

УДК 538.4

## РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ О СМЕШАННОМ ТЕЧЕНИИ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В СОПЛЕ ЛАВАЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ МЕРИДИАНАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Н. П. ИСАКОВА

(Москва)

Рассмотрено решение прямой задачи теории осесимметричного сопла Лавала (включая переход через скорость звука) для стационарного течения невязкого и не теплопроводного газа, обладающего конечной электропроводностью. Решение проводится путем численного интегрирования уравнений нестационарного течения газа с использованием явной разностной схемы, предложенной С. К. Годуновым [1, 2] и применявшейся для расчета стационарных и нестационарных течений непроводящего газа в соплах М. Я. Ивановым и А. Н. Крайко [3].

Полностью дозвуковые и полностью сверхзвуковые течения проводящего газа в осесимметричном канале в случаях, когда внешние электрические поля отсутствуют, магнитное поле «меридианально», а магнитные числа Рейнольдса малы, исследовались и ранее. Так, Ф. Д. Хейнс, Ю. А. Иоллер и Э. Элсрс [4] провели экспериментальное и теоретическое исследование течения проводящего газа в цилиндрической трубе при воздействии на поток магнитного поля токового витка, соосного с трубой. Для теоретического анализа в [4] использованы два различных подхода: линеаризация по параметру магнитогазодинамического взаимодействия  $S$  и численный расчет методом характеристик. Первый подход применялся к слабо возмущенным дозвуковым и сверхзвуковым течениям, и решения, полученные здесь в аналитической форме, справедливы лишь при малых  $S$ . Этот же подход использовался Г. М. Бам-Зеликовичем [5] при исследовании течения сквозь токовый виток дозвуковой и сверхзвуковой струи.

Численные расчеты сверхзвуковых течений в цилиндрической трубе, выполненные в [4], также были ограничены сравнительно небольшими значениями  $S$ , так как с ростом  $S$  в потоке появлялись ударные волны и дозвуковые зоны.

О. Н. Кацкова и П. И. Чушкин [6] применили метод характеристик для расчета течения того же типа в сверхзвуковой части осесимметричного сопла с угловой точкой. Поток на входе в рассматриваемую часть сопла был сверхзвуковым и равномерным, а магнитное поле полагалось постоянным и параллельным оси симметрии. Наряду с осесимметричным в [6] рассмотрен и плоский случай.

Решению прямой задачи посвящается работа К. В. Брушлинского, Н. И. Герлаха, А. И. Морозова [7], которые рассматривали течение электропроводного газа между двумя коаксиальными электродами заданной формы. Приложенное магнитное поле отсутствовало, а индуцированное было направлено перпендикулярно меридианальной плоскости. Решение в [7] проводилось численно с применением процесса установления. Однако использованные при этом граничные условия, которые выбирались в значительной степени из соображений упрощения вычислений, и достигнутая точность позволили авторам [7] судить с достоверностью лишь о качественных особенностях исследованного течения. В последнее время кроме работы [3] опубликовано несколько работ [8-10], авторы которых для решения прямой задачи теории сопла Лавала (в случае непроводящего газа) использовали аналогичный подход.

1. Рассмотрим течение электропроводного сжимаемого газа в осесимметричном канале, профиль которого состоит из цилиндрической части, сопряженной с соплом Лавала. Пусть поток направлен слева направо;  $x, y$  — оси прямоугольной системы координат, лежащей в меридианальной плоскости; ось  $x$  совпадает с осью симметрии течения, а начало отсчета выбрано так, что  $x = 0$  соответствует минимальному (критическому) сечению сопла. Предположим, что силовые линии приложенного осесимметричного магнитного поля лежат в меридианальной плоскости, а внешнее электрическое поле отсутствует. Чтобы не учитывать действие индуцированных магнитных полей, будем считать магнитное число Рейнольдса малым. Не учитываем также вязкость, теплопроводность газа и эффект Холла.

Благодаря действию приложенного магнитного поля в газе индуцируются токи, обуславливающие возникновение пондермоторной силы

$$\mathbf{F} = [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{j}$  — вектор плотности тока,  $\mathbf{B}$  — вектор напряженности магнитного поля.

Выражение для тока может быть найдено из закона Ома, который в данном случае имеет вид

$$\mathbf{j} = \sigma[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — вектор скорости, а  $\sigma$  — удельная электропроводность — известная функция термодинамических параметров газа, например давления  $p$  и плотности  $\rho$ . В силу (1.2) и меридианальности магнитного поля вектор плотности тока  $\mathbf{j}$  образует кольцевой виток, плоскость которого перпендикулярна оси, а вектор  $\mathbf{F}$  в соответствии с (1.1) лежит в меридианальной плоскости.

Пусть  $t$  — время;  $u$ ,  $v$  — осевая и радиальная составляющие вектора скорости  $\mathbf{v}$ ;  $e$  и  $i$  — удельные внутренняя энергия и энтальпия газа;  $B_x$  и  $B_y$  — проекции напряженности магнитного поля  $\mathbf{B}$  на оси  $x$  и  $y$ .

Все величины удобно считать безразмерными. Если размерным величинам приписать верхний индекс градус, а характерные значения длины, плотности, скорости, напряженности магнитного поля и электропроводности обозначить через  $l_*^\circ$ ,  $\rho_*^\circ$ ,  $u_*^\circ$ ,  $B_*^\circ$ ,  $\sigma_*^\circ$ , то переход к безразмерным переменным осуществляется отнесением пространственных координат к  $l_*^\circ$ , времени — к  $u_*^\circ/l_*^\circ$ , скорости — к  $u_*^\circ$ , плотности — к  $\rho_*^\circ$ , давления — к  $\rho_*^\circ u_*^{\circ 2}$ , удельных энергии и энтальпии — к  $u_*^{\circ 2}$ , напряженности магнитного поля — к  $B_*^\circ$ , проводимости — к  $\sigma_*^\circ$ , и плотности тока — к  $\sigma_*^\circ u_*^\circ B_*^\circ$ .

При сделанных предположениях течение проводящего газа будет осесимметричным. Дифференциальные уравнения такого течения, записанные с учетом (1.1) и (1.2), и соотношения на сильных разрывах эквивалентны следующей системе интегральных законов сохранения:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iint_G \rho y \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} \rho y (u \, dy - v \, dx) = 0 \\ & \frac{d}{dt} \iint_G \rho u y \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} y [(p + \rho u^2) \, dy - \rho u v \, dx] = \\ & \quad = -S \iint_G \sigma B_y (B_y u - B_x v) \, dx \, dy \\ & \frac{d}{dt} \iint_G \rho v y \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} y [\rho u v \, dy - (p + \rho v^2) \, dx] = \\ & \quad = \iint_G [p + S \sigma B_x (B_y u - B_x v)] \, dx \, dy \quad (1.3) \\ & \frac{d}{dt} \iint_G \rho (2e + w^2) y \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} \rho y (2i + w^2) (u \, dy - v \, dx) = 0 \\ & \quad \left( w^2 = u^2 + v^2, \quad S = \frac{\sigma_*^\circ l_*^\circ B_*^{\circ 2}}{\rho_*^\circ u_*^\circ} \right) \end{aligned}$$

Здесь  $G$  — любая поверхность в плоскости  $xy$ , не зависящая от времени;  $\Gamma$  — ее граница;  $w$  — модуль скорости;  $S$  — безразмерная константа (параметр магнитогазодинамического взаимодействия).

Систему (1.3) следует дополнить выражением для проводимости как функции  $p$  и  $\rho$  и формулами для  $e$  и  $i$ . Последние в случае совершенного

газа с показателем адиабаты  $\kappa$  имеют вид

$$e = p / (\kappa - 1) \rho, \quad i \equiv e + p / \rho = \kappa p / (\kappa - 1) \rho$$

Выберем начальное сечение («левую границу») в цилиндрической части дозвукового участка сопла в достаточном удалении от критического сечения так, чтобы на стационарном режиме влиянием магнитного поля на поток слева от выбранного сечения в пределах заданной точности можно было пренебречь.

В этом случае энтропия газа при стационарном течении на каждой струйке тока слева от указанной границы не изменяется. Как видно из (1.3), то же самое имеет место и для полной энтальпии  $i_0 = i + w^2/2$ , причем последнее справедливо во всем потоке. Пусть энтропия и полная энтальпия потока при  $x = -\infty$  известны и постоянны для всех струек тока. Тогда в соответствии со сказанным на левой границе величины  $p/\rho^*$  и  $i_0$  можно считать известными и постоянными по сечению.

В качестве третьего условия на левой границе, как и в [3], будем использовать равенство

$$di/dx = 0 \quad (1.4)$$

которое при удалении указанной границы в бесконечность при постоянных по сечению энтропии и полной энтальпии эквивалентно условию равномерности потока. Для расчетов, когда левая граница берется на конечном расстоянии от критического сечения, условие (1.4) оказывается более удобным, чем, например, равенство  $u \equiv \text{const}$ .

В силу специфики используемой разностной схемы необходимо в каждый момент времени знать на левой границе величину вертикальной составляющей скорости  $v$ . Последнюю, как и в [3], будем определять из явной разностной записи уравнения безвихренности для стационарного потока.

Если давление среды, в которую происходит истечение, достаточно низкое, то в плоскости выхода реализуется сверхзвуковое течение. Тогда каких-либо дополнительных условий на правой границе исследуемой области, т. е. на выходе из сопла, не требуется. Этот случай и рассматривается в данной работе. На стенках сопла в каждый момент времени выполняется условие непротекания  $v_n = 0$ , где  $v_n$  — нормальная к стенке компонента вектора  $v$ .

Хотя начальные распределения параметров при  $t = 0$ , могут быть выбраны в достаточной степени произвольно, от их выбора зависит время «установления», которое требуется для выхода на стационарный режим. Как показал опыт расчетов, существенное сокращение времени установления достигается, если для счета каждого последующего варианта, соответствующего определенному значению параметра  $S$ , брать в качестве начальных данных распределения параметров, полученные в предыдущем варианте (с меньшим  $S$ ). При этом для расчета течения с  $S = 0$ , как и в [3], использовалось решение стационарной задачи в одномерной постановке, а вертикальная составляющая скорости  $v = v(x, y)$  представлялась в виде линейной функции  $y$ .

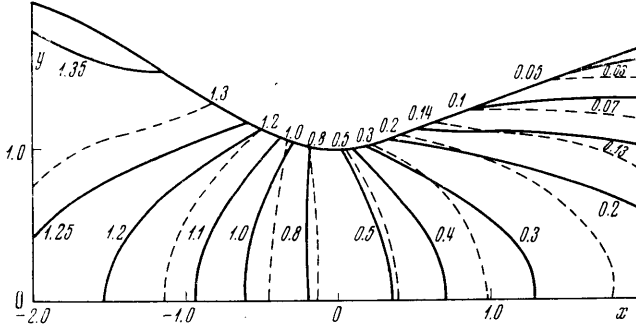
Разбиение области течения, расположенной между левой и правой границами сопла, и составление разностных уравнений, при помощи которых параметры на каждом новом временном слое (в момент времени  $t + \tau$ , где  $\tau$  — шаг по времени) вычисляются через параметры на уже известном слое (в момент времени  $t$ ), проводятся так же, как в работе [3].

2. Исследование влияния внешнего магнитного поля проводилось на примере течения газа, имеющего электропроводность  $\sigma^\circ = \sigma_*^\circ = \text{const}$  в случае осевого магнитного поля постоянной напряженности:

$$B_x^\circ = B_*^\circ = \text{const}, \quad B_y^\circ = 0$$

При этом в соответствии с выбором характерных величин  $B_*^\circ$  и  $\sigma_*^\circ$  и приведением к безразмерному виду в (1.3) следует положить  $B_x = \sigma = 1$ . Кроме того, в (1.3) опускаются слагаемые с  $B_y$ .

Профиль осесимметричного сопла задавался следующим образом. Цилиндрическую, сужающуюся и расширяющуюся части профиля канала составляли прямые, плавно сопряженные дугами окружностей одинакового радиуса  $r$ , равного радиусу критического сечения сопла. Прямолинейные участки сужающейся и расширяющей-



Фиг. 1

ся частей сопла наклонены к оси  $x$  под углами  $(-\alpha)$  и  $\beta$  соответственно. В качестве характерного линейного размера  $l_*^\circ$  выбирался радиус критического сечения, поэтому  $r = 1$ . Уравнение цилиндрического участка стенки имело вид  $y = 2$ , критическое сечение располагалось при  $x = 0$ , а выходное сечение соответствовало  $x = 2$ . «Левая граница» бралась при  $x = -3.5$ , и, наконец, угол расширяющейся части сопла  $\beta = 20^\circ$ .

Из (1.1) с учетом постоянства магнитного поля следует, что абсолютное значение поперечной силы определяется как  $Sv$ , т. е. в зависимости от величины  $v$  воздействие на поток, оказываемое этой силой, меняется. В связи с этим были выполнены расчеты для двух углов  $\alpha = 30^\circ$  и  $\alpha = 45^\circ$ .

Некоторые результаты расчета приведены на фиг. 1—7. На фиг. 1 изображены линии  $p = \text{const}$  для сопла с  $\alpha = 30^\circ$ . Сплошные кривые отвечают  $S = 5.0$ , а штриховые —  $S = 2.0$ . Цифры около кривых — значения  $p$ , причем цифры, расположенные над контуром сопла, соответствуют случаю  $S = 2.0$ .

Как видно из графиков, увеличение  $S$  значительно усиливает неоднородность потока как в дозвуковой, так и в сверхзвуковой части сопла. Если обозначить разность между давлением на оси и давлением на стенке при фиксированном значении  $x$  через  $\Delta p$ , то увеличение неоднородности выражается, в частности, в увеличении  $\Delta p$  вблизи выходного сечения. При этом для  $S = 5.0$  давление на оси в сечении выхода на порядок превышает давление на стенке, в то время как для  $S = 0$  отношение этих величин равно 1.4.

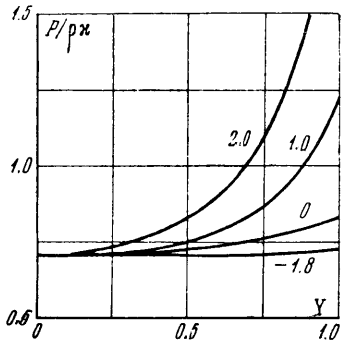
Изменение знака  $\Delta p$  при переходе из сужающейся части сопла к расширяющейся объясняется изменением направления действующей силы  $F$ . Последняя в силу (1.1) и (1.2) направлена от оси к стенке при сужении канала, когда  $v < 0$ , и от стенки к оси — при расширении, когда  $v > 0$ .

Эффекты магнитного поля сказываются не только в виде силового воздействия на поток, но и в джоулевой диссипации. Используя уравнение энергии в комбинации с двумя проекциями уравнения движения, можно получить следующее соотношение для стационарного течения

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^x} \right) = S \frac{x-1}{\sigma \rho^x} j^2 \quad (2.1)$$

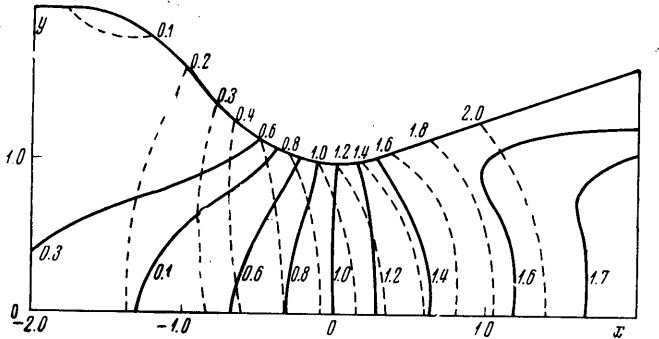
где  $d/dt = u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$  — полная производная вдоль линии тока.

В силу (2.1) движение газа по соплу сопровождается ростом величины  $p/\rho^x$  или удельной энтропии  $s \sim \ln p/\rho^x$ , которая в свою очередь зависит от  $j^2$  и, следо-



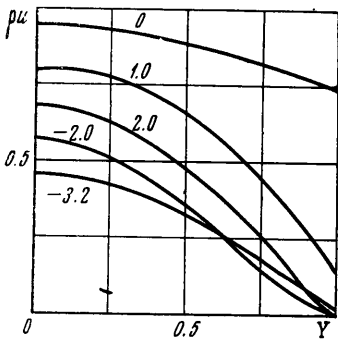
Фиг. 2

вательно, различна на разных линиях тока. Таким образом, в сечениях сопла, отличных от левой границы, где  $p/\rho^* = \text{const}$ , возникает неоднородность, тем более выраженная, чем больше параметр  $S$ . Достаточно отчетливо это видно из фиг. 2, представляющей изменение величины  $p/\rho^*$  в нескольких сечениях  $x = \text{const}$  для случая  $\alpha = 45^\circ$  и  $S = 5.0$ . Здесь и далее  $Y = y/y_w$ , где  $y_w$  — ордината стенки при том же  $x$ . Значения  $x$  выбранных сечений указаны цифрами у кривых.

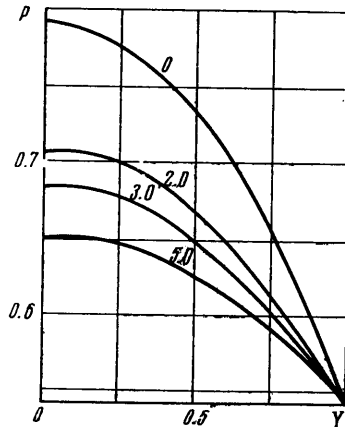


Фиг. 3

Увеличение с ростом  $S$  неоднородности как в распределении давления, так и в распределении энтропии приводит к увеличению неоднородности в распределении и других параметров, в частности числа Маха. Это видно из рассмотрения фиг. 3, на которой для двух значений  $S$  даны линии  $M = \text{const}$  для сопла с  $\alpha = 45^\circ$ . Сплошные кривые соответствуют  $S = 4.0$ , а штриховые —  $S = 0$ . Цифры около кривых — значения  $M$ , при этом цифры, расположенные под контуром сопла, соответствуют случаю  $S = 0$ .



Фиг. 4



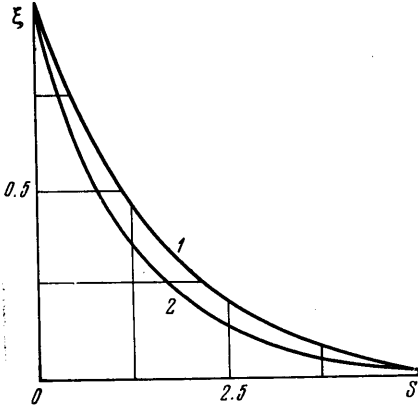
Фиг. 5

Как и следовало ожидать из сказанного ранее, влияние магнитного поля, особенно заметное в пристеночных областях сужения и расширения канала, вызывает существенное различие в величине числа Маха на оси и на стенке (при  $x \neq 0$ ). Более того, в сверхзвуковой части сопла различается и характер изменения числа Маха (на оси и на стенке) в зависимости от  $x$ . Если на оси  $M$  с ростом  $x$  всегда увеличивается, то на стенке уже для  $S = 0.5$  и больше, начиная с некоторого  $x$ , число Маха уменьшается.

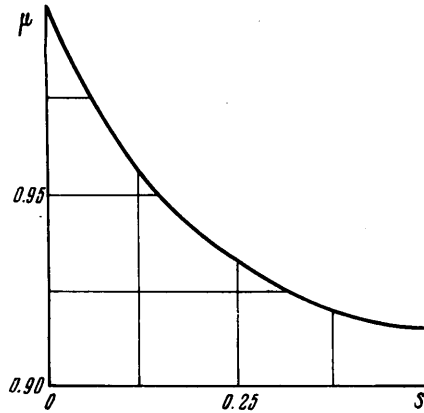
Анализ фиг. 1 и фиг. 3 позволяет выявить общую закономерность в изменениях конфигурации линий постоянства числа Маха и давления, наиболее выраженную вблизи оси симметрии. Эта закономерность состоит в удалении соответствующих линий  $M = \text{const}$  и  $p = \text{const}$  в обе стороны от критического сечения. Удаление указанных линий растет с ростом  $S$ . При этом основная масса газа течет как бы в некотором фиктивном канале с более плавными стенками, чем у действительного сопла. Степень сужения и расширения этого канала с ростом  $S$  уменьшается. Сделан-

ный вывод подтверждается и фиг. 4, на которой в случае  $S = 5.0$  и  $\alpha = 45^\circ$  для ряда сечений сопла (цифры — значения  $x$ ) даны распределения плотности тока  $\rho u$  как функции  $Y$ .

Тот факт, что большая часть газа ускоряется в пологом сопле, объясняет выравнивание распределения давления (см. фиг. 5, где цифры над кривыми — значения  $S$ ) и числа Маха в критическом сечении. Выравнивание полей давления и чис-



Фиг. 6



Фиг. 7

ла Маха при  $x = 0$  следует также из рассмотрения фиг. 1 и фиг. 3. Кроме того, указанный характер течения сказывается и в изменении положения звуковой линии. Это следует, например, из фиг. 6, на которой представлено перемещение точек пересечения звуковой линии с осью и стенкой относительно критического сечения. При рассмотрении этой фигуры следует иметь в виду, что точки пересечения с осью лежат справа от сечения  $x = 0$ , а со стенкой — слева, и  $\xi = x/x_0$ , где  $x$  и  $x_0$  — координаты пересечения звуковой линией оси (кривая 1) или стенки (кривая 2) при данном значении  $S$  и  $S = 0$  соответственно.

Как уже отмечалось ранее, расчеты проводились для сопел, отличающихся углами  $\alpha$  наклона стенки сужающейся части сопла. На основании сравнения результатов расчетов для сопел с  $\alpha = 45^\circ$  и  $\alpha = 30^\circ$  установлено, что закономерности, отмеченные выше, одинаково справедливы для обоих случаев. При этом влияние угла  $\alpha$  на течение в большей части сопла (в частности, в областях трансзвуковых и сверхзвуковых скоростей) с ростом  $S$  исчезает почти полностью.

Для оценки влияния магнитного поля на расход газа проводились расчеты коэффициента расхода  $\mu$ . Последний определялся как отношение расхода, полученного из численного решения задачи для данного  $S$  к расходу, вычисленному при  $S = 0$ . Результаты расчетов представлены на фиг. 7. Различия соответствующих результатов для  $\alpha = 30^\circ$  и  $\alpha = 45^\circ$  не превышало 1%, что лежит в пределах погрешности вычислений. Поэтому на фиг. 7 вместо двух кривых  $\mu = \mu(S)$  приведена одна (средняя) кривая.

Несмотря на то что увеличение параметра МГД-взаимодействия приводит к выравниванию распределений в критическом сечении давления и числа Маха, величина коэффициента расхода с ростом  $S$  уменьшается. Одной из главных причин, обуславливающих такой характер зависимости  $\mu$  от  $S$ , является рост энтропии, вызванный джоулевой диссипацией, и, как следствие, уменьшение плотности тока  $\rho u$ .

Все расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-4 с числом расчетных точек, равным 400. Время установления составляло 2—4 часа.

В заключение автор благодарит М. Я. Иванова, любезно предоставившего программу расчета течения непроводящего газа, а также А. Б. Ватажина и А. Н. Крайко за полезные советы.

Поступило 11 II 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики. Матем. сб., 1959, т. 47 (89), вып. 3, стр. 271—306.
2. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с ото-

- педшей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ. 1961, т. 1, № 6, стр. 1020—1050.
3. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5, стр. 77—83.
  4. Хейнс Ф. Д., Йоллер Ю. А., Элерс Э. Гидромеханический поток с осевой симметрией в канале. В сб. «Ионные, плазменные и дуговые ракетные двигатели», М., Атомиздат, 1961, стр. 382—405.
  5. Бам-Зеликович Г. М. Движение осесимметричной струи газа с малой проводимостью в осесимметричном магнитном поле. Докл. АН СССР, 1960, т. 131, № 1, стр. 47—51.
  6. Кацкова О. Н., Чушкин П. И. Течение проводящего газа в сверхзвуковом сопле. Магнитная гидродинамика, 1966, № 4, стр. 11—18.
  7. Брушлинский К. В., Герлах Н. И., Морозов А. И. Двумерное стационарное течение хорошо проводящей плазмы в коаксиальной системе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2, стр. 189—192.
  8. Migdal D., Klein K., Moretti G. Time — dependent calculations for transonic nozzle flow. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 2, pp. 372—374.
  9. Киреев В. И., Лифшиц Ю. Б., Михайлов Ю. Я. О решении прямой задачи сопла Лавала. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1, стр. 8—13.
  10. Дьяконов Ю. Н., Пчелкина Л. В. О прямой задаче для сопла Лавала. Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 2, стр. 301—304.