

УДК 5.32.546

ФИЛЬТРАЦИЯ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Г. И. БАРЕНБЛАТТ

(Москва)

Нестационарная фильтрация несмешивающихся жидкостей рассматривается с учетом немгновенности перестройки потока при изменении насыщенности. Предлагается простейшая кинетическая схема, принимающая во внимание конечность времени перестройки. Проводится асимптотическое исследование получающейся системы уравнений.

Названная в заглавии статьи проблема является для теории фильтрации классической. При традиционном ее рассмотрении (см. обзор [1], монографии [2-5]) уравнения неразрывности обеих фаз

$$m\partial_t\sigma + \operatorname{div} v_1 = 0, \quad m\partial_t(1-\sigma) + \operatorname{div} v_2 = 0 \quad (0.1)$$

(m — пористость, предполагаемая постоянной, σ — насыщенность порового пространства первой (для определенности, смачивающей) фазой, v_1, v_2 — векторы скорости фильтрации соответственно первой и второй фаз) дополняются обобщенным законом Дарси

$$v_i = -\frac{k}{\mu_i} f_i \operatorname{grad} p_i, \quad i = 1, 2; \quad p_2 - p_1 = p_c \quad (0.2)$$

(k — проницаемость пористой среды, μ_i — коэффициенты вязкости фаз, величины k, μ_1, μ_2 считаются постоянными, p_i — давления фаз), причем принимается основная гипотеза, согласно которой величины f_i — относительные фазовые проницаемости и p_c — капиллярное давление — считаются заданными функциями мгновенной насыщенности σ . Тем самым предполагается, что величины $f_i(\sigma)$ — те же относительные фазовые проницаемости, которые определяются из экспериментов по стационарному движению смеси в длинных трубках, заполненных пористой средой, а p_c — статическое, равновесное, капиллярное давление.

Этот подход, основы которого были заложены в конце тридцатых — начале сороковых годов Мускатом, Левереттом и их сотрудниками, сыграл важную роль. Однако накопившиеся к настоящему времени экспериментальные данные показывают, что использование в теории нестационарной фильтрации двухфазных жидкостей, и особенно в задаче вытеснения одной жидкостью другой, предположения об универсальной зависимости относительных фазовых проницаемостей от мгновенной насыщенности в ряде случаев неправомерно. В особенности это предположение неправомерно вблизи фронта вытеснения, где насыщенность меняется резко.

В предлагаемой работе намечается другой подход к исследованию нестационарной фильтрации несмешивающихся жидкостей, при котором предположение об универсальной зависимости относительных фазовых проницаемостей от мгновенной насыщенности не используется. Учитывается немгновенность перестройки потока при изменении насыщенности и предлагается простейшая кинетическая схема, принимающая во внимание конечность времени перестройки.

Естественно, что там, где насыщенность меняется плавно и где через пористую среду уже прошло большое количество вытесняющей жидкости, немгновенность перестройки потока перестает быть существенной и предлагаемый подход дает результаты, совпадающие с классической схемой Муската — Миреса [2] (в одномерном случае — Бакли — Леверетта [6]). В потоках возникают также относительно узкие области резкого изменения насыщенности, где движение оказывается стабилизированным (квазистационарным). В этих областях схема Муската — Миреса (Бакли — Леверетта) неприменима: эффекты немгновенности перестройки потока и капиллярной разности давлений здесь существенны. В пределе, при малых скоростях движения фронта, получается схема Рапппорта — Лиса [7] и ширина стабилизированной зоны оказывается обратно пропорциональной скорости вытеснения. В противоположном предельном случае больших скоростей вытеснения ширина стабилизированной зоны оказывается прямо пропорциональной скорости вытеснения. Таким образом, ширина

стабилизированной зоны оказывается немонотонно зависящей от скорости вытеснения, так что минимальная ширина достигается при некоторой промежуточной скорости. Этот вывод качественно согласуется с данными наблюдений.

1. Основные представления. Во всем дальнейшем изложении рассматриваются процессы, в ходе которых насыщенность смачивающей жидкости монотонно возрастает в каждой точке. При длительном движении двухфазной смеси постоянного состава через пористую среду в среде формируется некоторое равновесное распределение фаз, которое в процессе течения сохраняется статистически постоянным. Для наглядности можно представить себе, что пористая среда — система «активных», соединяющихся между собой пор, — при таком равновесном течении разбивается на каналы, по которым происходит движение фаз, и застойные зоны, где фазы покоятся или находятся в состоянии медленного циркуляционного движения. Распределение размеров поперечных сечений каналов имеет широкий спектр — от одного или нескольких размеров пор до десятков, сотен и более размеров пор. Согласно распространенным представлениям (см. монографию Д. А. Эфроса [¹]) каналы, по которым происходит стационарное движение различных фаз, различны, т. е. по одной системе каналов движется только одна фаза, по другой — только другая.

При изменении (возрастании) насыщенности смачивающей вытесняющей фазы происходит перераспределение системы каналов между фазами и перестройка застойных зон. Именно, в часть каналов, по которым до того текла вытесняемая жидкость, попадает вытесняющая жидкость; застойные зоны также обогащаются вытесняющей жидкостью (механизм этого обогащения может быть различным — капиллярным, диффузионным и т. д.). Таким образом, возникает «зона замещения».

Рассмотрим, что происходит в зоне замещения. Вытесняющая жидкость, попавшая в эту зону, оказывается под действием «капиллярных затворов» — менисков на межфазных границах — как бы «интернированной», т. е. исключенной из общего фильтрационного потока. Это означает, что капиллярные затворы снимают в зоне замещения действие гидродинамического перепада давления: оценки показывают [⁸], что капиллярные внутренние силы значительно превышают гидродинамический перепад давления. Замещение вытесняемой жидкости вытесняющей происходит под действием развитой системы капиллярных сил, причем ввиду наличия громадной разветвленной поверхности пористой среды этот процесс релаксации системы двухфазная жидкость — пористая среда к новой насыщенности происходит не мгновенно, а за конечное время τ . Аналогичная ситуация имеет место и в областях замещения застойных зон.

Сказанное приводит к тому, что фазовая проницаемость вытесняющей жидкости оказывается соответствующей не мгновенной насыщенности в данной точке x в момент t , а насыщенности в момент $t - \tau$, т. е. величине

$$\sigma_1 = \sigma(x, t - \tau) \approx \sigma(x, t) - \tau \partial_t \sigma(x, t) \quad (1.1)$$

где τ — время замещения: вытесняющая жидкость, находящаяся в зоне замещения, еще не образовала каналов и, будучи интернированной, не участвует в общем фильтрационном потоке. Вкладом в фильтрационный поток поглощения вытесняющей жидкости зоной замещения пренебрегается ввиду относительной медленности процесса капиллярного замещения сравнительно с течением жидкости по каналам. Таким образом, роль зоны замещения состоит в том, что она создает временное дополнительное фильтрационное сопротивление.

Аналогично обстоит дело и с относительной фазовой проницаемостью для вытесняемой жидкости. Начиная с момента попадания в зону замещения вытесняющей жидкости, оказывается «интернированной» и находя-

щаяся в этой зоне вытесняемая жидкость, которая также блокируется капиллярными силами и исключается из общего фильтрационного потока (количеством вытесняемой жидкости, медленно поступающей из зоны замещения под действием капиллярных сил, пренебрегается по сравнению с количеством жидкости, протекающей по нетронутым каналам). Поэтому относительная фазовая проницаемость второй фазы в данный момент соответствует не мгновенной насыщенности в этот момент, а той насыщенности, которая будет, когда зона замещения, заполненная в данный момент обеими жидкостями, освободится от должного количества вытесняемой жидкости

$$\sigma_2 = \sigma(x, t + \tau) \approx \sigma(x, t) + \tau \partial_t \sigma(x, t) \quad (1.2)$$

Что касается капиллярной разности давлений вытесняемой и вытесняющей фаз, то из предыдущего следует, что в ходе замещения она не меняется (если считать, — что, по-видимому выполняется достаточно точно, — что при вытеснении в зоне замещения поверхности раздела фаз перемещаются от одного конца канала к другому, не меняя в среднем своей формы, а картина течения в обоих основных типах каналов остается неизменной). Поэтому естественно считать, что капиллярное давление p_c равно равновесному давлению, соответствующему «запаздывающей» насыщенности (1.1). Следует отметить, что точная оценка этого запаздывания для капиллярного давления, в отличие от фазовых проницаемостей, не имеет существенного значения. Как будет показано ниже, учет изменения насыщенности для капиллярного давления приводит к эффектам высшего порядка, что и естественно, поскольку относительный объем зоны замещения мал.

Имеем, таким образом, в сделанных предположениях

$$f_1 = f_1(\sigma - \tau \partial_t \sigma), \quad f_2 = f_2(\sigma + \tau \partial_t \sigma), \quad p_c = p_c(\sigma - \tau \partial_t \sigma) \quad (1.3)$$

где функции f_1 , f_2 , p_c определяют соответственно равновесные (имеющие место в условиях стационарного течения) относительные фазовые проницаемости и капиллярное давление.

Относительно времени замещения τ можно предполагать, что оно определяется соотношением

$$\tau = \tau_0 f(\sigma) \quad (1.4)$$

где τ_0 — некоторая постоянная, характеризующая систему двухфазная жидкость — пористая среда, $f(\sigma)$ — безразмерная функция насыщенности. Зависимостью времени замещения от скорости фильтрационного потока можно пренебречь по следующей причине. Как уже отмечалось, капиллярные перепады давления значительно превышают гидродинамические. Поэтому процесс замещения обладает определенной автономностью в том смысле, что он от скорости фильтрационного потока не зависит: выводимая из зоны замещения вытесняемая жидкость достаточно быстро уносится фильтрационным потоком (если исключить случай весьма малых скоростей, для которого эти представления, по-видимому, неприменимы) и скорость потока времени замещения не лимитирует. Функция $f(\sigma)$ и время τ_0 должны определяться из специальных экспериментов. Первые соотношения (1.3) можно представить в виде

$$f_1 = f_1(\sigma_1), \quad f_2 = f_2(\sigma_2) \quad (1.5)$$

а выражения (1.1) и (1.2) для σ_1 и σ_2 — в виде кинетических уравнений

$$\partial_t \sigma = - \frac{\sigma_1 - \sigma}{\tau}, \quad \partial_t \sigma = \frac{\sigma_2 - \sigma}{\tau} \quad (1.6)$$

Таким образом, для определения τ в принципе можно предложить обычные одномерные лабораторные установки, позволяющие фиксировать изменение фильтрационных сопротивлений при внезапном изменении насыщенности подаваемой смеси жидкостей.

2. Основные уравнения. Приведенные выше соображения позволяют написать замкнутую систему основных уравнений рассматриваемого процесса

Уравнения неразрывности фаз

$$m\partial_t\sigma + \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0, \quad m\partial_t(1-\sigma) + \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0 \quad (2.1)$$

Обобщенный закон Дарси

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{k}{\mu_1} f_1(\sigma - \tau\partial_t\sigma) \operatorname{grad} p_1 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v}_2 = -\frac{k}{\mu_2} f_2(\sigma + \tau\partial_t\sigma) \operatorname{grad} p_2 \quad (2.3)$$

Соотношение между давлениями фаз

$$p_2 - p_1 = p_c(\sigma - \tau\partial_t\sigma) \quad (2.4)$$

Определяющее уравнение для времени замещения

$$\tau = \tau_0 f(\sigma) \quad (2.5)$$

где f_1, f_2, p_c, f — известные функции. В общем случае система (2.1) — (2.5) весьма сложна и ее решение представляет значительные трудности даже с привлечением ЭВМ. К счастью, она допускает — на основе некоторых асимптотических оценок — расщепление на более простые системы и полное исследование.

Заметим, прежде всего, что, согласно Леверетту [9], равновесное капиллярное давление представляется в виде

$$p_c(\sigma) = T \cos \Theta (m/k)^{1/2} J(\sigma) \quad (2.6)$$

где T — поверхностное натяжение, Θ — угол смачивания, $J(\sigma)$ — безразмерная функция насыщенности, так называемая функция Леверетта. Далее, помимо параметров, входящих в уравнения (2.1) — (2.6), граничные условия вносят в задачу дополнительные размерные параметры — характерный размер области L , характерный перепад давления ΔP (или характерный расход жидкости). Из имеющихся размерных параметров можно составить характерное время τ_1 и определить безразмерное время ϑ соотношением

$$\vartheta = \frac{t}{\tau_1}, \quad \tau_1 = \frac{\mu_1 L^2}{k \Delta P} \quad (2.7)$$

Точно также можно взять в качестве характерной скорости величину $v_0 = k \Delta P / \mu_1 L$, в качестве характерного давления ΔP и т. д. и перейти к безразмерным переменным

$$\mathbf{V}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{v_0}, \quad P_i = \frac{p_i}{\Delta P}, \quad \xi = \frac{x}{L} \quad (2.8)$$

Система (2.1) — (2.6) приводится к виду

$$m\partial_\sigma\sigma + \operatorname{div} \mathbf{V}_1 = 0, \quad -m\partial_\sigma\sigma + \operatorname{div} \mathbf{V}_2 = 0 \quad (2.9)$$

$$\mathbf{V}_1 = -f_1(\sigma - \varepsilon_1 f(\sigma) \partial_\sigma\sigma) \operatorname{grad} P_1 \quad (2.10)$$

$$\mathbf{V}_2 = -\frac{\mu_1}{\mu_2} f_2(\sigma + \varepsilon_1 f(\sigma) \partial_\sigma \sigma) \text{grad } P_2 \quad (2.11)$$

$$P_2 - P_1 = \varepsilon_2 J(\sigma - \varepsilon_1 f(\sigma) \partial_\sigma \sigma) \quad (2.12)$$

где операции div и grad выполняются в безразмерной переменной ξ и введены обозначения для безразмерных параметров

$$\varepsilon_1 = \frac{\tau_0}{\tau_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{T \cos \Theta}{\Delta P} \left(\frac{m}{k} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

3. Асимптотический анализ. Как показывают простейшие оценки, безразмерные параметры ε_1 и ε_2 малы, так что для анализа системы (2.9) — (2.12) естественно применить метод асимптотического сращения [10], ограничившись первыми членами внешнего и внутреннего разложения решений. Для получения первого члена внешнего разложения пренебрежем в уравнениях (2.9) — (2.12) членами, содержащими малые множители ε_1 и ε_2 ; получаем систему

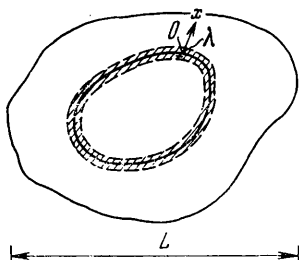
$$m \partial_\sigma \sigma + \text{div } \mathbf{V}_1 = 0, \quad -m \partial_\sigma \sigma + \text{div } \mathbf{V}_2 = 0 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{V}_1 = -f_1(\sigma) \text{grad } P, \quad \mathbf{V}_2 = -\frac{\mu_1}{\mu_2} f_2(\sigma) \text{grad } P, \quad (3.2)$$

$$P_1 = P_2 = P \quad (3.3)$$

т. е. основную систему уравнений схемы Муската — Миреса [2].

Как было впервые показано Бакли и Левереттом [6], эта система приводит, вообще говоря, к появлению скачков насыщенности даже при гладких начальных условиях. Таким образом, первый член внешнего разложения представляет собой разрывное, вообще говоря, решение системы (3.1) — (3.3) при соответствующих граничных и начальных условиях. Это означает, на самом деле, что все поле течения распадается (фиг. 1) на основную по объему часть, где насыщенность меняется плавно и течение описывается упрощенной системой уравнений Муската — Миреса (3.1) — (3.3), и относительно узкую область (заштрихована на фиг. 1), «внутренний пограничный слой», где насыщенность резко меняется и упрощения, приводящие основную систему (2.9) — (2.12) к этой системе неприменимы.



Фиг. 1

Перейдем к построению первого члена внутреннего разложения — асимптотического представления решения полной системы в упомянутых узких областях. Заметим, прежде всего, что ввиду малости обоих параметров ε_1 и ε_2 , определяемых соотношением (2.13), учет запаздывания насыщенности в аргументе капиллярного давления (соотношения (2.4), (2.12)) дает, вообще говоря, эффект высшего порядка, так что этим эффектом в первом приближении пренебрежем и запишем уравнение (2.4) в виде

$$p_2 - p_1 = T \cos \vartheta (m/k)^{1/2} J(\sigma)$$

Для получения внутреннего разложения в окрестности данной точки O поверхности разрыва насыщенности, соответствующей первому члену внешнего разложения, введем локальную ортогональную декартову систему координат с центром в этой точке поверхности разрыва. При этом одну из осей координат (ось x) возьмем направленной по нормали к поверхности разрыва и введем вдоль этой оси другую единицу длины $\lambda \ll L$, которую определим позднее. Вдоль других осей по-прежнему сохраним единицу длины равной L , учитывая тем самым, что все производные по x много больше

производных по y и z . Масштаб скорости по-прежнему сохраним равным $v_0 = k\Delta P / \mu_1 L$, а в качестве масштаба времени возьмем величину τ_2 , которую также определим позднее. В новых переменных, пренебрегая малыми величинами, получим

$$\frac{m\lambda\mu_1 L}{\tau_2 k \Delta P} \partial_\theta \sigma + \partial_x V_{1x} = 0, \quad -\frac{m\lambda\mu_1 L}{\tau_2 k \Delta P} \partial_\theta \sigma + \partial_x V_{2x} = 0 \quad (3.4)$$

$$V_{1x} = -f_1 \left(\sigma - \frac{\tau_0}{\tau_2} f(\sigma) \partial_\theta \sigma \right) \left(\frac{L}{\lambda} \right) \partial_x P_1 \quad (3.5)$$

$$V_{2x} = -\frac{\mu_1}{\mu_2} f_2 \left(\sigma + \frac{\tau_0}{\tau_2} f(\sigma) \partial_\theta \sigma \right) \left(\frac{L}{\lambda} \right) \partial_x P_2 \quad (3.6)$$

$$P_2 - P_1 = \varepsilon_2 J(\sigma) \quad (3.7)$$

Здесь положено $\theta = t / \tau_2$. Примем теперь

$$\tau_2 = \tau_0, \quad \lambda = \varepsilon_1 L \quad (3.8)$$

чтобы все члены в уравнениях (3.4) — (3.6) имели одинаковый порядок. Тогда система (3.4) — (3.7) примет вид

$$m \partial_\theta \sigma + \partial_x V_{1x} = 0, \quad -m \partial_\theta \sigma + \partial_x V_{2x} = 0 \quad (3.9)$$

$$V_{1x} = -f_1 (\sigma - f(\sigma) \partial_\theta \sigma) \frac{1}{\varepsilon_1} \partial_x P_1, \quad V_{2x} = -\frac{\mu_1}{\mu_2} f_2 (\sigma + f(\sigma) \partial_\theta \sigma) \frac{1}{\varepsilon_1} \partial_x P_2$$

$$P_2 - P_1 = \varepsilon_2 J(\sigma) \quad (3.10)$$

После преобразований имеем

$$\begin{aligned} \partial_x (V_{1x} + V_{2x}) &= 0, \quad V_{1x} + V_{2x} = V \\ -\frac{1}{\varepsilon_1} \partial_x P_1 &= \frac{V + \mu f_2 (\sigma + f(\sigma) \partial_\theta \sigma) \varepsilon \partial_x J(\sigma)}{f_1 (\sigma - f(\sigma) \partial_\theta \sigma) + \mu f_2 (\sigma + f(\sigma) \partial_\theta \sigma)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$m \partial_\theta \sigma + \partial_x \left[\frac{V + \mu \varepsilon f_2 (\sigma + f(\sigma) \partial_\theta \sigma) \partial_x J(\sigma)}{1 + \mu f_2 (\sigma + f(\sigma) \partial_\theta \sigma) [f_1 (\sigma - f(\sigma) \partial_\theta \sigma)]^{-1}} \right] = 0 \quad (3.12)$$

где $\mu = \mu_1 / \mu_2$, $\varepsilon = \varepsilon_2 / \varepsilon_1$, а величина V находится из внешнего разложения как суммарный безразмерный поток жидкости через поверхность разрыва в точке O . Поскольку $\tau_2 / \tau_1 = \tau_0 / \tau_1 = \varepsilon_1$, «внешнее» время θ более «медленное», нежели «внутреннее» время θ и величину V можно считать не зависящей от θ .

Ввиду того что внутреннее время θ более «быстрое», основной интерес представляет стационарная промежуточная асимптотика решения задачи Коши для уравнения (3.12), т. е. решение уравнения (3.12) вида

$$\sigma = \sigma(\zeta), \quad \zeta = x + c\theta \quad (3.13)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\sigma(-\infty) = \sigma_2, \quad \sigma(\infty) = \sigma_1 \quad (3.14)$$

где σ_2 и σ_1 соответственно насыщенности за и перед поверхностью разрыва, определяемые известным внешним разложением. Это решение отвечает так называемой «стабилизированной зоне». Имеем, подставляя (3.13) в (3.12)

$$mc \frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{V + \mu f_2 (\sigma + cf(\sigma) d_\zeta \sigma) \varepsilon J'(\sigma) d_\zeta \sigma}{1 + \mu f_2 (\sigma + cf(\sigma) d_\zeta \sigma) [f_1 (\sigma - cf(\sigma) d_\zeta \sigma)]^{-1}} \right] = 0 \quad (3.15)$$

Интегрируя, получаем

$$mc\sigma + \frac{V + \mu f_2(\sigma + cf(\sigma)d_\zeta\sigma)\varepsilon J'(\sigma)d_\zeta\sigma}{1 + \mu f_2(\sigma + cf(\sigma)d_\zeta\sigma)[f_1(\sigma - cf(\sigma)d_\zeta\sigma)]^{-1}} = c_1 = \text{const} \quad (3.16)$$

Постоянные c и c_1 определяются из условий на скачке для внешнего решения. Согласно Бакли и Леверетту [6]

$$mc\sigma_2 + VF(\sigma_2) = c_1, \quad F(\sigma) = \frac{f_1(\sigma)}{f_1(\sigma) + \mu f_2(\sigma)} \quad (3.17)$$

$$c = -\frac{V}{m} \frac{F(\sigma_2) - F(\sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1} \quad (3.18)$$

Подставляя (3.17) и (3.18) в (3.16), получим

$$\begin{aligned} & \frac{f_1(\sigma - cf(\sigma)d_\zeta\sigma)}{f_1(\sigma - cf(\sigma)d_\zeta\sigma) + \mu f_2(\sigma + cf(\sigma)d_\zeta\sigma)} + \\ & + \frac{\mu f_2(\sigma + cf(\sigma)d_\zeta\sigma)\varepsilon J'(\sigma)d_\zeta\sigma}{V[1 + \mu f_2(\sigma + cf(\sigma)d_\zeta\sigma)[f_1(\sigma - cf(\sigma)d_\zeta\sigma)]^{-1}]} = \\ & = F(\sigma_2) - \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_2 - \sigma_1} [F(\sigma_2) - F(\sigma_1)] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Уравнение (3.19) представляет собой конечное соотношение, связывающее $d_\zeta\sigma$, σ и параметры задачи. Разрешив это соотношение относительно $d_\zeta\sigma$ и выполнив квадратуру, получим распределение насыщенности в переходной, стабилизированной зоне и, в частности, ее размер (разумеется порядок величины размера, поскольку ширина переходной зоны в подобных случаях, строго говоря, получается бесконечной).

4. Предельные случаи:

1°. В предыдущем рассмотрении предполагалось, что величина

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{1}{v_0^2} \frac{T \cos \Theta \sqrt{mk}}{\mu_1 \tau_0} \quad (4.1)$$

имеет порядок единицы. Представляют специальный интерес два предельных случая: малых ε (большие скорости вытеснения) и больших ε (малые скорости вытеснения).

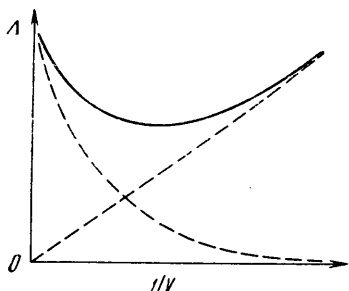
В случае больших скоростей вытеснения ($\varepsilon \rightarrow 0$) вторым членом левой части (3.19) можно пренебречь и уравнение (3.19) принимает вид

$$\frac{f_1(\sigma - cf(\sigma)d_\zeta\sigma)}{f_1(\sigma - cf(\sigma)d_\zeta\sigma) + \mu f_2(\sigma + cf(\sigma)d_\zeta\sigma)} = F(\sigma_2) - (\sigma_2 - \sigma) \frac{F(\sigma_2) - F(\sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1} \quad (4.2)$$

Величина $d_\zeta\sigma$ входит в это уравнение в комбинации с c ; скорость V иначе как в комбинации с $d_\zeta\sigma$ в (4.2) не входит. Разрешая (4.2) относительно $d_\zeta\sigma$, получаем

$$d_\zeta\sigma = \frac{1}{V} \Phi(\sigma, \sigma_2, m, \mu), \quad \xi - \xi_0 = V \int \frac{d\sigma}{\Phi(\sigma, \sigma_2, m, \mu)} \quad (4.3)$$

где Φ — некоторая функция, так что при больших скоростях ширина стабилизированной зоны Λ (расстояние между двумя точками с определенной насыщенностью) пропорциональна скорости V .



Фиг. 2

2°. В другом предельном случае — малых скоростей вытеснения ($\varepsilon \rightarrow \infty$) — масштабы длины λ и времени τ_2 по необходимости выбираются иначе

$$\lambda = \varepsilon_2 L, \quad \tau_2 = \varepsilon_2 \tau_1 \quad (4.4)$$

так что $\tau_0/\tau_2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2 \rightarrow 0$. В этом случае, наоборот, можно пренебречь сдвигом насыщенности в аргументах функций f_1 и f_2 , и мы приходим к известному уравнению Раппопорта — Лиса [7, 1]

$$F(\sigma) + \frac{\mu F(\sigma) f_2(\sigma) J'(\sigma) d\zeta \sigma}{V} = F(\sigma_2) - (\sigma_2 - \sigma) \frac{F(\sigma_2) - F(\sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1} \quad (4.5)$$

(множитель $\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ исчез в связи с перенормировкой λ). Определение ширины стабилизированной зоны Λ в этом случае хорошо известно, она получается обратно пропорциональной скорости V ; согласно (4.5)

$$\zeta - \zeta_0 = \frac{\mu}{V} \int \frac{F(\sigma) f_2(\sigma) J'(\sigma) d\sigma}{F(\sigma_2) - F(\sigma) - (\sigma_2 - \sigma) \frac{F(\sigma_2) - F(\sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_1)}} \quad (4.6)$$

где интеграл, как и в (4.3), берется между двумя фиксированными насыщенностями.

3°. Таким образом, зависимость ширины Λ стабилизированной зоны от скорости V немонотонна: размер стабилизированной зоны неограниченно возрастает при малых и больших скоростях и имеет минимум при некоторой промежуточной величине скорости. Эта зависимость схематически представлена на фиг. 2; пунктиром представлены асимптотики, соответствующие большим скоростям (преимущественная роль запаздывания насыщенности) и малым скоростям (преимущественная роль капиллярного давления).

Можно показать, что уравнение (4.2) разрешимо относительно $d\zeta\sigma$ при σ_1 достаточно близких к σ_2 . Если оно оказывается неразрешимым, это означает, что пренебрежение вторым членом (3.19) во всей стабилизированной зоне недопустимо и имеет место следующее. Стабилизированная зона распадается на две области: в первой насыщенность меняется от σ_2 до некоторой величины $\sigma = \sigma^*$, $\sigma_1 < \sigma^* < \sigma_2$; вплоть до $\sigma = \sigma^*$ уравнение (4.2) разрешимо. Во второй области имеет место «капиллярный переход» от $\sigma = \sigma^*$ до $\sigma = \sigma_1$, описываемый уравнением (4.5). Таким образом, при больших скоростях расширяется пропорционально скорости не вся стабилизированная зона, а ее часть, где насыщенность меняется от σ_2 до σ^* .

Для количественного сопоставления предложенной схемы с опытом, независимого определения времени замещения $\tau = \tau_0 f(\sigma)$, выяснения универсальности этой характеристики и ее независимости от скорости желательно провести несколько серий надежных макро- и микроэкспериментов с измерением ширины стабилизированной зоны при разных отношениях вязкости, скоростях и т. п. и, по возможности, непосредственным наблюдением картины замещения.

Автор благодарен В. М. Ентову за обсуждение работы.

Поступило 25 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжик В. М. Обзор работ по взаимному вытеснению несмешивающихся жидкостей из пористой среды. Изв. АН СССР, ОН, Механика и машиностроение, 1961, № 2.
2. Muskat M. Physical principles of oil production. (Рус. перев.: Физические основы технологии добычи нефти. М., Гостоптехиздат, 1953.)
3. Collins R. Flow of fluids through porous materials. (Рус. перев.: Течение жидкостей через пористые среды. М., «Мир», 1964.)
4. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
5. Эфрос Д. А. Исследования фильтрации неоднородных систем. Л., Гостоптехиздат, 1963.
6. Buckley J., Leverett M. C. Mechanism of fluid displacement in sands. Trans. AIME, 1942, vol. 146.
7. Rapoport L. A., Leas W. J. Properties of linear waterfloods. Trans. AIME, 1953, vol. 198.
8. Moore T. E., Slobod R. L. The effect of viscosity and capillarity on the displacement of oil by water. Prod. Monthly, 1956, VIII, vol. 20, No. 10.
9. Leverett M. C. Flow of oil-water mixtures through unconsolidated sands. Trans. AIME, 1939, vol. 132.
10. Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. New York — London, Acad. Press., 1964.