	3.3			20	47	2.8
	II	15	10.6	3.3		10	35	2.6	
		10	10.1	3.2		5	33.7	2.65	
		5	9.9	3.1					

2. В рассматриваемой задаче с точки зрения физики процесса казалось бы, что более оправдано использование метода Эйлера, так как возможны столкновения между каплями близких размеров, когда нельзя рассматривать изменение диаметра частицы как непрерывный процесс. Но при этом возможны погрешности при описании коагуляции частиц в случае высокой концентрации конденсата, когда не выполняется условие протекания только двойных соударений.

Метод Лагранжа свободен от этого ограничения, но может давать погрешности при описании роста частиц вследствие слияния капель близких размеров. Рост частиц в сопле происходит в основном за счет слияния частиц сильно отличающихся размеров, так как капли близких размеров имеют малые скорости относительного

движения. Поэтому в рассматриваемой задаче более естественно применение метода Лагранжа, преимущество которого состоит в том, что нет необходимости рассматривать или делать дополнительные предположения о распределении частиц внутри фракции по скоростям и температурам, как это имеет место при использовании метода Эйлера [3].

В методе Лагранжа из условия равновероятности столкновений каждой из  $i$ -х частиц со всеми более мелкими каплями следует, что в результате слияний все  $i$ -е

Таблица 2

$p_0$ , бар		$n$	$d_{40}$ , мкм	$\Delta I_s$ , мкм	$p_0$ , бар		$n$	$d_{40}$ , мкм	$\Delta I_s$ , мкм
10	I	20	3.65	1.9	60	I	20	15.0	3.8
	II	20	3.6	1.9		20	14.0	3.7	
		10	3.5	1.9		10	13.5	3.7	
20	I	20	5.8	2.3	80	I	20	18.7	4.1
	II	20	5.8	2.3		20	17.3	4.0	
		10	5.7	2.3		10	17.0	4.0	
40	I	20	10.1	3.2	100	I	20	21.0	4.15
	II	20	10.9	3.3		20	20.0	4.10	
		10	10.1	3.2		10	18.6	4.0	

частицы будут иметь одинаковые размеры  $d_i$ , а также одинаковые скорости  $W_i$  и температуры  $T_i$ , т. е. функция распределения остается одномерной, если она первоначально имела такой вид.

Кроме того, расчет роста частиц методом Эйлера связан с определением интерполяцией параметров капель промежуточных размеров ( $m_i - m$ ) и численным интегрированием значений определенных интегралов, что может привести к значительным погрешностям численного счета. Поэтому для обеспечения необходимой точности число фракций  $n$  должно быть большим [3]. Использование метода Лагранжа для случая дискретного распределения конденсата по размерам позволяет освободиться от этих численных операций и тем самым уменьшить количество рассматриваемых фракций частиц.

Представляет интерес сопоставить результаты расчетов неравновесного двухфазного течения в сопле с учетом коагуляции частиц по двум методикам: изложенной выше и в [3]. При вычислениях параметры неравновесного двухфазного потока определялись по методу [3], расчеты выполнялись при условии максимального роста частиц, когда все встречи капель приводят к их слиянию и отсутствует дробление капель обтекающим газовым потоком.

Рассматривалось неравновесное течение в коническом сопле с полууглами на входе  $45^\circ$ , на выходе  $15^\circ$ , с относительной площадью на срезе 6.25 и горловиной, очерченной радиусом, равным диаметру критического сечения сопла. Расчеты проводились для широкого диапазона значений  $d_*$  (20—1000 мкм) при  $z = 0.325$  и  $p_0 = 40$  бар (табл. 1), начального давления  $p_0$  (10—100 бар) при  $d_* = 100$  мкм,  $z = 0.325$  (табл. 2) и весовой доли конденсата в продуктах сгорания типичного твердого алюминизированного топлива  $z$  (0.13—0.325) при  $d_* = 100$  мкм,  $p_0 = 40$  бар (табл. 3). Результаты расчета по методу Эйлера обозначены в табл. 1—3 символом I, по методу Лагранжа — символом II. Были выполнены также расчеты для случая  $z = 0.86$ ,  $p = 150$  бар,  $d_* = 65$  мкм. Во всех случаях

Таблица 3

$z$		$n$	$d_{40}$ , мкм	$\Delta I_s$ , %
0.13	I	20	4.35	0.6
	II	20	4.25	0.6
		10	4.0	0.6
0.19	I	20	5.9	1.1
	II	20	5.7	1.1
		10	5.6	1.1
0.26	I	20	8.5	2.2
	II	20	8.1	2.0
		10	8.0	2.0
0.325	I	20	10.1	3.2
	II	20	10.9	3.3
		10	10.1	3.2
0.86	I	20	86	30.5
	II	20	95	30.8
		10	96	30.6

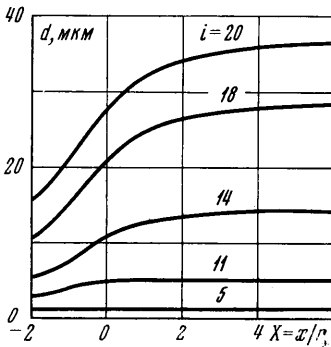
принималось, что на входе в сопло частицы распределены по размерам в соответствии с логарифмически-нормальным законом [7] с параметрами  $\sigma = 1.5$  и  $d_p = 1.1$  мкм. При этом средний диаметр

$$d_{i3} = \left( \sum_{i=1}^n d_i^4 n_i \right) \left( \sum_{i=1}^n d_i^3 n_i \right)^{-1} = \sum_{i=1}^n d_i g_i$$

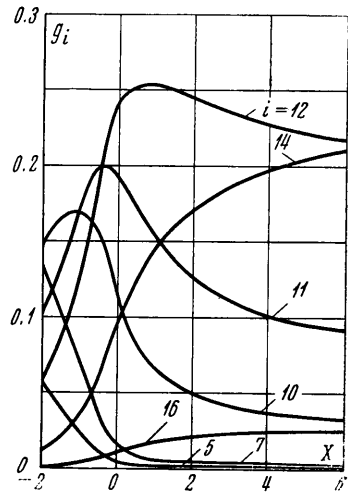
характеризующий величину потерь  $-\Delta I_s$  удельного импульса вследствие скоростного и температурного запаздывания частиц конденсата при разгоне в сопле, равен 2 мкм.

Результаты вычислений на ЭВМ приведены в табл. 1—3 в виде значений среднего диаметра полидисперсного конденсата на срезе сопла  $d_{i3}$  и потерь удельного импульса  $\Delta I_s$ . Результаты расчетов практически полностью совпадают, что свидетельствует о хорошей точности, которую обеспечивают численные расчеты по обоим методам. Результаты вычислений с  $n = 5, 10, 15, 20$  показывают, что при использовании метода Лагранжа можно уменьшить количество рассматриваемых фракций частиц до 5. Это позволяет существенно сократить время счета.

На фиг. 1, 2 показано изменение вдоль сопла размеров и весовой доли частиц различных фракций, вызванное коагуляцией. Из фиг. 1 видно, что для мелких капель увеличение диаметров незначительно, а частицы с начальным размером  $d = 15$  мкм ( $i = 20$ ) вырастают более чем вдвое — до 37 мкм. Изменение весовой доли капель более сложно (фиг. 2): для мелких капель она уменьшается вследствие поглощения их более крупными частицами, а для крупных капель ( $i \geq 14$ ) возрастает. Весовая доля частиц промежуточных размеров сначала возрастает,



Фиг. 1



Фиг. 2

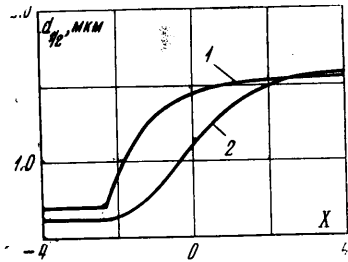
а затем по мере исчезновения мелких капель начинает уменьшаться, так как уменьшение числа частиц этих фракций начинает преобладать над ростом их размеров.

Вывод работы [1] о том, что рост частиц конденсата в двигателях на твердом топливе незначителен и не зависит от размеров сопла, принципиально отличается от результатов исследований [3—5]. Поэтому были проведены расчеты по обоим методам с начальными данными, взятыми из работы [1]. Результаты вычислений даны в табл. 4, где приведены значения  $d_{i/2}$  на срезе сопла. Из расчетных данных следует,

Таблица 4

Условия расчета		$d_{i/2}$ , мм				
		6	12	25	75	200
Работа [1]	$n = 11$	1.48	1.6	1.88	2.1	2.2
Метод Эйлера	$n = 20$	1.3	1.65	2.2	3.6	5.9
Метод Лагранжа	$n = 20$	1.3	1.6	2.0	3.4	5.6
	$n = 10$	1.3	1.57	2.0	3.2	5.0

что размеры частиц в сопле существенно зависят от габаритов двигателя. На фиг. 3 представлены расчетные данные о росте частиц вдоль сопла с критическим диаметром 12 мм, взятые из [1] (кривая 1) и полученные в этой работе (кривая 2). Скорость коагуляции частиц незначительна на начальном участке сопла, далее увеличивается, достигая максимального значения в области горловины, а затем уменьшается. Это объясняется тем, что на входе в сопло скорость потока мала и запаздывание конденсата практически отсутствует. При дальнейшем разгоне двухфазной смеси скоростное отставание частиц увеличивается и достигает наибольшего значения в области горла сопла. В сверхзвуковой части коагуляции частиц уменьшается за счет снижения концентрации конденсата. Согласно результатам расчета, приведенным в работе [1], рост частиц происходит только в дозвуковой части сопла, причем максимальная скорость коагуляции частиц наблюдается на входе в сопло.



Фиг. 3

Поступило 28 V 1970

## ЛИТЕРАТУРА

1. Growe C. T., Willoughby P. G. A study of particle growth in a rocket nozzle. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 7. (Рус. перев.: Исследование роста частиц в сопле ракетного двигателя. Ракетная техника и космонавтика, 1967, № 7.)
2. Marble F. E. Droplet agglomeration in rocket nozzles caused by particle slip and collision. Astronaut. Acta, 1967, vol. 13, No. 2.
3. Гришин С. Д., Тишин А. П., Хайрутдинов Р. И. Неравновесное двухфазное течение в сопле Лавала с коагуляцией частиц полидисперсного конденсата. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
4. Kuentzmann P. Agglomération des particules d'alumine dans l'écoulement de tuyere d'un propergol métallisé. Rech. Aérospat., 1969, No. 131.
5. Jenkins R. M., Hoglund R. F. A unified theory of particle growth in rocket chambers and nozzles. AIAA paper, 1969, No. 69-541. (Рус. перев.: Обобщенная теория роста частиц в камере сгорания и сопле ракетного двигателя. Вопр. ракетн. техн., 1970, № 2.)
6. Беляев В. И. Метод Лагранжа в кинетике облачных процессов. Л., Гидрометеоиздат, 1964.
7. Фукс Н. А. Механика аэрозолей. М., Изд-во АН СССР, 1955.

УДК 532.546

О ПРОДВИЖЕНИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ  
ПРИ НАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

О. В. ГОЛУБЕВА, Н. П. ПЕТРОВ

(Москва)

В статье продолжены исследования ряда авторов [1-3] о продвижении границы раздела различных жидкостей: дано решение задачи в случае одномерной фильтрации жидкостей различной вязкости в искривленных слоях переменной проницаемости, указаны метод определения границы раздела «разноцветных» жидкостей и его обобщение для случая серии двумерных течений, связанных конформным преобразованием. Рассматриваемые задачи сведены к обращению функций, определяющих течение, и вычислению интегралов.

Пусть напорная фильтрация несжимаемых жидкостей различной вязкости  $\mu_1, \mu_2$  в пространстве, ограниченном скважиной (галереей)  $L_c$  и областью питания  $L_n$ , подчиняется линейному закону. Уравнения фильтрации запишем в виде

$$V_n = -\frac{k}{\mu_n} \text{grad} (P_n + \gamma_n z) = -\frac{k}{\mu_n} \text{grad} P_n \quad (0.1)$$

$(n = 1, 2)$

$$\text{div} V_n = \text{div} \left( \frac{k}{\mu_n} \text{grad} P_n \right) = 0 \quad (0.2)$$