

УДК 532.517.4

## ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ К АНАЛИЗУ ПЛОСКИХ НЕАВТОМОДЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

А. Н. СЕКУНДОВ

(Москва)

Для замыкания уравнений, описывающих осредненное движение в турбулентных потоках, в ряде работ используется дифференциальное уравнение баланса кинетической энергии турбулентности. В данной работе на основе этого соотношения получено дифференциальное уравнение для турбулентной вязкости. Проведены численные расчеты несжимаемых неавтомоделных турбулентных и переходных течений в следе, струе и пограничном слое, уточнены универсальные постоянные, входящие в уравнение для вязкости. Аналитическими и численными методами исследовано течение в следе и пограничном слое с большими продольными градиентами давления. Получены безразмерные критерии, определяющие характер воздействия градиента давления на осредненное течение и турбулентную вязкость.

1. Вводные замечания. Первые соотношения, связывающие турбулентное трение  $\tau = -\rho \langle u'v' \rangle$  или турбулентную вязкость  $\epsilon$  с другими параметрами, были предложены Л. Прандтлем. Они представляли собой простые алгебраические связи между локальными значениями  $\tau$  или  $\epsilon$  и осредненными параметрами, например

$$\epsilon = l^2 |\partial u / \partial y| \quad \text{или} \quad \epsilon = k_0 b_u \Delta u_m \quad (1.1)$$

где  $l \equiv l(x)$  — так называемый «путь смещения»,  $b_u$  — характерная толщина исследуемой области с градиентом скорости  $|\partial u / \partial y| \neq 0$ ,  $\Delta u_m$  — максимальная разница средних скоростей в данном сечении,  $k_0$  — эмпирическая постоянная. Недостатки такого подхода, связанные с неуниверсальностью функции  $l(x)$  и постоянной  $k_0$ , особенно ярко проявляющиеся при исследовании неавтомоделных течений, заставили обратиться к более сложным соотношениям для  $\epsilon$ . Наиболее плодотворной оказалась идея о связи турбулентной вязкости  $\epsilon$  с кинетической энергией  $e$  и масштабом  $L$  турбулентности, впервые высказанная А. Н. Колмогоровым [1] и независимо Л. Прандтлем [2]

$$\epsilon = k \sqrt{e} L \quad (2e \equiv \langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle) \quad (1.2)$$

где  $2e$  — кинетическая энергия турбулентности, а  $L$  — некоторый интегральный масштаб турбулентности. В работах А. Н. Колмогорова, Л. Прандтля и И. Ротта [3] были получены дифференциальные соотношения для  $e$  и  $L$ , при этом были введены ставшие потом общепринятыми простые гипотезы о механизме переноса и диссипации  $e$ . Наличие дифференциальных соотношений для  $e$  устраняло главный недостаток формул (1.1), поскольку при этом турбулентная вязкость  $\epsilon$  оказывалась зависящей от предыстории течения и граничных условий, а следовательно, была более универсальной. Обзор первых работ, связанных с развитием такого подхода для расчета турбулентных течений дан в монографии А. С. Момина и А. М. Яглома [4].

В настоящее время различным вариантам использования уравнения баланса кинетической энергии турбулентности посвящены десятки работ. Наиболее детальное исследование этого уравнения применительно к течению в турбулентном пограничном слое сделано Г. С. Глушко [5], а применительно к струйным течениям — В. Родри и Д. Сполдингем [6]. В этих работах турбулентная вязкость описывается системой двух довольно сложных дифференциальных уравнений и одним алгебраическим уравнением, в которые входят эмпирические функции и постоянные. К более простым модификациям этого метода относится работа П. Бредшоу и др. [7], в которой применительно к течению в пограничном слое выведено уравнение для величины  $-\langle u'v' \rangle$ , и работа В. Нии и Л. Коважного [8], в которой из феноменологических соображений получено уравнение для  $e$ .

В данной работе сделана попытка получить дифференциальное уравнение для  $e$ , которое удовлетворяло бы следующим условиям: во-первых, было бы достаточно простым и доступным для анализа не только численными, но и аналитическими методами; во-вторых, чтобы это уравнение описывало достаточно широкий класс неав-

томодельных турбулентных и переходных течений в следе, струе, канале и пограничном слое. Имеющиеся данные свидетельствуют о том, что уравнение для  $\epsilon$  может оказаться менее чувствительным к неточностям аппроксимаций и более универсальным, чем соотношения для  $\epsilon$  и  $L$ , которые используются во многих работах. Так анализ известных данных о течении за решеткой [9], в том числе и при наличии градиента давления [10], показывает, что вдоль потока турбулентная вязкость остается приблизительно постоянной  $\epsilon = \text{const}$ , а параметры  $\epsilon$  и  $L$  изменяются по весьма сложным законам [11]. На основе исследования смешения струй переменного состава [12] можно сделать вывод о том, что  $\epsilon$  практически не зависит от градиента плотности. Слабая зависимость  $\epsilon$  от эффектов сжимаемости при умеренных значениях числа Маха отмечается в работе [13]. Эти факты позволяют выбрать турбулентную вязкость в качестве характеристики, наиболее пригодной для обобщения экспериментальных и теоретических результатов.

**2. Вывод уравнения.** Ограничимся рассмотрением плоских турбулентных течений и пренебрежем продольным переносом по сравнению с поперечным. В этом случае уравнение баланса кинетической энергии турбулентности выглядит следующим образом:

$$u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ v \frac{\partial \epsilon}{\partial y} - \left\langle v' \left( \frac{p'}{\rho} + \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2} \right) \right\rangle \right\} - \left\langle u'v' \right\rangle \frac{\partial u}{\partial y} - v \sum_{i,j=1}^3 \left\langle \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle \quad (2.1)$$

Здесь  $u$  и  $v$  — компоненты осредненной скорости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематическая вязкость, штрихи соответствуют пульсационным параметрам.

В большинстве известных работ, посвященных анализу уравнения (2.1), предполагается, что перенос энергии турбулентности имеет градиентный характер во всей области течения

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ - \left\langle v' \left( \frac{p'}{\rho} + \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2} \right) \right\rangle \right\} \approx \frac{\partial}{\partial y} \left\{ D_t \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right\} \quad (2.2)$$

где  $D_t$  — коэффициент диффузии энергии турбулентности.

Известно, что соотношение (2.2) нарушается вблизи оси течения в следе и в струе, однако протяженность этих участков невелика и ими можно пренебречь.

Диссипацию энергии турбулентности выразим через энергию  $\epsilon$  и масштаб  $L$  турбулентности по аналогии с работой [5] в виде суммы двух членов

$$\nu \sum_{i,j=1}^3 \left\langle \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle \approx \frac{k_1 \epsilon^{3/2}}{L} + \frac{k_2 \epsilon \nu}{L^2} \quad (2.3)$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (2.3) характеризует диссипацию энергии турбулентности при больших числах Рейнольдса, а второе — при малых. С учетом (2.2) и (2.3) преобразуем уравнение (2.1)

$$u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (D_t + \nu) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right\} - \frac{\langle u'v' \rangle}{e} \frac{\partial u}{\partial y} - \left( \frac{k_1 \epsilon^{3/2}}{L} + \frac{k_2 \epsilon \nu}{L^2} \right) \quad (2.4)$$

Примем, что поперек турбулентных потоков в области, где  $|\partial u / \partial y| \neq 0$ , величина комплекса  $L / \sqrt{\epsilon}$  приблизительно постоянна. Умножим уравнение (2.4) на  $kL / \sqrt{\epsilon}$ , используем соотношение (1.2) и преобразуем (2.4) к сле-

дующему виду:

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (D_t + \nu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right\} - \frac{\langle u'v' \rangle}{e} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2 u}{kL^2} \frac{\partial L}{\partial x \sqrt{e}} - \left( \frac{k_1 \varepsilon^2}{kL^2} + \frac{k_2 \varepsilon \nu}{L^2} \right) \quad (2.5)$$

Третье слагаемое в правой части уравнения (2.5) является следствием преобразованного конвективного члена с производной по  $x$ . Анализ известных экспериментальных данных об автомодельном течении в следе, зоне смешения, струе и пограничном слое [11] показывает, что в этих потоках выполняется приближенное равенство

$$u \frac{\partial L}{\partial x \sqrt{e}} \approx \text{const} = k_3 \quad (2.6)$$

Предполагая единство механизмов переноса импульса и энергии турбулентности в различных турбулентных потоках, примем, что коэффициент диффузии пропорционален турбулентной вязкости

$$D_t = \kappa \varepsilon \quad (2.7)$$

Величина  $\kappa$  по экспериментальным данным, собранным в работе [14], лежит в диапазоне  $1.3 < \kappa < 10$ , причем большие значения  $\kappa$  соответствуют точкам потока, где максимальна величина  $\varepsilon$ . Обобщение экспериментальных данных о различных турбулентных течениях, проведенное в [15], показывает, что в большей части течения в следе, струе и пограничном слое выполняется приближенное соотношение

$$-\frac{\langle u'v' \rangle}{e} = \alpha \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| / \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.8)$$

где постоянная  $\alpha$  лежит в диапазоне  $0.2 < \alpha < 0.4$ . С учетом соотношений (2.6), (2.7) и (2.8) уравнение (2.5) примет следующий вид:

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\kappa \varepsilon + \nu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right\} + \alpha \varepsilon \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| - \frac{k_2 \varepsilon}{L^2} (\beta \varepsilon + \nu) \quad (2.9)$$

$$\left( \beta \equiv \frac{k_1 - k_3}{k k_2} \right)$$

Однако даже в таком виде, впервые встречающемся в работе [8], уравнение для  $\varepsilon$  нельзя считать замкнутым, потому что в него входит неизвестная величина — масштаб турбулентности  $L$ . Рассмотрим постоянные  $k_i$ , входящие в диссипативный член уравнения (2.9).

В разных работах интегральный масштаб турбулентности  $L$  определяют по-разному, поэтому четкие диапазоны возможных значений  $k_i$  отсутствуют и можно лишь указать порядок величин этих коэффициентов. Так, по данным работ [5, 6] величина  $k \approx 1$ ,  $k_1 \approx 0.1$ ,  $k_2 \approx 4$ . Если определить масштаб  $L$  по поперечной корреляционной функции, то по данным работы [16]  $k = 0.1 - 1$ , а величина  $k_3 \approx 0.1$ .

Таким образом, видно, что значение постоянной  $\beta \sim (k_1 - k_3)$  близко к нулю и, следовательно, в потоках с  $L \neq 0$  при больших числах Рейнольдса последним членом в уравнении (2.9) можно пренебречь. Некоторым подтверждением этого вывода может служить также тот факт, что при течи за решеткой  $\varepsilon \approx \text{const}$ , а этот результат будет следовать из уравнения (2.9) только при отсутствии диссипативного члена. Условие  $L \neq 0$  всегда выполняется в свободных турбулентных потоках типа следа и струи.

Иначе обстоит дело в случае пристеночных потоков, где, как известно [11], вблизи стенки интегральный масштаб пропорционален расстоянию  $S$  до стенки ( $L \sim S$ ) и, следовательно, может обращаться в нуль. При этом диссипативный член в уравнении (2.9) будет играть заметную роль, даже если постоянная  $\beta$  мала. Примем, что для всех типов течений всюду масштаб  $L$  удовлетворяет соотношению

$$L \approx k_4 S \quad (k_4 = \text{const} \approx 0.4) \quad (2.10)$$

Вдали от стенки и в свободных потоках соотношение (2.10), естественно, будет нарушаться, однако в этих случаях член, содержащий  $L$ , будет малым и его влиянием можно пренебречь. С учетом (2.10) уравнение для турбулентной вязкости примет следующий окончательный вид:

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\kappa \varepsilon + \nu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right\} + \alpha \varepsilon \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| - \frac{\gamma \varepsilon}{S^2} (\beta \varepsilon + \nu) \quad (2.11)$$

$$\left( \gamma = \frac{k_2}{k_4^2} \geq 20 \right)$$

Более точное значение постоянных  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $\beta$ , входящих в уравнение (2.11), можно определить на основе сопоставления решений этого уравнения с опытными данными. С этой целью в последующих разделах будут приведены результаты численных расчетов струйных течений ( $S = \infty$ ), на основе которых будут определены постоянные  $\kappa$  и  $\alpha$ , расчет турбулентного пограничного слоя ( $S \neq \infty$ ), который позволит уточнить значения постоянных  $\gamma$  и  $\beta$ .

**3. Струйные течения.** Подходящим объектом для проверки теоретической модели турбулентной вязкости может служить течение в плоском следе за тонкой пластиной, которое достаточно подробно исследовано экспериментально [17-19]. Уравнения пограничного слоя, описывающие это течение, таковы:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\varepsilon + \nu) \frac{\partial u}{\partial y} \right\}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

причем градиентом давления в следе за пластиной можно пренебречь.

Если совместить ось  $x$  с осью симметрии течения в следе, а начало координат поместить на заднюю кромку пластины, то начальные и граничные условия для уравнений движения (3.1) и уравнения для вязкости (2.11) запишутся так:

$$u = u(y), \quad \varepsilon = \varepsilon(y) \quad (x = 0, y \geq 0)$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0 \quad (x \geq 0, y = 0)$$

$$u = U, \quad \varepsilon = 0 \quad (x \geq 0, y \rightarrow \infty) \quad (3.2)$$

Следует заметить, что уравнение для  $\varepsilon$  в этом случае заметно упрощается, так как в струйных потоках  $S = \infty$ .

В исходном сечении ( $x = 0$ ) профили  $u$  и  $\varepsilon$  можно задать на основе обобщения экспериментальных данных о турбулентном пограничном слое [11], а в небольшой окрестности точки  $x = y = 0$ , в которой  $u = 0$ , необходимо «сгладить» распределение продольной скорости так, чтобы всюду выполнялось условие  $u \geq 0.04U$ . В этом случае ошибки, связанные с нарушением условий справедливости уравнений пограничного слоя вблизи задней кромки пластины [20], будут минимальными.

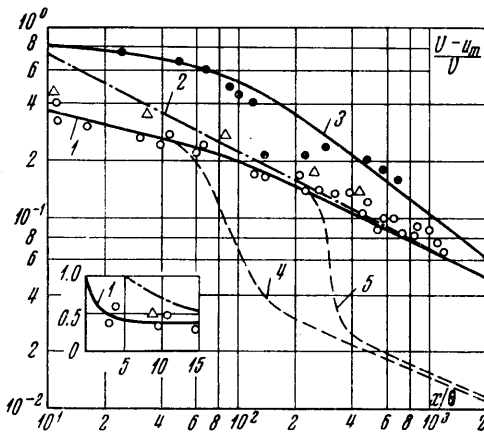
Система уравнений (3.1) и (2.11) совместно с условиями (3.2) решалась на ЭВМ типа БЭСМ-3М явным конечно-разностным методом [21], для

устойчивого счета шаг по  $x$  выбирался из условия

$$\Delta x \leq \frac{1}{2} \frac{u(\Delta y)^2}{(\kappa \varepsilon + \nu)} \quad (3.3)$$

Расчеты течения в следе показали, что максимальное значение турбулентной вязкости достигается на оси следа и ее величина определяется значением  $\alpha/\sqrt{\kappa}$ . Удовлетворительное согласование с опытными данными получалось при  $\alpha/\sqrt{\kappa} \approx 0.135$ , а наилучшее соответствие опытными данным формы поперечного распределения получилось при  $\kappa = 5$  и  $\alpha = 0.3$ . Следует заметить, что значение этих постоянных лежит в диапазоне, указанном в п. 2.

На фиг. 1 сопоставлены расчетные значения (кривая 1) осевого «дефекта» скорости ( $u_m$  — скорость на оси следа) при числе  $R = U\theta/\nu = 500$  ( $\theta$  — толщина потери импульса в исходном пограничном



Фиг. 1

слое) с опытными данными из работы [17] (треугольные значки) и работы [18] (светлые кружки). Видно хорошее совпадение расчетных и опытных данных, причем как те, так и другие вплоть до  $x \approx 150\theta$  существенно отличаются от автомодельного решения [22] (кривая 2), особенно это различие заметно на малых удалениях от пластины  $x < 15\theta$  (фиг. 1). Некоторое различие с опытными данными работы [17] объясняется тем, что последние получены при большем числе  $R = 1500$ .

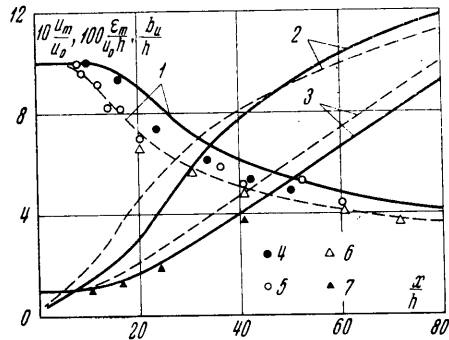
В области малых чисел Рейнольдса ( $R \leq 350$ ) возможен переходный режим течения, когда исходные пограничные слои ламинарны, а вдоль следа течение постепенно турбулизуется [18, 19]. Уравнение для турбулентной вязкости позволяет рассчитать такое течение, если задать исходный профиль  $u(y)$ , как в ламинарном пограничном слое, а величину турбулентной вязкости поло-

жить всюду в начальном сечении  $\varepsilon \ll \nu$ . На фиг. 1 расчетное значение осевого дефекта скорости (кривая 3) при числе  $R = 300$  сопоставлено с опытными данными из работы [19] (темные точки). Аналогичным способом был проведен расчет (с теми же значениями постоянных  $\kappa$  и  $\alpha$ ) неавтомодельного течения в струе, вытекающей со скоростью  $u_0$  из плоского сопла высотой  $2h$  в спутный поток небольшой скорости ( $U = 0.04u_0$ ). При расчетах использовалась система уравнений (3.1) и (2.11) с теми же граничными условиями (3.3), что и в следе. Начальные профили скорости  $u(y)$  и вязкости  $\varepsilon(y)$  задавались двух типов: соответствующие тонкому ( $\delta = 1/3h$ ) и толстому ( $\delta = h$ ) начальному пограничному слою на краях сопла.

На фиг. 2 приведены осевая скорость  $u_m/u_0$  (кривая 1), максимальная величина турбулентной вязкости  $\varepsilon_m/u_0h$  (кривая 2) и характерная толщина струи  $b_u/h$  (кривая 3), определенная по точкам, в которых скорость составляет половину максимального значения. Сплошные линии на фиг. 2 соответствуют тонкому, а пунктирные — толстому начальному пограничному слою. Здесь же приведены опытные данные об осевой скорости в плоской затопленной струе (точки 4, 5, 6 соответствуют работам [23–25]), а также данные о толщине струи (точка 7 соответствует работе [23]). Видно, что влияние начального пограничного слоя сравнительно слабо сказывается на закономерностях распространения затопленной струи. Опытные данные работы [23], полученные на профилированном сопле, лучше согласуются с расчетами при тонком начальном пограничном слое, а опытные данные других работ, полу-

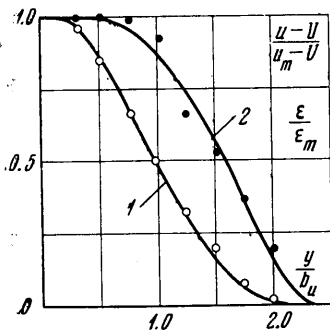
ченные при распространении струи из щелей, группируются около расчетной кривой, соответствующей толстому начальному пограничному слою. Поперечные расчетные профили скорости (кривая 1) и вязкости (кривая 2) в сечении  $x = 60h$  сопоставлены с данными работы [26] на фиг. 3.

В интегральных методах расчета течения в струе широко используется формула Л. Прандтля (1.1), при этом «постоянная»  $k_0$  оказывается неуниверсальной и наилучшее совпадение с опытными данными получается при различных значениях  $k_0$  в начальном и основном участках струи [27]. На основе разработанной модели этот результат можно получить теоретически, воспользовавшись численным расчетом неавтомоделного течения в плоской струе (фиг. 2) и определяя величину  $k_0$  по формуле (1.1) и расчетным данным о  $v$ ,  $u$  и  $b_u$ . Определенное таким образом значение  $k_0$  представлено на фиг. 4 в различных сечениях струи, здесь же штриховкой представлен диапазон используемых в настоящее время в расчетах значений  $k_0$  [27]. Отсюда видно, насколько лучше уравнение (2.11) для  $\epsilon$  учитывает неавтомоделность течения в струе по сравнению с формулой (1.1).

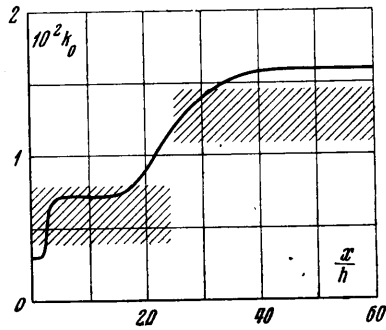


Фиг. 2

**4. Пограничный слой.** Течение в несжимаемом турбулентном пограничном слое описывается уравнениями (3.1) при  $dp/dx = 0$  и уравнением для вязкости (2.11). Если ось  $x$  направить вдоль поверхности и совместить



Фиг. 3



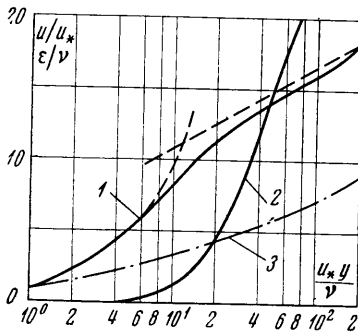
Фиг. 4

с ней начало координат, то в уравнении (2.11) можно положить  $S \equiv y$ , а начальные и граничные условия для этой системы уравнений запишутся так:

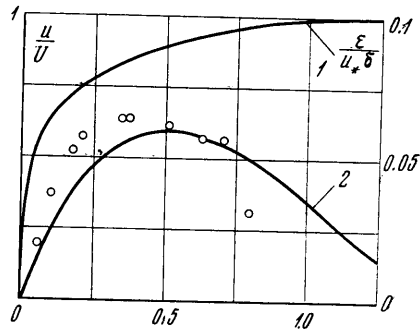
$$\begin{aligned} u &= u(y), & \epsilon &= \epsilon(y) & (x = 0, y \geq 0) \\ u &= v = \epsilon = 0 & (x \geq 0, y = 0) \\ u &= U, & \epsilon &= 0 & (x \geq 0, y \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Начальные профили  $u(y)$  и  $\epsilon(y)$  задавались по опытными данным для развитого турбулентного пограничного слоя [11]. Численный счет велся до сечения, в котором параметры пограничного слоя становились независимыми от формы начального распределения  $u$  и  $\epsilon$ . Наличие больших градиентов  $u$  и  $\epsilon$  в узкой пристеночной области затрудняет численный расчет пограничного слоя. Поэтому система уравнений преобразовывалась к новой поперечной координате  $\eta \sim \sqrt{y}$  для того, чтобы «растянуть» пристеночную часть пограничного слоя.

Конечно-разностная схема Дюфорта — Франкеля с незначительными изменениями была заимствована из работы [28], при этом удовлетворительная точность расчета пограничного слоя достигалась при сравнительно небольшом ( $\approx 120$ ) числе точек на профиле. Основное внимание при расчетах течения в турбулентном пограничном слое было обращено на выбор таких значений  $\gamma$  и  $\beta$  (при неизменных величинах  $\kappa$  и  $\alpha$ ), при ко-



Фиг. 5



Фиг. 6

торых получалось наилучшее согласование расчетных и опытных распределений  $u$  и  $\epsilon$  в пристеночной части пограничного слоя, т. е. в области ламинарного подслоя и логарифмического участка.

Анализ уравнений и численного расчета показал, что число Рейнольдса, вычисленное по «скорости трения»  $u_* \equiv \sqrt{\tau_w / \rho}$  и по толщине ламинарного подслоя  $\delta_*$ , определяется в основном значением постоянной  $\gamma$  в уравнении (2.11), так что  $u_* \delta_* / \nu \sim \sqrt{\gamma}$ . Участок пограничного слоя, где справедлив логарифмический закон профиля скорости, определяется произведением постоянных  $\gamma\beta$  и в пределах этого участка распределение вязкости почти линейно  $\epsilon \sim (\gamma\beta)^{-1} u_* y$ . Из условия совпадения этих законов с опытными данными были выбраны значения постоянных  $\gamma = 50$  и  $\beta = 0.06$ , которые только по порядку величины совпадают со значениями, приведенными в п. 2.

На фиг. 5 для числа Рейнольдса  $U\delta/\nu \approx 5 \cdot 10^4$  представлены профили  $u$  (кривая 1) и  $\epsilon$  (кривая 2) в пристеночной части пограничного слоя при  $\gamma = 50$  и  $\beta = 0.06$ . Пунктирные линии соответствуют линейному закону распределения скорости в ламинарном подслое и логарифмическому закону

$$\frac{u}{u_*} = 5.75 \log \frac{u_* y}{\nu} + 5.1$$

который обобщает многочисленные экспериментальные данные [14, 22]. Для сравнения на фиг. 5 представлен расчетный профиль скорости (кривая 3), полученный при использовании для  $\epsilon$  уравнения из работы [8]. Видно, что он значительно хуже соответствует экспериментальным данным.

На фиг. 6 приведено расчетное распределение скорости (кривая 1) и вязкости (кривая 2) во внешней части пограничного слоя, которое сопоставлено с опытными данными работы [14].

Хорошее согласование расчетных и опытных данных для следа, струи и пограничного слоя позволяет использовать уравнение для турбулентной вязкости с выбранными постоянными  $\kappa = 5$ ,  $\alpha = 0.3$ ,  $\gamma = 50$  и  $\beta = 0.06$  для исследования более сложных и малоизученных течений. Последующие разделы будут посвящены теоретическому и экспериментальному анализу турбулентных течений с большими продольными градиентами давления.

5. След с большим отрицательным градиентом давления. В отличие от известных работ по исследованию течения в плоском следе, в которых градиент давления мал [27, 29], в данной работе рассматривается воздействие большого градиента давления локализованного в сравнительно небольшой области. Экспериментальное исследование течения в плоском следе с градиентом давления проводилось на модели, подробно описанной в работе [18]. На расстоянии  $x_* = 100 - 150$  мм от кромки тонкой пластины длиной 120 мм поперечное сечение рабочей части аэродинамической трубы на длине 50 мм плавно сужалось в 2.05 раза и далее оставалось неизменным. По опытным данным градиент давления вдоль оси канала в области сужения хорошо аппроксимируется следующей зависимостью:

$$\frac{\theta_0}{\rho U_0^2} \frac{dp}{dx} = -0.03 \exp \left\{ - \left( \frac{x - x_*}{30\theta_0} \right)^2 \right\} \quad (5.1)$$

где  $U_0$  — скорость невозмущенного потока, а  $\theta_0$  — толщина потери импульса в исходном пограничном слое на пластине. При  $x > x_*$  с помощью X-образного термоанемометрического датчика была измерена величина  $\langle u'v' \rangle$  при изобарическом течении в следе и при наличии градиента давления. Как известно, при изобарическом течении в следе сохраняется постоянной величина  $\tau = -\langle u'v' \rangle_{\max} x \theta_0^{-1} U_0^{-2}$ , в области действия градиента давления и за ней соответствующая величина  $\tau_p$  значительно меньше.

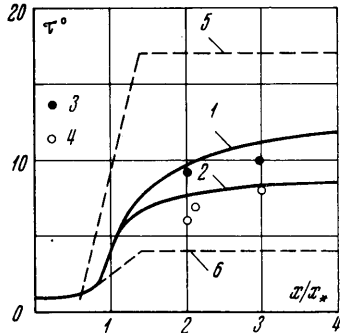
На фиг. 7 представлены полученные в настоящей работе экспериментальные данные о величине  $\tau^\circ = \tau/\tau_p$  вдоль следа. Неавтомодельность течения в следе при  $x < 150\theta_0$  [18] приводит к тому, что экспериментальные значения  $\tau^\circ$  расслаиваются в зависимости от параметра  $x_*/\theta_0$ . Так, точки, обозначенные цифрой 3 и соответствующие  $x_*/\theta_0 = 100$ , лежат выше точек, обозначенных цифрой 4 и соответствующих значению  $x_*/\theta_0 = 150$ .

Расчет течения в следе с градиентом давления осуществлялся по схеме, описанной в п. 3, а градиент давления в уравнении (3.1) задавался по формуле (5.1). Об интенсивности воздействия градиента давления на профили скорости в следе можно судить по результатам вычисления осевого дефекта скорости в следе, представленных на фиг. 1. Здесь кривая 4 соответствует значению параметра  $x_*/\theta_0 = 100$ , а кривая 5 — параметру  $x_*/\theta_0 = 300$ .

Расчетные значения относительной величины трения  $\tau^\circ$  вдоль следа для  $x_*/\theta_0 = 100$  (кривая 1) и  $x_*/\theta_0 = 300$  (кривая 2) представлены на фиг. 7. Видно, что  $\tau^\circ$  энергично возрастает в области действия градиента давления, а затем сравнительно медленно приближается к предельному значению, равному  $\tau_\infty^\circ = 12$  и 8.6 для двух рассмотренных случаев. Пользуясь тем, что область воздействия градиента давления мала, можно оценить значение  $\tau_\infty^\circ$  по второй формуле Л. Прандтля (1.1).

Используя зависимость  $\theta(U)$  из работы [27] и предполагая, что в области действия градиента давления толщина следа  $b_u \sim (U)^{-1}$ , получаем  $\tau_\infty^\circ = (U/U_0)^4 = 17.6$ .

Другой возможной гипотезой для вычисления  $\tau_\infty^\circ$  может служить предположение о постоянстве турбулентной вязкости вдоль следа  $\epsilon = \text{const}$ , в этом случае получим, что  $\tau_\infty^\circ = (U/U_0)^2 = 4.2$ .



Фиг. 7



Кривые 5 и 6, представленные на фиг. 7, приближенно описывают поведение  $\tau^\circ$  в соответствии с этими гипотезами. Видно, что экспериментальные данные лучше согласуются с результатами численного интегрирования уравнений движения и вязкости.

Рассмотрим поведение турбулентной вязкости  $\epsilon$  вдоль следа. В изобарическом следе максимальное значение турбулентной вязкости [18] равно  $\epsilon_m = 0.06 U\theta$ ; это соотношение соответствует формуле Л. Прандтля, так как вдоль следа  $b_u \Delta u_m \sim \theta U$ . Под действием большого отрицательного градиента давления величина  $U\theta$  резко убывает, однако турбулентная структура в следе не успевает измениться так же быстро, и вязкость меняется сравнительно мало. Поэтому в этой области течения формула Л. Прандтля нарушается, степень неточности этого соотношения зависит от величины градиента давления.

Попробуем на основе соотношения (2.11), которое, как уже отмечалось, дает хорошее совпадение с опытными данными, найти критерий, определяющий воздействие градиента давления на поведение турбулентной вязкости.

Рассмотрим интегральное уравнение для  $\epsilon$ , которое получается при интегрировании поперек следа уравнения (2.11) с учетом уравнения неразрывности

$$\frac{d}{dx} \int_0^b u \epsilon dy = \alpha \int_0^b \epsilon \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| dy \quad (5.2)$$

Примем, что профили вязкости и скорости подобны вдоль следа, т. е. имеют место соотношения

$$\epsilon = \epsilon_m \varphi(y/b), \quad |\partial u / \partial y| = \theta U b^{-2} \psi(y/b), \quad u \approx U \quad (5.3)$$

С учетом соотношений (5.3) уравнение (5.2) переписется так:

$$\frac{d}{dx} (\epsilon_m U b) = A (\epsilon_m \theta U b^{-1}) \quad (5.4)$$

где  $A$  — постоянная, зависящая от вида функций  $\varphi$  и  $\psi$ . Как уже отмечалось, в изобарическом следе сохраняется постоянной величина  $\epsilon^\circ \equiv \epsilon_m / U\theta$ . Выразим  $\epsilon_m$  через безразмерную величину  $\epsilon^\circ$  и подставим в (5.4)

$$\frac{d}{dx} (\epsilon^\circ \theta b U^2) = A (\epsilon^\circ \theta^2 U^2 b^{-1}) \quad (5.5)$$

Из уравнений движения (3.1) следует известное интегральное соотношение [27]

$$\frac{d}{dx} \theta = -(H + 2) \frac{\theta dU}{U dx} \quad (5.6)$$

где  $H$  — формпараметр профиля скорости, в следе  $H \approx 1$ . Здесь и всюду далее предполагается, что

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx}$$

Используем (5.6) для преобразования (5.5)

$$\frac{b}{\epsilon^\circ} \frac{d\epsilon^\circ}{dx} = \frac{\theta}{b} \left\{ A - \frac{b}{\theta} \frac{db}{dx} + \frac{b^2}{\theta U} \frac{dU}{dx} \right\} \quad (5.7)$$

Отсюда видно, что ускорение потока ( $dU/dx > 0$ ) приводит к возрастанию относительной величины вязкости в следе, причем интенсивность этого эффекта определяется значением параметра

$$\Phi \equiv \frac{b^2 dU}{\theta U dx} \quad (5.8)$$

Первые два слагаемых в правой части уравнения (5.7) имеют порядок единицы, следовательно, при малых значениях  $\Phi \ll 1$  воздействием градиента давления на турбулентную вязкость можно пренебречь и формула Л. Прандтля (1.1) справедлива. Условия эксперимента в работе [29] соответствовали именно такому случаю, в этих опытах  $\Phi \approx 0.01$ . Напротив, в данной работе величина  $\Phi \approx 1$  и турбулентная вязкость в области градиента давления оказалась значительно больше, чем по формуле (1.1), которая занижает значение  $\epsilon$ .

Нетрудно перенести те же рассуждения на случай течения в следе с положительным градиентом давления. При этом в соответствии с формулой (5.7) местное значение относительной турбулентной вязкости будет убывать и формула (1.1) будет давать завышенные значения  $\epsilon$ .

**6. Пограничный слой с градиентом давления.** Максимальными эффектами, которые может вызвать градиент давления, воздействуя на турбулентный пограничный слой, являются его отрыв, когда градиент давления положителен, и при достаточно большом отрицательном значении градиента давления — реламинаризация пограничного слоя. Рассмотрим, что дает уравнение для турбулентной вязкости в приложении к этим течениям.

Отрыв турбулентного пограничного слоя исследован достаточно подробно. Известно, что наступает он, когда градиент давления удовлетворяет такому условию [30, 31]:

$$\xi = \frac{\theta}{\rho U^2} \frac{dp}{dx} \approx 0.005 \quad (6.1)$$

Система уравнений (3.1), (2.11) позволяет рассчитать течение в турбулентном пограничном слое вплоть до сечения отрыва, которое фиксируется обращением в нуль трения на стенке. Градиент давления при расчете предотрывного течения задавался по формуле

$$\frac{\delta_0}{\rho U_0^2} \frac{dp}{dx} = 0.001 \frac{x}{\delta_0} \quad (6.2)$$

Изменение коэффициента трения  $C_f (\equiv 2\tau_w / \rho U^2)$  и параметра  $\xi$  вблизи точки отрыва представлено на фиг. 8 сплошными кривыми. Здесь же пунктирными кривыми приведены результаты расчета предотрывного течения в пограничном слое, когда в качестве граничного условия на вязкость было принято следующее: при  $y \rightarrow \infty$   $\epsilon \rightarrow 0.01 U_0 \delta_0$ . Этот случай эквивалентен развитию пограничного слоя в потоке с повышенной турбулентностью. Видно, что турбулентность внешнего потока приводит к увеличению критического значения параметра  $\xi_c$  от обычного значения 0.005 до 0.009. Важно отметить, что в сечении отрыва расчетный профиль скорости приближался к прямолинейному, заметно трансформировался профиль трения —  $\rho \langle u'v' \rangle$ , максимум которого перемещался внутрь пограничного слоя, а распределение  $\epsilon$  почти не отличалось от изобарического течения в пограничном слое. Эти результаты находятся в хорошем соответствии с известными экспериментальными данными [31].

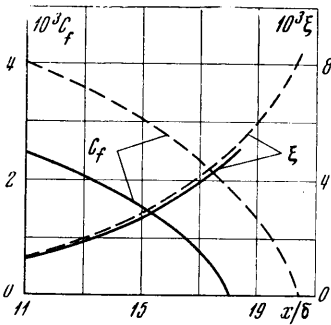
Эффекты реламинаризации турбулентного пограничного слоя под действием отрицательного градиента давления мало исследованы. На основе анализа экспериментальных данных [32, 33] предложены следующие локальные критерии реламинаризации

$$K \equiv \frac{\nu}{U^2} \frac{dU}{dx} > 3 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta_p \equiv -\frac{\nu}{\rho u_*^3} \frac{dp}{dx} > 0,02 \quad (6.3)$$

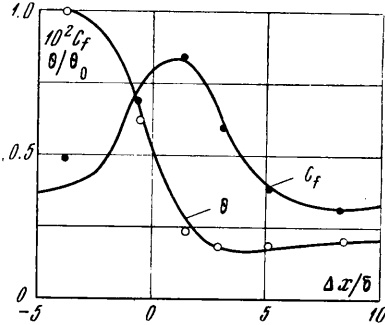
В терминах системы уравнений (3.1), (2.11) реламинаризация течения должна означать, что турбулентная вязкость вдоль потока убывает и становится меньше молекулярной ( $\varepsilon \ll \nu$ ). Проследим за развитием турбулентного пограничного слоя под действием отрицательного градиента давления, который задавался по формуле

$$\frac{\delta_0^2}{\rho U_0^2} \frac{dp}{dx} = -C \exp \left\{ -\left( \frac{x - 20\delta_0}{l} \right)^2 \right\} \quad (6.4)$$

где  $\delta_0$  — начальная толщина пограничного слоя, а  $l$  — протяженность области, на которой действует градиент давления. Значения  $l = 3\delta_0$  и  $C = 0.5$  соответствуют условиям экспериментального исследования, которое было выполнено в работе [32]. Ре-



Фиг. 8



Фиг. 9

зультаты численного расчета трения на стенке  $C_f$  и толщины потери импульса  $\theta$  вдоль области действия градиента сопоставлены на фиг. 9 с опытными данными из работы [32]. Отметим, что при этом максимальные значения параметров  $K$  и  $\Delta_p$  значительно превышали критические значения (6.3), между тем полной реламинаризации течения не наступило. Турбулентная вязкость  $\varepsilon \gg \nu$ , а формпараметр  $H$  профиля скорости в полном соответствии с результатами экспериментов [32] не превысил значения 1.6.

Чтобы выяснить условия реламинаризации, рассмотрим интегральное соотношение для турбулентной вязкости

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u\varepsilon dy = \alpha \int_0^{\infty} \varepsilon \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| dy - \gamma \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon(\beta\varepsilon + \nu)}{y^2} dy \quad (6.5)$$

Примем, что форма распределения вязкости и скорости удовлетворяет соотношениям

$$\varepsilon = \varepsilon_m \varphi_1(y/\theta), \quad u = U \psi_1(y/\theta), \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| = \frac{u_*}{\theta} \psi_2(y/\theta) \quad (6.6)$$

Тогда уравнение (6.5) с использованием (6.6) приведет к виду

$$\frac{d}{dx} (\varepsilon_m \theta U) = \varepsilon_m u_* B - \frac{\varepsilon_m \nu}{\theta} D \quad (6.7)$$

где  $B$  и  $D$  зависят от определяющих параметров и функций  $\varphi_1$ ,  $\psi_1$  и  $\psi_2$ .

Вдоль изобарического пограничного слоя сохраняется приблизительно постоянной величина  $\epsilon^\circ = \epsilon_m / U\theta$ ; выразим через нее  $\epsilon_m$  в уравнении (6.7)

$$\frac{\theta}{\epsilon^\circ} \frac{d\epsilon^\circ}{dx} = -\frac{2}{U} \frac{dU\theta}{dx} + B \frac{u_*}{U} - \frac{D}{R} \quad \left( R \equiv \frac{U\theta}{\nu} \right) \quad (6.8)$$

Представим известное интегральное уравнение движения [22] в виде

$$\frac{dU\theta}{dx} = \frac{u_*^2}{U} \left\{ 1 + (1 + H)\xi \frac{U^2}{u_*^2} \right\} \quad \left( \xi \equiv -\frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx} \right) \quad (6.9)$$

Подставим соотношение (6.9) в уравнение (6.8)

$$\frac{\theta}{\epsilon^\circ} \frac{d\epsilon^\circ}{dx} = -\frac{2u_*^2}{U^2} - 2(1 + H) \frac{u_*^2}{U^2} \xi + B \frac{u_*}{U} - \frac{D}{R} \quad (6.10)$$

Нетрудно увидеть, что при положительном градиенте давления максимальное значение  $\xi$ , соответствующее отрыву пограничного слоя, таково, что влиянием градиента давления на относительную вязкость  $\epsilon^\circ$  можно пренебречь.

Ускорение потока  $\xi < 0$  в соответствии с (6.10) приводит в общем случае к некоторому увеличению вязкости  $\epsilon^\circ$ . Однако из соотношения (6.9) следует, что если выполняется условие

$$\frac{U^2}{u_*^2} |\xi| > (1 + H)^{-1} \quad (6.11)$$

т. е. отрицательный градиент давления по модулю достаточно велик, то местное число Рейнольдса ( $R \equiv U\theta/\nu$ ) будет убывать, потому что производная в левой части соотношения (6.9) станет отрицательной. Уменьшение числа  $R$  приводит к возрастанию диссипативного члена в уравнении (6.10) и при достаточно малых величинах  $R$ , меньших критического значения, увеличение этого члена приведет к убыванию  $\epsilon^\circ$ , а следовательно, к реламинаризации течения. Численные расчеты подтвердили этот качественный вывод. Оказалось, что если в формуле (6.4) положить  $C = 0.2$ ,  $l = 20 \delta_0$ , а начальное число  $R_0 = 310$ , то в процессе ускорения потока  $R < 200$  и пограничный слой реламинаризуется. При этом турбулентная вязкость становится меньше молекулярной, формпараметр  $H > 2$ , хотя значения критериев  $K$  и  $\Delta_p$  остались такими же, что и в предыдущем расчетном примере. Аналогичные результаты при обобщении экспериментальных данных были получены в работе [33].

Таким образом, условия реламинаризации нельзя сформулировать в терминах локальных критериев типа (6.3), необходимыми условиями этого процесса является условие уменьшения числа Рейнольдса (6.11), а также достаточная протяженность области действия градиента давления, чтобы в пределах этой области выполнилось условие  $R < 200$ . Попутно данный анализ показал, что решение уравнения для вязкости при  $R < 200$  (критическое число Рейнольдса приблизительно 200—300) дает значение  $\epsilon \ll \nu$ , т. е. уравнение для  $\epsilon$  позволяет правильно описать не только турбулентное, но и переходное течение в пограничном слое.

**7. Заключение.** В предыдущих разделах было показано хорошее совпадение теоретических расчетов, проведенных с дифференциальным уравнением (2.11) для турбулентной вязкости, с опытными данными на примере неавтономных течений в следе, струе и пограничном слое. Наряду с этими течениями уравнение для  $\epsilon$  было апробировано при расче-

те течения в зоне смешения двух полубесконечных потоков, был проведен расчет течения в плоской пристенной струе, в плоском канале и, наконец, в сжимаемом турбулентном пограничном слое вплоть до числа  $M = 10$ . Все эти результаты показывают, что полученное уравнение пригодно для расчетов весьма широкого класса турбулентных и переходных плоских слаборасширяющихся течений типа пограничного слоя.

Каковы ограничения данного подхода? Прежде всего следует отметить, что, несмотря на удовлетворительное в целом описание течения в области перехода от ламинарного течения к турбулентному, на самом деле этот переход носит более энергичный характер, чем это получается при расчетах с использованием уравнения (2.11); во-вторых, попытки распространить данный метод на осесимметричные течения в канале и струе показали, что в этом случае использование универсальных постоянных  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $\beta$  в соотношении (2.11) дает заметное расхождение (в 1.5—2 раза) расчетных и опытных значений  $\epsilon$ . Неуниверсальность уравнения баланса кинетической энергии турбулентности (2.4) при переходе от плоских к осесимметричным течениям отмечалась в работе [6]. По-видимому, это несовпадение носит принципиальный характер и объясняется несовершенством исходных предположений о механизме переноса или диссипации энергии турбулентности.

Автор благодарит И. П. Смирнову, С. Ю. Крашенинникова и В. Б. Кузьмича за помощь при составлении программ для численных расчетов и Л. Л. Бычкову за обработку результатов счета и оформление графического материала.

Поступило 21 I 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Сер. физ., 1942, т. 6, № 1, 2.
2. Prandtl L., Wiegkardt K. Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz. Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math. Phys., Kl., 1945, H. 6.
3. Rotta I. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. Z. Physik, 1951, Bd 129, H. 5, Bd. 131, H. 1.
4. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
5. Глушко Г. С. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
6. Rodi W., Spalding D. B. A two-parameter model of turbulence and its application to free jets. Imperial College, Mech. Eng. Dept., BL/TN/B/12, 12, 1969. Wärme und Stoffübertrag, 1970, Bd. 3, Nr 2.
7. Bradshaw P., Ferriss D. H., Atwell N. P. Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation. J. Fluid Mech., 1967, vol. 28, pt 3.
8. Nee V. W., Kovasznaу L. S. G. Simple phenomenological theory of turbulent shear flows. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 3.
9. Townsend A. A. The diffusion behind a line source in homogeneous turbulence. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1954, vol. 224, No. 1159.
10. Зимонт В. Л. Экспериментальное исследование турбулентной диффузии в каналах переменного сечения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
11. Hinze I. O. Turbulence. An introduction to its mechanism and theory. N.—Y. McGraw—Hill, 1959. (Рус. перев.: Турбулентность. Ее механизм и теория. М., Физматгиз, 1963.)
12. Абрамович Г. Н., Яковлевский О. В., Смирнова И. П., Секундов А. Н., Крашенинников С. Ю. Исследование начального участка турбулентных струй различных газов в слутном потоке воздуха. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
13. Bradshaw P. The effect of initial conditions on the development of a free shear layer. J. Fluid Mech., 1966, vol. 26, pt 2.
14. Lee S. C., Auiler J. E. Theory of two-dimensional turbulent wakes. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 10.
15. Harsha P. T., Lee S. C. Correlation between turbulent shear stress and turbulent kinetic energy. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 8.

16. Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. Связь между коэффициентом диффузии и эйлеровыми характеристиками турбулентности в различных потоках. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
17. Chevray R., Kovasznaý L. S. G. Turbulence measurement in the wake of a thin flat plate. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 8.
18. Секундов А. Н., Яковлевский О. В. Экспериментальное исследование течения в следе за тонкими пластинами. Изв. АН СССР, МЖГ; 1970, № 6.
19. Sato H., Kuriki K. The mechanism of transition in the wake of a thin flat plate placed parallel to a uniform flow. J. Fluid Mech., 1961, vol. 11, pt. 3.
20. Stewartson K. On the flow near the trailing edge of a flat plate. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1968, vol. 306, No. 1486.
21. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
22. Schlichting H. Grenzschicht — Theorie. Karlsruhe, 1951. (Рус. перев.: Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.)
23. Förthmann E. Über turbulente Strahlausbreitung. Ingr — Arch., 1934, Bd 5, H. 1.
24. Albertson M. L., Dai Y. B., Jensen R. A., Rouse H. Diffusion of submerged jets. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs, 1948, vol. 74.
25. Van der Hegge Zijnen. Measurements of turbulence in a plane jet of air by the diffusion method and by the hot-wire method. Appl. Sci. Res., 1958, Ser A, vol. 7, No. 4.
26. Bradbury L. J. S. The structure of a self-preserving turbulent plane jet. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt 1.
27. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. М., «Машиностроение», 1969.
28. Pletcher R. H. On a finite-difference solution for the constant property turbulent boundary layer. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 2.
29. Уханова Л. Н. Характеристики турбулентного следа в условиях градиентного потока. Сб. «Промышленная аэродинамика», вып. 27, М., «Машиностроение», 1966.
30. Бам-Зеликович Г. М. Расчет отрыва пограничного слоя. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.
31. Schubauer G. B., Klebanoff P. S. Investigation of separation of the turbulent boundary layer. NACA Rept, 1951, No. 1030.
32. Caldwell G. L., Seban R. A. Flow and heat transfer in a laminarizing turbulent boundary layer. Paper ASME, NHT — 10, 1969.
33. Badry Narayanan M. A., Ramjee V. On the criteria for reverse transition in a two-dimensional boundary-layer flow. J. Fluid Mech., 1969, vol. 35, pt. 2.