

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ СЛОЯХ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

А. Г. КИРДЯШКИН, А. И. ЛЕОНТЬЕВ, Н. В. МУХИНА

(Новосибирск, Москва)

Представлены результаты экспериментальных и теоретических исследований устойчивости ламинарного течения жидкости в вертикальном слое. Экспериментальные исследования качественно подтверждают теоретические решения и указывают на существование различного вида неустойчивости.

Исследованию устойчивости ламинарного свободно-конвективного течения жидкости в замкнутых объемах посвящено большое число работ [1-6].

В работах [1-3] представлены исследования устойчивости режима теплопроводности в вертикальных слоях жидкости, закрытых по торцам.

В работах [4-6] представлены спектры декрементов нормальных возмущений при малых значениях G , а также границы [6] устойчивости режима теплопроводности при различной ориентации щели.

В работе [7] представлена карта возможных режимов течения на основании имеющихся экспериментальных данных и результатов численного решения.

В настоящее время известно [8-10], что переход от режима теплопроводности к новому режиму (режиму, когда $\eta = \text{const}$) не означает потерю устойчивости ламинарного течения. При конечных размерах высоты слоя по мере увеличения числа G наблюдается непрерывное изменение профилей скорости и температуры, которые при определенных условиях (h, G, P) теряют устойчивость в гидродинамическом смысле.

Теоретическое исследование устойчивости ламинарного течения жидкости в вертикальном слое, когда $\eta = \text{const}$, впервые было представлено в работе [11].

В работе [12] при исследовании устойчивости течения относительно стационарных возмущений ($\omega = 0$) в режиме $\eta = \text{const}$ в уравнении температурных возмущений опущен член $\varphi' \partial \theta_0 / \partial z$. Влияние последнего учитывается лишь через профили скорости и температуры.

Цель данной работы — экспериментальное и теоретическое исследование устойчивости ламинарного течения относительно различных видов возмущений при $h \gg 1$ и $\eta \neq 0$.

Из условия симметрии в центре слоя $v_{h/2, x=0.5} = 0$. В этом случае система уравнений имеет вид [8, 10].

$$R\theta = B \frac{dp}{dz} - P^{1/2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad P^{1/2} w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

В качестве единицы длины, температуры, давления, скорости приняты величины $l, \Delta t, \rho_0, gl, (av)^{1/2} / l, B = gl^3 / av$.

Из уравнений (1) следует, что $\eta = \text{const}$ и

$$(D^4 + 4m^4)w = 0 \quad (D = \partial / \partial x, \quad 4m^4 = \eta R) \quad (2)$$

$$w = 0 \quad \text{при } x = 0, 0.5, 1.0; \quad \theta = 1 \quad \text{при } x = 0; \quad \theta = 0 \quad \text{при } x = 1 \quad (3)$$

При $x = 0.5$ имеем $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ и из первого уравнения (1) получим

$$B \partial p / \partial z = R \theta_{x=0.5} \quad (4)$$

Тогда при $x = 0$ и $z = 1/2 h$, используя приближение теории пограничного слоя, из уравнений (1) и (4) следует:

$$(\partial^2 w / \partial x^2) = -1/2 R \quad (x = 0, z = 1/2 h) \quad (5)$$

Решение уравнения (2) при граничных условиях (3) и (5) имеет вид [15]

$$w = - \frac{R}{4P^{1/2} m^2 (f_2 - 1)} [f_1 \cos mx \operatorname{sh} mx + f_2 e^{mx} \sin mx + e^{-mx} \sin mx] \quad (6)$$

$$f_1 = - \frac{f_2 e^{1/2 m} \sin 1/2 m + e^{-1/2 m} \sin 1/2 m}{\cos 1/2 m \operatorname{sh} 1/2 m} \quad (7)$$

$$f_2 = \frac{e^{-1/2 m} \sin 1/2 m \cos m \operatorname{sh} m - e^{-m} \sin m \cos 1/2 m \operatorname{sh} 1/2 m}{e^m \sin m \cos 1/2 m \operatorname{sh} 1/2 m - e^{1/2 m} \sin 1/2 m \cos m \operatorname{sh} m} \quad (8)$$

Из второго уравнения (1) для $z = 0.5h$ имеем

$$\theta_0 = \theta_{x=0.5} - \frac{1}{2(f_2 - 1)} [f_1 \sin mx \operatorname{ch} mx - f_2 e^{mx} \cos mx + e^{-mx} \cos mx] \quad (9)$$

Задача состоит в нахождении условий (h, R, P), при которых стационарные течения (6)–(9) теряют свою устойчивость.

Наложим на основное течение (6)–(9) малые возмущения w', v', p', θ' . Введем функцию тока

$$w' = -\partial\Psi / \partial x, \quad v' = \partial\Psi / \partial z$$

и будем рассматривать периодические по z возмущения

$$\Psi = \varphi(x) e^{i(kz + \omega t)}, \quad \theta' = \theta(x) e^{i(kz + \omega t)} \quad (10)$$

В этом случае имеем следующую систему линейных уравнений для амплитуд возмущений φ и θ :

$$P\varphi^{IV} - (i\omega + ikw + 2k^2P^{1/2})\varphi'' + (ik^2\omega + ik^3w + ikw'' + P^{1/2}k^4)\varphi - R\theta' = 0 \quad (11)$$

$$-P^{1/2}\theta'' + \theta \left(i\omega + ikw + \frac{k^2}{P^{1/2}} \right) + ik\varphi \frac{\partial\theta_0}{\partial x} - \varphi' \frac{\partial\theta_0}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

с граничными условиями

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0, \quad \theta(0) = \theta(1) = 0 \quad (13)$$

Здесь k — волновое число, ω — в общем случае комплексная частота.

Для нахождения критических значений числа Рэлея R_* воспользуемся методом Бубнова — Галеркина [1, 11, 13]. Будем приближенное решение искать в виде

$$\varphi = a_1(1 - \cos 2\pi x) + a_2(1 - \cos 4\pi x), \quad \theta = b_1 \sin \pi x + b_2 \sin 2\pi x \quad (14)$$

Вместо тождественного удовлетворения равенств (11), (12) добиваемся ортогональности левой части уравнения (11) функциям $(1 - \cos 2\pi x)$, $(1 - \cos 4\pi x)$ и левой части уравнения (12) — функциям $\sin \pi x$, $\sin 2\pi x$.

В этом случае имеем систему из четырех алгебраических уравнений. Она имеет нетривиальное решение в том случае, когда определитель этой системы для коэффициентов a_n и b_n равен нулю. При $\omega = 0$ имеем

$$\begin{vmatrix} A_{11} & P^{1/2}k^4 & 0 & \pi R \\ k^4 P^{1/2} & A_{22} & 0 & 0 \\ kA_{31} & kA_{32} & A_{33} & kA_{34} \\ -\eta\pi & 0 & -kA_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

$$A_{11} = P^{1/2}(8\pi^4 + 4\pi^2k^2 + 1.5k^4)$$

$$A_{22} = P^{1/2}(128\pi^4 + 16\pi^2k^2 + 1.5k^4)$$

$$A_{33} = (\pi^2 + k^2) / 2P^{1/2}, \quad A_{44} = (2\pi^2 + 0.5k^2) / P^{1/2}$$

$$A_{34} = A_{43} + \int_0^1 w \sin \pi x \sin 2\pi x \, dx$$

$$A_{31} = \int_0^1 \frac{\partial\theta_0}{\partial x} (1 - \cos 2\pi x) \sin \pi x \, dx$$

$$A_{32} = \int_0^1 \frac{\partial\theta_0}{\partial x} (1 - \cos 4\pi x) \sin \pi x \, dx$$

Здесь w и θ_0 представлены соотношения (6) — (9). Для случая $\omega = 0$ (стационарные возмущения) из определителя (15) получаем уравнение нейтральных кривых в виде

$$R^2 = \frac{A_{33}'A_{44}'(A_{11}'A_{22}' - k^8) + 4\pi^2 m^4 A_{22}'A_{33}'}{k^2 \pi A_{22}'A_{31}A_{34}' - k^2 A_{34}'^2 (A_{11}'A_{22}' - k^8) - k^6 \pi A_{32}A_{34}'} \quad (16)$$

где

$$A_{11}' = A_{11} / P^{1/2}, \quad A_{22}' = A_{22} / P^{1/2}, \quad A_{33}' = A_{33} P^{1/2}, \quad A_{34}' = A_{34} P^{1/2} / R$$

Из соотношения (16) следует, что возникновение ячеистых течений в слое не зависит от числа P .

Высоту слоя жидкости, соответствующую критическим значениям числа Рэлея (R_*) и параметру m , определяем из зависимости $\eta h = f(R)$.

Согласно работам [10, 15] для жидкости с $P \geq 14$ режим $\eta \neq 0$ имеет место при $R > 1.3 \cdot 10^4 - 1.5 \cdot 10^4$.

Величина ηh быстро достигает своего асимптотического значения и последнее слабо зависит от числа P .

Асимптотическое значение ηh для силиконового масла 0.55 [9] и для воздуха 0.6 [10].

Таким образом, для значений m и P находим по кривой нейтральной устойчивости R_* и затем h при асимптотическом значении $\eta h = 0.55$.

На фиг. 1 кривой I представлена граница возникновения неустойчивости вида ячеистых течений, рассчитанная по уравнению (16).

На этой же фигуре нанесены расчетные данные из работы [12] (кривые II и III соответствуют числам Прандтля 25 и 10^3). Решения [12] получены с большим приближением, однако в уравнении температурных возмущений необоснованно опущен член $\varphi' \partial \theta_0 / \partial z$, учитывающий влияние градиента температуры по высоте слоя. Пренебрежение этим членом вызывает существенное снижение R_* , как следует из соотношения (16).

Экспериментальные исследования устойчивости ламинарного течения в вертикальном слое проводились на установке, состоящей из двух плоских медных теплообменников ($20 \times 80 \times 250$ мм³), которые помещались в ванну с прозрачной стенкой.

Постоянство температур поверхностей теплообмена обеспечивалось циркулирующей в щели теплообменника термостатированной водой. Температура поверхностей теплообмена измерялась нихром-константановыми термопарами диаметром 0.2 мм, расположенными на различных высотах. Поверхность теплообмена шлифовалась и полировалась. Параллельность вертикальных поверхностей теплообмена достигалась калиброванной по толщине рамкой, помещенной между ними. Теплообменники вертикальными торцовыми поверхностями устанавливались вплотную к шлифованной стеклянной пластине ванны.

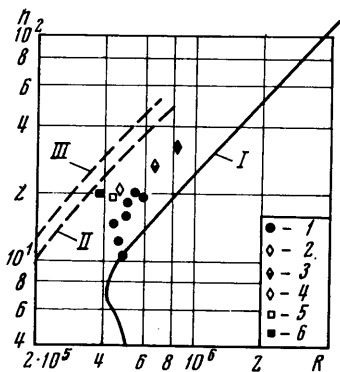
Таким образом, экспериментальный объем ограничивался поверхностями теплообмена, калиброванной рамкой из оргстекла вида квадратной скобки и стеклянной пластиной ванны. После установки теплообменников с рамкой объем ванны и экспериментальный слой заполнялись рабочей жидкостью.

Подобная конструкция позволяла изменять геометрические размеры рабочего объема путем смены рамок.

В качестве рабочих жидкостей использовались этиловый спирт ($P = 14$) и трансформаторное масло ($P \approx 10^2$). Для визуализации потока в слой жидкости помещались алюминиевые частицы от 5 до 15 мк.

В режиме теплопроводности ($m = 0$), т. е. при $R < 1.3 \cdot 10^4 - 1.5 \cdot 10^4$, во всех экспериментах наблюдалось чисто ламинарное течение.

Определение границы возникновения ячеистых течений проводилось следующим образом. При одной относительной высоте слоя (h) увеличивали число R путем изменения перепада температур, причем последующее значение числа R от предыдущего отличалось на 6%. Число R , при котором впервые возникают вихревые



Фиг. 1

течения, и считалось критическим R_* .

На фиг. 1 представлены экспериментальные данные по возникновению неустойчивости вида ячеистых течений, полученные авторами: этиловый спирт ($P = 14$) — I^о, трансформаторное масло — точки 2^о, 3^о, 4^о, соответствующие числам Прандтля 186, 120, 90; точки 5^о и 6^о для $P = 10^3$ соответственно из [14, 12].

В слое этилового спирта при R_* возникал один вихрь в центре слоя. По мере увеличения $R > R_*$ число ячеек постепенно возрастало.

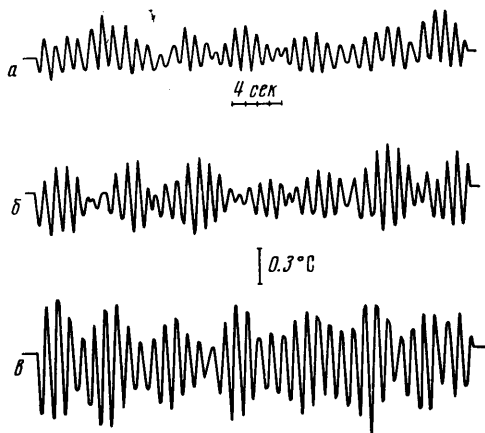
В слое же трансформаторного масла ($P = 100 \div 200$) ячейстые течения возникали в верхней части слоя и быстро распространялись вниз. Это вызвано, вероятно, влиянием температуры на физические свойства жидкости.

При вычислении числа R физические свойства жидкости определялись по температуре в средней части слоя на высоте возникновения вихря.

Экспериментальные исследования, проведенные на слое трансформаторного масла, показали, что существует высота слоя, выше которой опасными являются волновые течения (h_1). При $h < h_1$ возникала неустойчивость вида вторичных течений, т. е. опасными будут стационарные возмущения. При $h = 32$, $P = 100$ течения вида бегущей волны предшествовали возникновению ячейстых течений. Наблюдались ячейстые течения с наложенными на них волнами. При $h > 32$ имела место неустойчивость только вида бегущей волны.

Экспериментальные исследования, проведенные на слое этилового спирта ($P \approx 14$), показали, что при $h > 15$ возникновению ячейстых течений предшествовали течения вида бегущей волны, т. е. при одной и той же высоте слоя по мере увеличения числа R вначале возникали волновые течения, а затем вторичные ячейстые течения с наложенными на них волнами. При высотах слоя $h > 22$ наблюдалась неустойчивость только вида бегущей волны. Развитые волновые течения хорошо видны и могут быть засняты на подвижную киноплёнку при помощи кинокамеры.

Экспериментальные исследования температурных волн в вертикальном слое были проведены на установке, описанной выше. На калиброванной четырехугольной рамке из оргстекла, ограничивающей слой по торцам, натягивались горизонтально и параллельно поверхностям теплообмена медь-константановые термопары диаметром 0.06 мм на различном расстоянии от стенки. Усиленный сигнал термопары записывался на фотобумагу либо шлейфовым осциллографом Н-105, либо самописцем ЭПП-09.



Фиг. 2

На фиг. 2 представлены температурные изменения в слое во времени при различных расстояниях от горячей поверхности теплообмена: $a - x = 0.445$, $б - x = 0.6$, $в - x = 0.635$, $R = 7.5 \cdot 10^4$, $P = 14$, $l = 3.18$ мм, $h = 69.5$.

Температуры от различных термопар записывались последовательно во времени. Из фиг. 2, a видно, что вблизи середины слоя наблюдаются несимметричные колебания относительно осредненной температуры. В окрестности максимума (или минимума) скорости (фиг. 3, $в$) колебания симметричны относительно осредненного значения температуры и имеют наибольшую амплитуду. По мере приближения к середине слоя амплитуда возмущений падает (фиг. 3, $б$).

В результате проведенных экспериментальных исследований было показано существование критической высоты слоя (h_1) для фиксированного значения числа P , выше которой опасными являются нестационарные возмущения. При высотах слоя, меньших h_1 , опасны стационарные возмущения. Приведенные экспериментальные исследования качественно подтверждают результаты расчетов границы возникновения неустойчивости.

Поступило 5 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. Ж. техн. физ., 1953, т. 23, вып. 10.
2. Гершуни Г. З. К вопросу об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. Ж. техн. физ., 1955, т. 25, вып. 2.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными, вертикальными плоскостями. Изв. вузов, Физика, 1958, № 4.
4. Рудаков Р. Н. О малых возмущениях конвективного движения между вертикальными плоскостями. ПММ, 1966, вып. 2.

5. Рудаков Р. Н. Спектр возмущений и устойчивости конвективного движения между вертикальными плоскостями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
6. Бирях Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. Гидродинамическая и тепловая неустойчивость стационарного конвективного движения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
7. Полежаев В. И. Течение и теплопередача при ламинарной естественной конвекции в вертикальном слое. Тепломассоперенос, т. 1, Минск, 1967.
8. Сорокин М. П. Свободная конвекция жидкости в полости, происходящая в условиях пограничного слоя. Инж.-физ. ж., 1961, № 8.
9. Eckert E. R. G., Carlson W. O. Natural convection in an air layer enclosed between two vertical plates with different temperatures. Internat. J. Heat. and Mass Trans., 1961, vol. 2, No. 1, 2, pp. 106—120.
10. Elder J. W. Laminar free convection in a vertical slot. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt 1, pp. 77—99. Turbulent free convection in a vertical slot. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt 1, pp. 99—111.
11. Зайцев В. М., Сорокин М. П. К вопросу об устойчивости теплового конвективного движения жидкости в вертикальной щели. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1961, т. 19, вып. 3.
12. Vest C. M., Agraci V. S. Stability of natural convection in a vertical slot. J. Fluid Mech., 1969, vol. 36, pt 1, pp. 1—15.
13. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М., Физматгиз, 1962.
14. Elder J. W. Numerical experiments with free convection in a vertical slot. J. Fluid Mech., 1966, vol. 24, pt 4, pp. 823—843.
15. Кирдяшкин А. Г., Леонтьев А. И. Исследование гидродинамики и теплообмена в вертикальных слоях жидкости при свободной конвекции. Теплофизика высоких температур, 1969, т. 7, № 5.

УДК 532.529.5/6

О ПОСТРОЕНИИ ОБЩЕЙ СХЕМЫ КАВИТАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ

Я. Р. БЕРМАН

(Москва)

Предложена схема кавитационного обтекания пластинки, из которой как частные случаи получаются течения Жуковского — Рошко, Рябушинского и др. [1, 2].

Пусть плоский поток идеальной, несжимаемой и невесомой жидкости набегаёт со скоростью v_∞ на перпендикулярную к нему пластинку. В силу симметрии течения ограничимся рассмотрением его верхней половины (фигура, а). Позади пластинки находится каверна, ограниченная сверху дугой CDE . На участке CD модуль v скорости постоянен и равен v_0 , а на DE угол наклона θ вектора скорости к оси абсцисс плоскости z меняется по указанному ниже закону¹ от $\theta = \theta_0$ до $\theta = -\pi/2$. На участке EA , где A — бесконечно удаленная точка, угол θ равен нулю.

Отобразим область течения в плоскости z на верхнюю полуплоскость параметрического переменного t ; соответствие точек ясно из фигуры.

Введем переменную Жуковского

$$i \ln \frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = \theta + i\tau, \quad \tau = \ln \left| \frac{v}{v_0} \right| \quad (1)$$

¹ Согласно схеме Вудса [3] на границе хвостовой части каверны меняется по заданному закону величина v .