

УДК 536.24

Пороговое возбуждение фотоабсорбционной конвекции

Б. М. БЕРКОВСКИЙ, Л. П. ИВАНОВ

(Минск)

Обсуждаются вопросы устойчивости равновесных состояний поглощающей свет жидкости. Найдены пороговые значения интенсивностей света в задаче об устойчивости равновесия жидкости в квадратной полости с тремя теплоизолированными стенками. Приведена стационарная интегро-интерполяционная схема численного решения задач фотоабсорбционной конвекции.

Распространение световых волн в поглощающих средах сопровождается диссипацией лучистой энергии. В тяжелых жидкостях абсорбционное нагревание вещества в поле волны может явиться причиной возникновения конвекции [1-3]. Представляет интерес изучить условия появления и особенности такой конвекции, ее обратное воздействие на структуру светового поля. Первая задача важна там, где пучки света рассматриваются только как источник конвекции [4], вторая — в вопросах направленного распространения света [5] и явлениях самофокусировки [2, 3, 6-10]. Для мощных потоков света и жидкостей с сильной зависимостью диэлектрической проницаемости от температуры конвективное самовоздействие будет весьма существенно, обе задачи в этом случае взаимосвязаны.

Возбуждение конвекции за счет поглощения света без рассмотрения обратного влияния на структуру светового пучка изучалось численно в работах [1, 4]. Уравнения фотоабсорбционной конвекции (ФАК) с учетом конвективного самовоздействия в приближении Буссинеска и геометрической оптики сформулированы в работе [1]. Некоторые экономичные конечно-разностные схемы решения задач ФАК в прямоугольных полостях обсуждались в работе [12].

Данная статья посвящена исследованию порогового по интенсивностям света возбуждения ФАК. На существование критических интенсивностей света, выше которых механически равновесные состояния поглощающих свет жидкостей становятся неустойчивыми, было указано в [1, 4].

1. Запишем уравнения ФАК. В масштабах размеров и времени, которые много больше длины и периода волны ($\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5}$ см, $T \sim 10^{-5}$ сек), хорошее качественное описание распространения света дает метод геометрической оптики (ГО). В приближении ГО напряженности электрического E и магнитного поля H монохроматической волны ищутся в виде $A(\mathbf{r}) \exp[i(\omega t - \mathbf{kr})]$, где фаза L удовлетворяет уравнению эйконала

$$\nabla^2 L = \epsilon \mu = n^2 \quad (1.1)$$

а амплитуда A — уравнению переноса

$$2\nabla A \nabla L + A \nabla^2 L = 0 \quad (1.2)$$

В поглощающих средах показатель преломления n , диэлектрическая ϵ и магнитная μ проницаемости, а следовательно, L и A являются комплексными функциями. Действительная и мнимая части n , ϵ и μ являются функциями термодинамических параметров: температуры, давления. Поглощенная энергия определяется выражением

$$Q = \frac{\omega}{4\pi} (\epsilon_2 \langle E^2 \rangle + \mu_2 \langle H^2 \rangle) \quad (1.3)$$

$$\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2, \quad \mu = \mu_1 + i\mu_2$$

где угловые скобки означают усреднение по времени. Источники (1.3) необходимо учитывать в уравнениях конвективного теплообмена

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \nabla p / \rho + \nu \Delta \mathbf{v} - \beta T \mathbf{g} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \kappa \Delta T + Q \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (1.6)$$

Система уравнений (1.1) — (1.6) вместе с зависимостями $n_i = n_i(T, P)$, $\varepsilon_i = \varepsilon_i(T, P)$, $\mu_i = \mu_i(T, P)$, соответствующими краевыми и начальными условиями описывает ФАК и структуру стационарного светового поля. Оптическую часть выписанной системы можно, однако, упростить. Действительно, приближение Буссинеска предполагает, что перепады температуры невелики, следовательно, не должны быть велики тепловыделения за счет поглощения. Это имеет место, если ответственные за абсорбцию мнимые части ε , μ , n малы (точнее, удовлетворяют условиям $n_2/n_1 \ll 1$, $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \ll 1$, $\mu_2/\mu_1 \ll 1$) и интенсивности не очень велики. Тогда уравнения (1.1), (1.2) можно интегрировать без учета комплексности проницаемостей ε , μ и показателя преломления. Решение уравнения эйконала (1.1) с начальным условием $L(s=0) = L_0$ записывается в виде

$$L(s) = L_0 + \int n ds \quad (1.7)$$

Интегрирование в (1.7) проводится вдоль траектории лучей $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, уравнение которых

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (1.8)$$

Поглощенная энергия подсчитывается также вдоль траекторий по формуле

$$Q^*(s) = I_0 k(n/n_0) \exp \left\{ - \int [(\nabla^2 L)/n + k] ds \right\} \quad (1.9)$$

где k — коэффициент поглощения.

В том же приближении показатель преломления следует считать линейной функцией температуры

$$n = n_0 \left(1 + \frac{\partial n}{\partial T} \Delta T \right) \quad (1.10)$$

а зависимостью коэффициента поглощения от температуры можно пренебречь [13, 14].

2. Система уравнений ФАК (1.4) — (1.10) допускает ряд решений, соответствующих неизотермическим механически равновесным состояниям. Приведем некоторые из них: вертикальный цилиндр с теплоизолированными боковыми стенками с равномерным пучком света, параллельным оси цилиндра, параллелепипед при тех же тепловых условиях и пучком, распространяющимся параллельно гравитационному полю. На горизонтальных поверхностях в обоих случаях можно задать температуру или тепловые потоки.

Возникает вопрос об устойчивости механического равновесия поглощающей свет жидкости. Изучим неустойчивость на примере горизонтальной бесконечной полости квадратного сечения со стороной, равной l . Боковые и нижнюю стенки будем считать теплоизолированными, верхнюю

поддерживать при постоянной температуре T_0 . Горизонтальные стенки прозрачны для излучения. Равномерный пучок света интенсивности I_0 , параллельный гравитационному полю, проходит полость в направлении сверху вниз $x = x(y, x_0, x_0')$, $x_0' = 0$. Необходимые безразмерные уравнения ФАК в декартовой системе координат выписаны ниже

$$\Theta_t + \psi_y \Theta_x - \psi_x \Theta_y = -(1/\text{Pr}) \Delta \Theta + Q \quad (2.1)$$

$$\omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = \Delta \omega + \Theta_x \quad (2.2)$$

$$\Delta \psi + \omega = 0 \quad (2.3)$$

$$(1 + Hn\Theta)x'' = Hn(1 + x'') \left[\frac{\partial \Theta}{\partial x} - x' \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right] \quad (2.4)$$

$$L = L_0(x_0, x_0') + \int_0^1 (1 + Hn\Theta) \sqrt{1 + x'^2} dy \quad (2.5)$$

$$Q^* = HkB(1 + Hn\Theta) \exp \left[- \int_0^1 \sqrt{1 + x'^2} \left(\frac{\nabla L}{1 + Hn\Theta} + B \right) dy \right] \quad (2.6)$$

Однородность граничных условий позволяет произвольно выбрать характерную температуру. В качестве нее возьмем величину $\Delta T = v^2 / g\beta l^3$.

Система (2.1) — (2.6) содержит следующие безразмерные параметры:

$$Hk = l^4 g\beta I_0 / v^3 \rho c_p \quad Hn = \frac{1}{n_0} \frac{\partial n}{\partial T} \Delta T \quad (2.7)$$

$$B = lk, \quad \text{Pr} = v/\kappa$$

Параметр Hk характеризует интенсивность источников, B — поглощательную способность (оптическая глубина), Hn — зависимость показателя преломления от температуры, Pr — число Прандтля. Приведем некоторые оценки порядка и диапазона изменения этих величин. При $T = 20^\circ \text{C}$, $l = 0.1 \text{ мм}$ и $I_0 = 1.35 \text{ квт/м}^2$ (освещенность, создаваемая прямыми солнечными лучами) параметр Hk для газов и жидкостей изменяется в пределах от 10^{-4} до 10^{14} ; большие значения параметра Hk соответствуют газам, малые — тяжелым жидкостям. Для воды, этилового спирта и толуола при тех же условиях Hk принимает значения $7,8 \cdot 10^7$, $3,5 \cdot 10^8$ и $3,2 \cdot 10^9$ соответственно. Оптическая глубина B при этом лежит в пределах от 10^{-5} (газы в окне прозрачности) до 10^4 (растворы красителей). Диапазон изменения параметра Hn для комнатных температур от 10^{-5} до 10^{-12} . Для воздуха, воды и этилового спирта $Hn = 4,8 \cdot 10^{-12}$; $2,4 \cdot 10^{-11}$ и $6,5 \cdot 10^{-11}$ соответственно.

Выпишем граничные условия

$$\begin{aligned} \psi = \psi_x = 0, \quad \Theta_y = 0, \quad y = 0 \\ \psi = \psi_x = 0, \quad \Theta = 0, \quad y = 1 \\ \psi = \psi_y = 0, \quad \Theta_x = 0, \quad x = 0,1 \\ x(1) = 0, \quad x'(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Краевая задача (2.1) — (2.8) имеет следующее решение, соответствующее неизотермическому механически равновесному состоянию

$$x = x_0, \quad \psi_0 = 0, \quad \omega_0 = 0$$

$$\Theta_0 = (HkPr/B) \{1 - \exp(-B)B(1-y) - \exp[B(y-1)]\} \quad (2.9)$$

Анализ выражения (2.9) показывает, что температура жидкости растет сверху вниз. Максимальное значение Θ (нижняя грань полости) пропорционально параметру Hk , а следовательно, интенсивности падающего света. Равновесие жидкости, подогреваемой снизу, как известно на примере рэлеевской задачи, неустойчиво [15]. Поэтому следует ожидать, что и в рассматриваемом случае существуют критические значения интенсивности света, при которых равновесное состояние нарушается.

Конвекция в полости должна появляться при определенных соотношениях между параметрами Hk , Pr и B .

Изучим вопрос об устойчивости решения (2.9) относительно малых возмущений

$$x = x_0 + x_1, \quad \Theta = \Theta_0 + \Theta', \quad \psi = \psi', \quad \omega = \omega'$$

Подставляя эти выражения в дифференциальные уравнения (2.1) — (2.4) и граничные условия (2.8), пренебрегая членами второго порядка малости, получаем следующую линеаризованную систему уравнений:

$$x_1'' = 0 \quad (2.10)$$

$$\omega_1' + \Delta\omega' + \Theta_x' = 0 \quad (2.11)$$

$$\Delta\psi' + \omega' = 0 \quad (2.12)$$

$$\Theta_1' + \Delta\Theta' + c\psi_1' = 0 \quad (2.13)$$

Граничные условия для возмущений совпадают с (2.8). Здесь $d = Hk Pr^2 \exp(-B)$, а $c = d[1 - \exp(By)]$.

Докажем справедливость принципа смены стационарных состояний. Для этого перепишем уравнения (2.11) — (2.13) в матричном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \omega' \\ 0 \\ \Theta' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 1 & \Delta & 0 \\ 0 & c & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega' \\ \psi' \\ \Theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или $\Phi_t' + D\Phi = 0$.

В работе [16] установлено, что самосопряженность матричного оператора обеспечивает отсутствие колебательной неустойчивости системы (2.11) — (2.13). Используя граничные условия (2.8), покажем, что оператор D является самосопряженным

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \varphi^* D\varphi \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^1 (\omega^* \Delta\omega + \omega^* \Theta_x + \psi^* \omega + \\ &+ \psi^* \Delta\psi + c\Theta^* \psi + \Theta^* \Delta\Theta) \, dx \, dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (\omega \Delta\omega^* + \omega \Theta_x^* + \psi \omega^* + \psi \Delta\psi^* + c\Theta \psi^* + \Theta \Delta\Theta^*) \, dx \, dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (D\varphi^*) \varphi \, dx \, dy \end{aligned}$$

Для нахождения условий возбуждения ФАК в жидкости стационарную систему уравнений (2.11) — (2.13) с граничными условиями (2.8) решим аналитически. Выразим поле температур $\Theta(x, y)$ через функцию тока $\psi(x, y)$ при помощи интегрального синус-преобразования Фурье. Получим

$$\Theta(\psi) = - (4/\pi^2) \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{\sin(p\pi x) \sin(q\pi y)}{p^2 + q^2} \times \\ \times \int_0^1 \int_0^1 c\psi_x \sin(p\pi x) \sin(q\pi y) dx dy$$

После этого систему уравнений легко свести к одному уравнению четвертого порядка для функции тока

$$\Delta \Delta \psi = \frac{\partial}{\partial x} \Theta(\psi) \quad (2.14)$$

Полученное уравнение (2.14) решим при помощи метода Галеркина. Отметим, что безразмерная функция тока ψ зависит только от двух параметров $Hk Pr^2$ и B . Базисные функции, удовлетворяющие однородным граничным условиям (2.8), выберем в виде

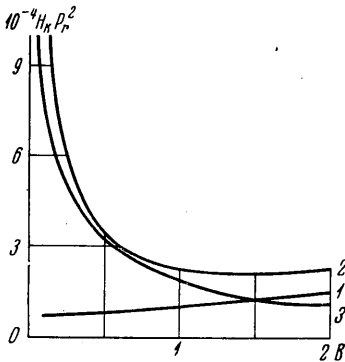
$$\psi_{mn} = (1 - \cos 2\pi x) (1 - \cos 2\pi y) \cos(m\pi x) \cos(n\pi y)$$

Функция тока ψ раскладывается в ряд по выбранным базисным функциям с коэффициентами α_{mn}

$$\psi = \sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha_{mn} \psi_{mn} = \\ = (1 - \cos 2\pi x) (1 - \cos 2\pi y) \sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha_{mn} \cos(m\pi x) \cos(n\pi y)$$

Расчет проводился с одной, двумя и четырьмя базисными функциями.

Получены критические значения безразмерного комплекса $Hk Pr^2$, при котором начинается конвекция для заданного значения оптической глубины B (фиг. 1). Кривая 1 соответствует случаю, когда бралась одна базисная функция ψ_{00} , кривая 2 — ψ_{00} и ψ_{01} . Учет третьей ψ_{10} и четвертой ψ_{11} базисных функций позволяет определить вторые критические значения параметра $Hk Pr^2$. По величине они оказываются примерно в пять раз больше нижних критических значений комплекса $Hk Pr^2$ для одних и тех же значений B .



Фиг. 1

3. Решим теперь нелинейную задачу об устойчивости. Решение уравнений для функций Θ , ψ и ω будем искать методом сеток. Систему конечно-разностных уравнений для уравнений (2.1) — (2.3) получим следующим образом. Построим сетку с шагом $h_x = h_y = h$. В произвольно выбранном узле сетки поместим контрольный объем со стороной h .

Уравнения (2.1) — (2.3) проинтегрируем по контрольному объему [17]. Сделаем ряд упрощающих предположений. Будем считать, что функции Θ и ω в контрольном объеме постоянны, а ψ в любом из уг-

лов этого объема равна среднему арифметическому четырех окружающих точек сетки. Кроме этого, учтем направление движения жидкости [17]. Получим следующую систему конечноразностных уравнений:

$$\Theta_{ij} = \left[\left(A_e + \frac{1}{Pr} \right) \Theta_{i+1,j} + \left(A_s + \frac{1}{Pr} \right) \Theta_{i,j-1} + \left(A_w + \frac{1}{Pr} \right) \Theta_{i-1,j} + \left(A_n + \frac{1}{Pr} \right) \Theta_{i,j+1} - Q_{ij}^* \right] / \left(a + \frac{4}{Pr} \right) \quad (3.1)$$

$$\psi_{ij} = [\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} + \omega_{ij} h^2] / 4 \quad (3.2)$$

$$\omega_{ij} = [(A_e + 1) \omega_{i+1,j} + (A_s + 1) \omega_{i,j-1} + (A_w + 1) \omega_{i-1,j} + (A_n + 1) \omega_{i,j+1} + 0,5h(\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i-1,j})] / (a + 4) \quad (3.3)$$

где

$$\gamma_1 = \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i,j-1} - \psi_{i,j+1} - \psi_{i+1,j+1}$$

$$\gamma_2 = \psi_{i-1,j-1} + \psi_{i-1,j} - \psi_{i+1,j} - \psi_{i+1,j-1}$$

$$\gamma_3 = \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1} - \psi_{i-1,j-1}$$

$$\gamma_4 = \psi_{i+1,j+1} + \psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j} - \psi_{i-1,j+1}$$

$$A_e = 1/8(\gamma_1 + |\gamma_1|), \quad A_s = 1/8(\gamma_2 + |\gamma_2|)$$

$$A_w = 1/8(\gamma_3 + |\gamma_3|), \quad A_n = 1/8(\gamma_4 + |\gamma_4|)$$

$$a = A_e + A_s + A_w + A_n$$

Уравнение для траектории лучей решалось методом Рунге — Кутты. Граничные условия в разностной форме имеют вид

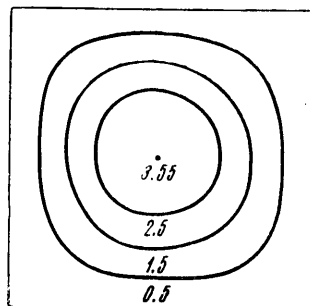
$$\psi_{i,0} = \psi_{i,N} = \psi_{0,j} = \psi_{N,j} = 0 \quad (3.4)$$

$$\Theta_{i,N} = 0, \quad \Theta_{0,j} = \Theta_{1,j}, \quad \Theta_{N,j} = \Theta_{N-1,j}, \quad \Theta_{i,0} = \Theta_{i,1} \quad (3.5)$$

$$\omega_{0,j} = (\psi_{2,j} - 8\psi_{1,j}) / 2h^2 \quad (3.6)$$

На остальных границах краевые условия для завихренности запишутся аналогично. Порядок аппроксимации полученной разностной схемы — h .

Процесс решения системы уравнений (3.1) — (3.3), (2.4) — (2.6) с граничными условиями (3.4) — (3.6) был следующим. Пусть известны значения функции Θ в узлах сетки. Из уравнения (2.4) находим траектории лучей $x(y)$ и $x'(y)$ с учетом интерполированных значений Θ . Вдоль найденной траектории лучей определяем значения источника Q , которые затем интерполируем на узлы сетки. Далее из уравнений (3.1) — (3.3) определяем новые значения функций Θ , ψ и ω , причем все три функции в каждом узле сетки считаем вместе. На этом итерационный цикл заканчивается. В целях экономии машинного времени расчет источников после установления с заданной точностью производился после пяти итерационных циклов. За начальное приближение принималось решение (2.9) или значения функций Θ , ψ и ω , полученные при других значениях параметров Hk , Pr и B . Использовались сетки 11×11 , 15×15 , 21×21 . Основные результаты получены на сетке 21×21 , причем максимальные значения функции тока отличаются от ψ_{\max} на сетках 11×11 и 15×15 на 9,6% и 3,3% соответственно при значениях параметров $Hk = 10^5$, $Pr = B = 1$. Вычисления проводились на ЭВМ «Минск-22». Диапазон изменения параметров $10^3 \leq Hk \leq 5 \cdot 10^5$, $0,1 \leq B \leq 2$, $0,5 \leq Pr \leq 4$, $Hn = 0,10^{-5}$.



Фиг. 2

Результаты, полученные по схеме первого порядка точности, оказываются несколько завышенными по сравнению с вычисленным решением по схеме второго порядка [18]. Так, на сетке 21×21 они отличаются один от другого на 4,8%.

Из фиг. 1 видно, что аналитическое решение (кривая 2), полученное для линеаризованной задачи с двумя базисными функциями, достаточно хорошо совпадает с кривой, рассчитанной численно (кривая 3) для $B \leq 2$.

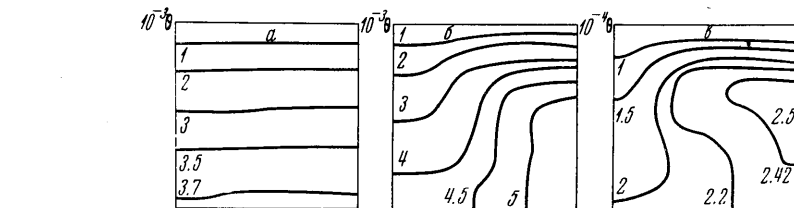
Характер этой кривой легко объяснить. При небольших значениях коэффициента поглощения тепловыделения малы и распределяются равномерно; для возбуждения конвекции необходимы большие значения интенсивности падающего света. Наоборот, при больших значениях коэффициента поглощения k тепловыделение в основном происходит у верхней границы. Так как температура верхней стенки поддерживается постоянной, то выделенное тепло интенсивно отводится через верхнюю стенку, и конвекция будет возникать при больших значениях интенсивности падающего излучения.

Пороговые значения интенсивности падающего света можно определять из кривых 2, 3 (фиг. 1). Так, для возникновения конвекции в воде, толуоле и этиловом спирте в кювете ($l = 0.1$ м), освещаемой светом с длиной волны $\lambda = 690$ мкм, требуются значения интенсивности падающего света $I_0 = 0.018$ мвт/см², 0.0008 мвт/см² и 0.004 мвт/см² соответственно. Напротив, возбуждение конвекции известной интенсивностью света в принципе позволяет определить коэффициент поглощения k .

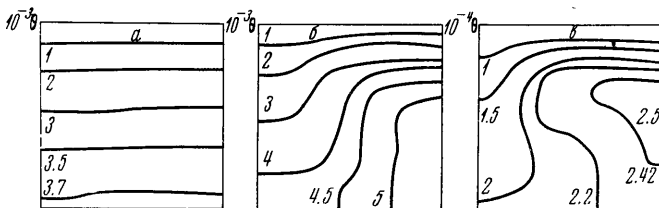
При достижении критических значений комплексом $Nk Pr^2$ в полости появляется конвекция. На фиг. 2 показана структура течения в полости при значениях параметров $Nk Pr^2 = 2.2 \cdot 10^4$ и $B = 0.5$. Ячейки расположены симметрично относительно центра квадрата и форма их при изменении Nk , Pr и B меняется незначительно. Численный расчет показал, что вторые критические значения параметров $Nk Pr^2$ и B соответствуют изменению структуры течения: в одном из углов квадрата появляется вторая ячейка.

На фиг. 3 представлена зависимость логарифма максимальной функции тока ψ от логарифма $Nk Pr^2$ для значений числа $B = 1, 0.5$. Можно отметить увеличение наклона кривых с уменьшением оптической глубины.

До возбуждения конвекции изотермы в полости представляют собой прямые горизонтальные линии. Конвекция существенно меняет их вид. На фиг. 4, а, б представлены послепороговые изотермы при постоянном значении оптической глубины $B = 1$ для значений параметра $Nk Pr^2 = 2 \cdot 10^4$ и $2.2 \cdot 10^4$ соответственно. При значении параметра $Nk Pr^2 > 1.2 \cdot 10^5$ в полости появляется вторая ячейка. На фиг. 4, в изображены изотермы при значении параметра $Nk Pr^2 = 2 \cdot 10^5$ для значения параметра $B = 1$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Авторы благодарят А. В. Лыкова за постоянное внимание и помощь, Г. И. Петрова и В. И. Полежаева за полезное обсуждение работы.

Поступило 14 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Берковский Б. М. О конвекции, возбуждаемой светом. Доклад на Всесоюзной конференции по аэротермооптике и лучеводам, 1969, Минск.
2. Аскарьян Г. А., Чистый И. Л. Тепловая самофокусировка в световом луче с уменьшенной интенсивностью вблизи оси. ЖЭТФ, 1970, т. 58, вып. № 1.
3. Аскарьян Г. А., Студенов В. В., Чистый И. Л. Тепловая самофокусировка в луче с уменьшенной интенсивностью вблизи оси. Усп. физ. н., 1970, т. 100, вып. № 3.

4. Берковский Б. М. Структура конвекции, возбуждаемой за счет поглощения света. В сб. «Исследования термогидродинамических световодов», Минск, ИТМО АН БССР, 1970, стр. 230—242.
5. Берковский Б. М., Мартыненко О. В., Жилкин А. М., Порохов О. Н. Теплогидродинамические световоды. Минск, «Наука и техника», 1969.
6. Литвак А. Г. О самофокусировке мощных световых пучков, связанной с тепловыми эффектами. Письма ЖЭТФ, 1966, т. 4, стр. 341.
7. Райзер Ю. П. Самофокусировка и расфокусировка, неустойчивость и стабилизация световых пучков в слабо поглощенных средах. ЖЭТФ, 1967, т. 52, вып. № 2.
8. Ахманов С. А., Горохов Ю. А., Криндач Д. П., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. Самофокусировка излучения газового лазера непрерывного действия. ЖЭТФ, 1969, т. 57, № 1.
9. Аскарьян Г. А., Студенов В. В. «Банановая» самофокусировка лучей. Письма ЖЭТФ, 1969, т. 10, вып. 3, стр. 113.
10. Сухоруков А. П. Тепловое самовоздействие интенсивных световых волн. Усп. физ. н., 1970, т. 101, вып. № 1.
11. Берковский Б. М. Фотоабсорбционная конвекция. В сб. «Аэротермооптика и лучеводы», Минск, ИТМО АН БССР, 1970, стр. 245—248.
12. Берковский Б. М., Ноготов Е. Ф. Фотоабсорбционная конвекция в полостях. Инж.-физ. ж., 1970, т. 19, № 6.
13. Коробков В. С. Физические проблемы спектроскопии. М., Изд. АН БССР, 1963.
14. Хэворд Г. Л. Инфракрасное излучение. М.—Л., «Энергия», 1964.
15. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу. Изв. АН БССР, ПИММ, 1966, № 6.
16. Davis S. H. Convection in a box: linear theory. J. Fluid Mech., 1967, vol. 30, pt 3, pp. 465—478.
17. Gasmon A. D., Pun W. N., Runchal A. K., Spalding D. B., Wolfstein M. Heat and mass transfer in rectilinear flows. S. I., Acad. Press., 1969.
18. Берковский Б. М., Ноготов Е. Ф. Численное исследование свободной конвекции при нагреве сверху. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
19. Самарский А. А. Лекции по теории разностных схем. М., 1969.