

3. Кацкова О. Н., Крайко А. Н. Расчет плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений при наличии необратимых процессов. ПМТФ, 1963, № 4, стр. 116.
4. Камзолов В. Н., Пирумов У. Г. Расчет неравновесных течений в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6, стр. 25.
5. Westenberg A. A., Fawin S. Complex chemical kinetics in supersonic. Nozzle Flow, IX Sympos. on Combustion. Acad. Press., New York — London, 1963, p. 785.
6. Милн В. Э. Численное решение дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1955, стр. 30.

УДК 534.822.2

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. С. ЕФИМОВ

(Москва)

Рассматривается задача о выходе ударной волны из осесимметрического канала и распространение ее в свободном пространстве идеального газа. Эта задача рассматривалась ранее в работе [1], в которой фронт ударной волны считался плоским, и в работе [2], в которой фронт ударной волны считался поверхностью эллипсоида вращения. Решения, полученные в этих работах, предполагали наличие двух областей на поверхности фронта: области основной ударной волны и области ударной волны от распада бесконечно тонкого кольцевого разрыва параметров газа, причем интенсивность волны вдоль поверхности фронта в каждой области считалась постоянной, т. е. не учитывался волновой характер процесса вдоль фронта.

В данной работе задача сводится к решению методом характеристик [3-5] уравнений движения фронта ударной волны, полученных в работах [6, 7]. Определяются поля течений в области, непосредственно примыкающей к фронту ударной волны, в широком диапазоне чисел Маха ударной волны  $M_a = 1.6-20.0$  для  $\kappa = 1.4$ . На основании полученных данных путем введения переменных, связанных с длиной невозмущенной зоны, отсчитываемой от среза канала вдоль оси  $x$ , и перепадом давления на фронте ударной волны, предлагаются зависимости, близкие к автомодельным.

1. Рассмотрим процесс распространения ударной волны от среза осесимметрического канала в свободном пространстве идеального газа. При этом параметры ударной волны на срезе канала предполагаем известными. Пусть ось  $x$  цилиндрической системы координат направлена вдоль оси симметрии, ось  $y$  — перпендикулярно оси симметрии. Начало координат поместим на срезе канала.

Процесс распространения фронта ударной волны можно описать следующими уравнениями [6, 7]:

$$\nabla \left( \frac{M}{A} \nabla \alpha \right) = 0, \quad M = \frac{1}{|\nabla \alpha|} \quad (1.1)$$

где  $\alpha = at$ ,  $M = v/a$  — число Маха ударной волны в данной точке фронта,  $v$  — скорость фронта ударной волны,  $a$  — скорость звука в среде перед ударной волной,  $A$  — некоторая функция числа  $M$  ударной волны,  $x, y$  — координаты точек фронта,  $t$  — время, в течение которого фронт занимает данное положение. Если ввести в рассмотрение угол  $\theta$  между нормалью к поверхности фронта и осью  $x$ , то уравнения (1.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\sin \theta}{M} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\cos \theta}{M} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y \cos \theta}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y \sin \theta}{A} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для того чтобы замкнуть эту систему, необходимо знать зависимость  $A = A(M)$ . Такая зависимость была получена и исследована в работах [8, 9]

$$A = \exp \left( - \int_{M_a}^M \frac{2M}{(M^2 - 1)K(M)} dM \right) \quad (1.3)$$

$$K(M) = 2 \left[ \left( 1 + \frac{2}{\kappa + 1} \frac{1 - \mu^2}{\mu} \right) \left( 2\mu + 1 + \frac{1}{M^2} \right) \right]^{-1}$$

Здесь  $K(M)$  — функция Честера, медленно убывающая от  $K = 0.5$  при  $M = 1$  до  $K = 0.3941$  при  $M \rightarrow \infty$  (для  $\kappa = 1.4$ ),  $\kappa$  — отношение удельных теплоемкостей

$$\mu^2 = \frac{(\kappa - 1)M^2 + 2}{2\kappa M^2 - \kappa + 1}$$

Для удобства дальнейших выкладок и численного счета введем новые переменные

$$S = \operatorname{tg} \theta, \quad f = \sqrt{A} \left( -M \frac{dA}{dM} \right)^{-1/2} \quad (1.4)$$

Уравнения (1.2) представляют собой систему нелинейных уравнений гиперболического типа и имеют два действительных семейства характеристик, которые в новых переменных записываются в виде

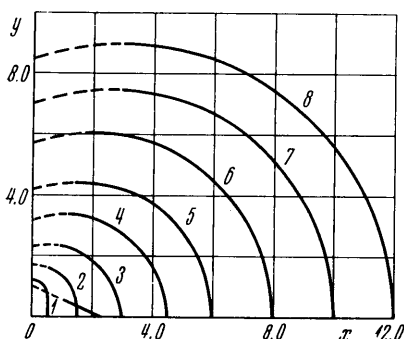
$$\frac{dy}{dx} = \frac{S \pm f}{1 \mp Sf}, \quad dS \pm \frac{1 + S^2}{f} \frac{dM}{M} \pm \frac{Sf(1 + S^2)}{S \pm f} \frac{dy}{y} = 0 \quad (1.5)$$

Знаки  $\pm$  в этих уравнениях относятся соответственно к характеристикам первого и второго семейств. Таким образом, задача с тремя независимыми переменными (нестационарное движение с осевой симметрией) свелась к расчету одномерных волн, распространяющихся и взаимодействующих вдоль поверхности фронта ударной волны.

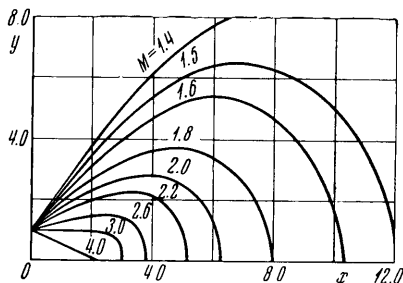
Будем считать, что в начальный момент времени фронт ударной волны плоский и находится на срезе канала, т. е. при  $x = 0$   $M = M_a$ ,  $\theta = 0$ , где  $M_a$  — начальное значение числа  $M$  ударной волны на срезе канала. В этом случае  $S = 0$ , и первая характеристика второго семейства, выходящая из угловой точки  $x = 0$ ,  $y = 1$ , представляет собой прямую линию, уравнение которой следует из (1.5)

$$y = -f_a x + 1 \quad (1.6)$$

В этом уравнении  $f_a$  — значение величины  $f$  при  $M = M_a$ . Область, заключенная между срезом канала и первой характеристикой второго семейства, является невозмущенной зоной, в которой фронт волны остается плоским, а интенсивность равна интенсивности волны на срезе канала, поэтому начальные данные естественно взять на первой характеристике второго семейства, т. е.  $M = M_a$ ,



Фиг. 1



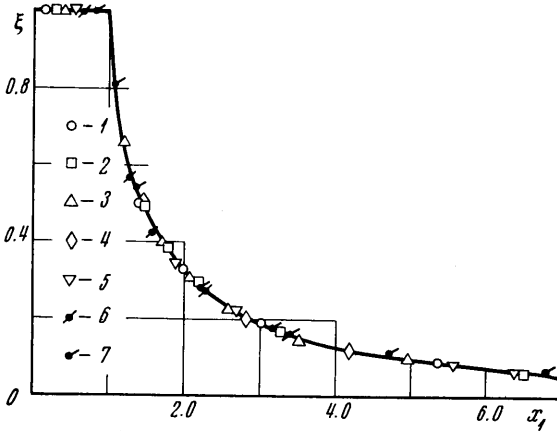
Фиг. 2

$\theta = 0$  на характеристике (1.6). Таким образом, приходим к задаче Коши с начальными значениями на характеристике. Граничные условия сформулируются следующим образом:  $y = 0$ ,  $\theta = 0$  на оси симметрии,  $y = y_w$ ,  $x = x_w$ ,  $\theta = \theta_w$  на наружной стороне стенки канала, где  $y_w$ ,  $x_w$ ,  $\theta_w$  — координаты и угол наклона стенки к оси симметрии, причем профиль стенки может задаваться произвольной гладкой или кусочно-гладкой функцией.

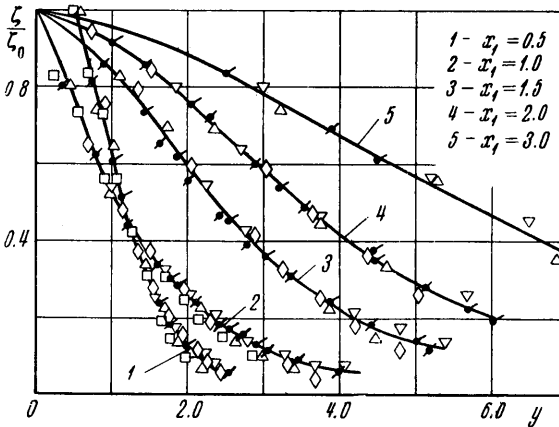
Дальнейшее решение задачи проводилось методом характеристик [3–5]. При счете дифференциальные уравнения (1.5) заменялись уравнениями в конечных разностях и находились параметры течения в угловой точке, в поле течения, на оси

симметрии и наружной стороне стенки канала. Расчеты проводились на ЭВМ для  $\kappa = 1.4$  в диапазоне начальных чисел  $M_a$  ударной волны  $M_a = 1.6-20.0$ .

2. На фиг. 1 и фиг. 2 приведены типичные картины распространения и изменения интенсивности фронта ударной волны по мере его распространения в свободном пространстве при  $M_a = 4.0$ . На фиг. 1 показаны последовательные положения фронта при движении его от среза канала в различные моменты времени  $t$ . Время отнесено к величине  $r_a/a$ ,  $r_a$  — радиус выходного сечения канала. Кривые 1—8 на фиг. 1 описывают положение фронта в моменты времени 0.125, 0.375, 0.786, 1.459, 2.134, 3.174, 4.334 и 5.594. Видно, что в невозмущенной области (между первой характери-



Фиг. 3



Фиг. 4

стикой второго семейства, показанной штрих-пунктирной линией, и срезом канала) фронт ударной волны остается плоским. По мере удаления от среза фронт волны искривляется и на расстояниях  $x > 12$  становится близким к сферическому. Интенсивность ударной волны при этом уменьшается как в направлении оси  $x$ , так и в направлении вдоль фронта от оси  $x$ . Пунктиром показана область вырождения фронта в звуковую волну ( $M \approx 1.0$ ).

Изменение интенсивности ударной волны по мере ее распространения приведено на фиг. 2. Сплошные линии представляют собой линии равных чисел  $M$  ударной волны. Качественно картина очень похожа на линии равных чисел  $M$  поля сверхзвуковой изэнтропической осесимметричной струи в области свободного расширения [10, 11]. Существенное отличие заключается в том, что в такой струе скорость потока увеличивается и числа  $M$  растут, в нашем случае интенсивность волны падает и числа  $M$  уменьшаются вниз по потоку. Первая характеристика второго семейства, выходящая из угловой точки ( $x = 0, y = 1$ ), совпадает с линией, на которой  $M = 4.0$  и, как указывалось выше, отделяет невозмущенную область течения от возмущенной.

3. Для получения обобщающих зависимостей, описывающих процесс распространения и изменения интенсивности вдоль фронта волны и вниз по потоку, была принята попытка найти переменные, в которых все рассчитанные случаи описывались бы универсальными кривыми. На фиг. 3 приведено изменение интенсивности фронта ударной волны вдоль оси симметрии для исследованного диапазона  $M_a = 1.6-20.0$  в координатах  $\xi_0, x_1$ , где  $\xi_0 = (M^2 - 1)(M_a^2 - 1)^{-1}$  — параметр, характеризующий относительный перепад давлений на фронте ударной волны,  $x_1$  — расстояние вдоль оси  $x$ , отнесенное к длине невозмущенной зоны, определяемой уравнением (1.6) при  $y = 0$ .

Точки 1—7 на фиг. 3 (а также на фиг. 4) соответствуют значениям  $M_a$  1.6, 1.8, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0 и 20.0. Видно, что все рассчитанные случаи хорошо ложатся на одну кривую, которую можно аппроксимировать следующим выражением:

$$\xi_0 = (0.08x_1^2 + 1.92x_1 - 1)^{-1} \quad (3.1)$$

На фиг. 4 дано изменение параметра  $\xi/\xi_0$  в поперечном направлении при  $x_1 = \text{const}$  для рассчитанного диапазона чисел  $M_a$ . Все точки также довольно хорошо ложатся на одни и те же кривые. При  $x \geq 1$  эти кривые аппроксимируются зависимостью

$$\frac{\xi}{\xi_0} = \frac{1.44x_1^3}{1.44x_1^3 + y^2} \quad (3.2)$$

Следует отметить, что предложенным методом может быть решен целый ряд задач дифракции ударных волн на различных препятствиях в каналах переменного сечения с многократным произвольным изменением площади поперечного сечения, т. е. в задачах, которые не могут быть решены в линейной постановке.

В заключение автор благодарит С. С. Семенова за ценные советы и замечания, высказанные по данной работе.

Поступило 16 IX 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дулов В. Г., Райзберг Б. А. Начальная стадия образования струи. Изв. вузов, Авиац. техн., 1961, № 4.
2. Старшинов А. И. Формирование потока за фронтом ударной волны при истечении из сопла. Вестн. ЛГУ, 1965, № 3.
3. Ehlers F. E. The method of characteristics for isoenergetic supersonic flows adapted to high — speed digital computers. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1959, vol. 7, No. 1. (Рус. перев.: В сб. «Механика», 1960, № 1.)
4. Чушкин П. И. Затупленные тела простой формы в сверхзвуковом потоке газа. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
5. Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шулишина Н. П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. М., ВЦ АН СССР, 1961.
6. Whitham G. B. A new approach to problem of shock dynamics, pt 1. Two-dimensional problems. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, pt 2.
7. Whitham G. B. A new approach to problem of shock dynamics, pt 2. Three-dimensional problems. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, pt 3.
8. Chisnell R. F. The motion of shock wave in a channel with applications to cylindrical and spherical shock wave. J. Fluid Mech., 1958, vol. 2, pt 3.
9. Whitham G. B. On the propagation of shock waves through region of nonuniform area of flow. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, pt 4.
10. Волконская Т. Г. Расчет сверхзвуковых осесимметричных струй. В сб. «Численные методы в газовой динамике», № 2. М., Изд-во ВЦ МГУ, 1963.
11. Wang C. J., Peterson J. B. Spreading of supersonic jets from axially symmetric nozzles. Jet Propulsion, 1958, vol. 28, No. 5.