

УДК 532.529

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КОЛЛЕКТИВА ЧАСТИЦ С ПУЛЬСИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Ю. А. БУЕВИЧ

(Москва)

Получены уравнения для эффективной вязкости жидкости, фильтрующейся в полидисперсном облаке частиц, и для силы взаимодействия жидкости с частицами в нестационарном потоке. Эти уравнения решены в предельных случаях малых и больших частот пульсаций жидкости.

При обтекании жидкостью концентрированной системы частиц последние влияют на структуру течения в окрестности каждой частицы, приводя, в частности, к существенному изменению соотношений между скоростями сдвига и напряжениями, возникающими в системе, и между относительной скоростью и силой взаимодействия жидкости с частицами. Проблема определения указанных соотношений, представляющая значительный практический интерес, стимулировала интенсивное исследование такого «стесненного» течения жидкости (см., например, обзор в [1, 2]). Однако в связи с трудностями анализа течения даже в «правильной» решетке, образованной регулярно расположенными частицами, в теоретических работах на эту тему вводятся обычно определенные модельные допущения, вносящие значительный элемент эмпиризма. Примером может служить известная «ячеечная» модель стесненного течения [1], согласно которой гидродинамическое экранирование каждой частицы соседними учитывается полуэмпирически, путем введения некоторой сферы, концентрической с частицей, на поверхности которой возмущение, вносимое в поток данной частицей, должно в какой-то мере исчезать. Недавно эта модель была снова применена к расчету как силы вязкого взаимодействия [3], так и эффективной вязкости [4] в стационарном течении. Аналогичные результаты для нестационарного течения, насколько известно автору, вообще отсутствуют. В этой работе указанные вопросы рассмотрены более строго, на основе приближения «точечных сил», предложенного в работе [5].

1. Уравнения движения в приближении точечных сил. Для простоты считаем, что взаимное расположение твердых сферических частиц в облаке не изменяется, и рассматриваем движение жидкости относительно облака. Числа Рейнольдса, характеризующие обтекание частиц, считаем малыми, так что допустимо пренебречь нелинейными инерционными членами в уравнениях Навье — Стокса. Возмущения, вносимые в поток отдельными частицами, аппроксимируем далее при помощи возмущений, генерируемых некоторыми точечными силами, приложенными к жидкости в центрах частиц и равными по величине силам, с которыми поток воздействует на частицы, взятым с обратным знаком. Как показывают результаты сравнения расчета силы взаимодействия между двумя малыми частицами, выполненного в этом приближении, с точным выражением для силы, указанное приближение можно считать весьма удовлетворительным [5].

Рассмотрим далее гармоническое движение жидкости $U(\omega, \mathbf{r})e^{i\omega t}$, $P(\omega, \mathbf{r})e^{i\omega t}$. Амплитуды $U(\omega, \mathbf{r})$, $P(\omega, \mathbf{r})$ можно рассматривать так же как преобразования Фурье от скорости и давления жидкости в произвольном нестационарном течении. Ввиду линейности уравнений движения эти величины можно представить в виде

$$U(\omega, \mathbf{r}) = U_0(\omega, \mathbf{r}) + \sum_{j=1}^N U(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_j), \quad P(\omega, \mathbf{r}) = P_0(\omega, \mathbf{r}) + \sum_{j=1}^N P(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \quad (1.1)$$

Здесь U_0, P_0 — скорость и давление в течении, невозмущенном частицами, $U(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_j), P(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_j)$ описывают скорость и давление в точке \mathbf{r} , возникающие в результате действия точечной силы со стороны частицы радиуса a_j , расположенной в точке \mathbf{r}_j ; суммирование в (1.1) проводится по всем частицам в системе. Величины (1.1) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} (\mu_0 \Delta - id_0 \omega) U_0(\omega, \mathbf{r}) - \nabla P_0(\omega, \mathbf{r}) &= 0, & \nabla U_0(\omega, \mathbf{r}) &= 0 \\ (\mu_0 \Delta - id_0 \omega) U(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_j) - \nabla P(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_j) - \mathbf{G}(\omega, \mathbf{r}_j, a_j) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) &= 0 \\ \nabla U(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_j) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где μ_0, d_0 — вязкость и плотность жидкости, $\mathbf{G}(\omega, \mathbf{r}_j, a_j)$ — сила, с которой жидкость действует на j -ю частицу ($j = 1, 2, \dots, N$, где N — полное число частиц в облаке).

В принципе, зная расположение всех частиц, можно решить уравнения (1.2) и найти поля (1.1), а также вычислить скорости $U^{(j)}$ и давления $P^{(j)}$ жидкости в окрестности каждой j -й частицы. Последние величины отличаются от (1.1) только отсутствием j -х членов в суммах по частицам и по отношению к j -й частице выступают как внешние скорость и давление. Легко видеть, что, определяя обычным образом силу, действующую на j -ю частицу в поле $U^{(j)}, P^{(j)}$, получим в результате систему $3N$ алгебраических уравнений для $3N$ компонент $\mathbf{G}(\omega, \mathbf{r}_j, a_j)$. Такой «прямой» метод уместно применять в случаях, когда N либо мало, либо велико, но облако представляет собой упорядоченную решетку частиц. На практике распределение частиц обычно хаотично и в деталях неизвестно. В этом случае удобно перейти от уравнений (1.1), (1.2) к уравнениям, характеризующим течение жидкости «в среднем». Это можно сделать, вводя распределение частиц по ансамблю, т. е. по координатам их центров \mathbf{r}_j и радиусам a_j , а затем проводя усреднение по ансамблю [5].

Предполагая, что расположение частиц случайно и корреляционные связи между положениями разных частиц отсутствуют, функцию распределения частиц можно выразить в виде

$$\varphi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; a_1, \dots, a_N) = \prod_{j=1}^N \varphi(\mathbf{r}_j, a_j)$$

где $\varphi(\mathbf{r}, a)$ — унарная функция распределения, нормированная на единицу. Дополнительно введем также счетную концентрацию частиц $n(\mathbf{r})$. Усредняя соотношения (1.1) и уравнения (1.2) по ансамблю, получаем уравнения, справедливые асимптотически при $N \gg 1$

$$(\mu_0 \Delta - id_0 \omega) \langle U \rangle - \nabla \langle P \rangle - n \langle \mathbf{G} \rangle = 0, \quad \nabla \langle U \rangle = 0 \quad (1.3)$$

Величины $\langle U \rangle$ и $\langle \mathbf{G} \rangle$ представляют собой средние скорость и давление жидкости в промежутках между частицами, оператор $\langle \rangle$ означает усреднение по ансамблю. Для силы взаимодействия $\mathbf{G}(\omega, \mathbf{r}_j, a_j)$, фигурирующей в (1.2), примем

$$\mathbf{G}(\omega, \mathbf{r}_j, a_j) = -\sigma_j \nabla P^{(j)}(\omega, \mathbf{r}_j) + D(a_j) U^{(j)}(\omega, \mathbf{r}_j) \quad (1.4)$$

где σ_j — объем j -й частицы. Отсюда после усреднения имеем

$$n \langle \mathbf{G} \rangle = -\rho \nabla \langle P \rangle + \alpha \langle U \rangle + O(N^{-1}) \quad (1.5)$$

$$\rho = n \int \sigma \varphi da, \quad \alpha = n \int D \varphi da$$

где ρ — объемная концентрация частиц, а величина α пока неизвестна. Учитывая (1.5), перепишем уравнения (1.3) в виде

$$\begin{aligned} \nabla \langle \Sigma^{(j)} \rangle - (id_0 \omega + \alpha) \langle U \rangle + \rho \nabla \langle P \rangle &= 0, & \nabla \langle U \rangle &= 0 \\ \Sigma^{(j)} &= -P I + \mu_0 \Gamma^{(j)}, & \nabla \langle \Sigma^{(j)} \rangle &= -\nabla \langle P \rangle + \mu_0 \Delta \langle U \rangle \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $\Sigma^{(f)}$ и $\Gamma^{(f)}$ — тензоры напряжений и скоростей деформаций в жидкости, \mathbf{I} — единичный тензор. Внутри частиц справедливы, очевидно, уравнения

$$\nabla \Sigma^{(p)} = 0, \quad \Gamma^{(p)} = 0, \quad U^{(p)} = 0 \quad (1.7)$$

где $\Sigma^{(p)}$, $\Gamma^{(p)}$ и $U^{(p)}$ — тензоры напряжений и скоростей деформаций и скорость внутри частиц.

Для упрощения считаем в дальнейшем, что облако частиц однородно в том смысле, что

$$\varphi(\mathbf{r}, a) = \varphi(a): \quad n = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}$$

Уравнения (1.3) в частном случае $\omega = 0$ были получены несколько иным способом в работе [5]. Для силы $\langle \mathbf{G} \rangle$ в [5] было принято выражение, отличающееся от (1.6) отсутствием члена с градиентом давления.

Уравнения (1.3) и следующие из них уравнения (1.6) отождествлялись в [5] с уравнениями стационарной фильтрации жидкости сквозь облако частиц (анализу в [5] соответствует $\omega = 0$). Последнее неверно, так как наличие ненулевого собственного объема частиц в системе приводит, очевидно, к нарушению обычной связи между средними скоростями сдвига и эффективными напряжениями в системе. Это обусловлено дополнительным переносом импульса, возникающим как за счет искажения линий тока жидкости в промежутках между частицами, так и за счет появления ненулевых напряжений внутри самих частиц. Кроме того, величины $\langle \mathbf{U} \rangle$ и $\langle \mathbf{P} \rangle$ описывают течение слишком детально и их нельзя отождествить с наблюдаемыми средней скоростью фильтрации и средним давлением, фигурирующими в уравнениях типа уравнений Дарси. Действительно, последние величины характеризуют течение с макроскопической точки зрения, т. е. получаются путем усреднения $\langle \mathbf{U} \rangle$ и $\langle \mathbf{P} \rangle$ по объемам, содержащим достаточно большое число частиц, но малым по сравнению с объемами, в которых эти величины изменяются существенно. Очевидно, существование такого объема для усреднения является непременным условием законности макроскопического описания течения при помощи уравнений типа уравнения Дарси. Именно такие течения и рассмотрены ниже.

2. Обобщенные уравнения фильтрации. Введем процедуру усреднения по элементарному физическому объему V_0 . Предполагается, что этот объем содержит достаточное для усреднения число частиц, но его линейные размеры малы по сравнению с масштабом среднего течения. Результаты такого усреднения величин, обозначаемых прописными символами, ниже обозначаем соответствующими строчными символами. Например

$$\begin{aligned} \sigma^{(f)} &= \frac{1}{V_f} \int (1 - \xi) \Sigma^{(f)} d\mathbf{r}, & \sigma^{(p)} &= \frac{1}{V_p} \int \xi \Sigma^{(p)} d\mathbf{r}, \\ V_f &= \int (1 - \xi) d\mathbf{r}, & V_p &= \int \xi d\mathbf{r} \end{aligned}$$

и т. д., где функции $\xi(\mathbf{r})$ равна единице внутри частиц и нулю вне их, а интегрирование проводится по объему V_0 .

Рассмотрим баланс импульса и массы жидкости внутри объема $V \gg V_0$, ограниченного поверхностью $S = S_f + S_p$, где S_f и S_p — части S , проходящие через жидкость и внутри частиц соответственно. Введем поверхность $S^* = S_f + S_p^*$, где S_p^* — поверхность, образованная частями поверхностей частиц на границе V , обращенными внутрь V и ограниченными кривыми пересечения S с поверхностями частиц. Считая жидкость несжимаемой, имеем

$$\oint_{S^*} \mathbf{U} n dS = 0, \quad id_0 \omega \int_V \mathbf{U} d\mathbf{r} = - \oint_{S^*} \Sigma^{(f)} \mathbf{n} dS - \int_V n \mathbf{G} d\mathbf{r}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.1)$$

Используя непрерывность напряжений на поверхностях частиц, имеем

$$\oint_{S^*} \Sigma^{(j)} \mathbf{n} dS = \int_{S_f} \Sigma^{(j)} \mathbf{n} dS + \int_{S_p^*} \Sigma^{(p)} \mathbf{n} dS$$

Учитывая (1.7), видим, что интегрирование по S_p^* можно заменить интегрированием по S_p . Поскольку $V \gg V_0$, а усреднения по поверхности и по объему в данном случае эквивалентны, подынтегральные выражения в (2.1) можно заменить соответствующими объемными средними, в результате чего получим

$$\begin{aligned} \oint_S (1 - \xi) \mathbf{u} \mathbf{n} dS &= 0, \quad id_0 \omega \int_V (1 - \xi) \mathbf{u} d\mathbf{r} = \\ &= - \oint [(1 - \xi) \sigma^{(j)} + \xi \sigma^{(p)}] \mathbf{n} dS - \int_V [-\xi \nabla p + n(1 - \xi) D\mathbf{u}] d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Проводя теперь усреднение по ансамблю и переходя обычным образом от интегральных уравнений сохранения к дифференциальным, получим окончательно следующие уравнения для среднего движения:

$$\begin{aligned} \nabla \langle \sigma \rangle - [id_0 \omega (1 - \rho) + \alpha (1 - \rho)] \langle \mathbf{u} \rangle + \rho \nabla \langle p \rangle &= 0, \quad \nabla (1 - \rho) \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \\ \langle \sigma \rangle &= (1 - \rho) \langle \sigma^{(j)} \rangle + \rho \langle \sigma^{(p)} \rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

Вводя скорость фильтрации жидкости $\mathbf{Q} = (1 - \rho) \langle \mathbf{u} \rangle$, имеем отсюда

$$\begin{aligned} \nabla \langle \sigma \rangle - (id_0 \omega + \alpha) \mathbf{Q} + \rho \nabla \langle p \rangle &= 0, \quad \nabla \mathbf{Q} = 0 \\ \mathbf{Q} &= (1 - \rho) \langle \mathbf{u} \rangle \end{aligned} \quad (2.4)$$

Напомним, что величины $\langle \sigma \rangle$ и α , входящие в уравнения (2.3) и (2.4), пока еще неизвестны.

3. Эффективная вязкость фильтрующейся жидкости. Чтобы определить тензор $\langle \sigma \rangle$, рассмотрим сдвиговое течение жидкости, управляемое уравнениями (1.6), в окрестности некоторой пробной частицы радиуса a . Пусть скорость и давление, невозмущенные этой частицей, равны

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U} \rangle_0 &= \mathbf{v} r, \quad \text{tr } \mathbf{v} = 0, \quad \langle P \rangle_0 = \text{const} - 1/2 (1 - \rho)^{-1} \mu_0 \psi^2 \text{tr } \mathbf{v} \mathbf{r} \\ \psi^2 &= \mu_0^{-1} (id_0 \omega + \alpha) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Уравнения для возмущений $\langle U \rangle'$, $\langle P \rangle'$, вносимых частицей, имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_0 (\Delta - \psi^2) \langle U \rangle' - (1 - \rho) \nabla \langle P \rangle' &= 0, \quad \nabla \langle U \rangle' = 0 \\ \langle U \rangle'|_{r=a} &= -\langle U \rangle_0, \quad \langle U \rangle'|_{r=\infty} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Применяя к (3.2) операцию ротора и вводя неизвестную функцию $f(\omega, r)$ посредством соотношения

$$\langle U \rangle' = \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} \nabla f$$

получим для нее уравнение

$$\Delta (\Delta - \psi^2) (\nabla \times \mathbf{v} \nabla f) = 0 \quad \text{или} \quad \Delta (\Delta - \psi^2) f = 0$$

решая которое, имеем

$$\Delta f = -\frac{A\psi}{r} e^{-\psi r}, \quad \frac{df}{dr} = \frac{A}{r^2} e^{-\psi r} \left(r + \frac{1}{\psi} \right) + \frac{B}{r^2}$$

Здесь ψ — корень последнего уравнения (3.1) с положительной действительной частью. Удовлетворяя граничным условиям на поверхности частицы, получаем после вычислений для возмущения скорости

$$\langle \mathbf{U} \rangle' = \frac{5}{3} \frac{a}{(\psi a)^2 (1 + \psi a)} \left(\frac{a}{r} \right)^4 \{ [T_1(\psi r) e^{-\psi(r-a)} - T_1(\psi a)] (\mathbf{v} \mathbf{n}) \mathbf{n} - [T_2(\psi r) e^{-\psi(r-a)} - \frac{2}{5} T_2(\psi a)] \mathbf{v} \mathbf{n} \} \quad (3.3)$$

$$T_1(x) = 15 + 15x + 6x^2 + x^3, \quad T_2(x) = 6 + 6x + 3x^2 + x^3$$

и для возмущения давления

$$\langle P \rangle' = - \frac{5\mu_0}{1-\rho} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{T_3(\psi a)}{1+\psi a} \mathbf{v} \mathbf{n}, \quad T_3(x) = 1 + x + \frac{2}{5} x^2 + \frac{1}{15} x^3 \quad (3.4)$$

Вычисляя тензор $\Sigma^{(f)}$ в соответствии с (1.6) и (3.1) — (3.4) и усредняя его сначала по объему, а затем по ансамблю, получим

$$\langle \sigma^{(f)} \rangle = \langle \sigma \rangle = - \langle p \rangle \mathbf{I} + 2\mu_0 \mathbf{v} \quad (3.5)$$

Для $\langle \sigma^{(p)} \rangle$, учитывая непрерывность напряжений на границах частицы — жидкость и соотношение

$$\Sigma^{(p)} = \nabla (\Lambda \mathbf{r}), \quad \Lambda \mathbf{r} = \|\Sigma_{ij}^{(p)} r_k\|$$

следующее из (1.7), имеем

$$\begin{aligned} \langle \sigma^{(p)} \rangle &= \left\langle \left(\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} \Sigma^{(p)} d\mathbf{r} \right) \right\rangle = \left\langle \left(\frac{a}{\sigma} \oint_{\sigma} \mathbf{n} (\Lambda \mathbf{n}) ds \right) \right\rangle = \\ &= - \langle p \rangle \mathbf{I} + \mu_0 \mathbf{v} [5 + 2\rho (1 - \rho)^{-1} + 2\Phi(\rho)] \quad (3.6) \\ \Phi(\rho) &= \int \frac{(\psi a)^2}{1 + \psi a} \left[1 + \frac{\psi a}{15} + \frac{\rho}{1 - \rho} \left(\frac{1}{2} + \frac{\psi a}{15} \right) \right] \varphi da \end{aligned}$$

Соотношения (3.5) и (3.6) позволяют определить тензор $\langle \sigma \rangle$, фигурирующий в (2.3), (2.4), который удобно записать в форме

$$\langle \sigma \rangle = - \langle p \rangle \mathbf{I} + 2\mu \langle \mathbf{v} \rangle \quad (3.7)$$

где $\langle \mathbf{v} \rangle$ — средний тензор скоростей деформаций, а μ — эффективная вязкость. Очевидно, что для рассматриваемого здесь течения $\langle \mathbf{v}^{(f)} \rangle = 2\mathbf{v}$, $\langle \mathbf{v}^{(p)} \rangle = 0$, т. е.

$$\langle \mathbf{v} \rangle = (1 - \rho) \langle \mathbf{v}^{(f)} \rangle + \rho \langle \mathbf{v}^{(p)} \rangle = 2(1 - \rho) \mathbf{v} \quad (3.8)$$

Из (3.7) и (3.8) легко выразить вязкость

$$\mu = \mu_0 S(\rho), \quad S(\rho) = \frac{1}{1 - \rho} \left[1 + \rho \left(\frac{3}{2} + \frac{\rho}{1 - \rho} + \Phi(\rho) \right) \right] \quad (3.9)$$

Подчеркнем, что эта величина характеризует перенос импульса именно в жидкости, фильтрующейся в облаке относительно неподвижных частиц, но не в потоке двухфазной системы жидкость — частицы. Для таких потоков эффективная вязкость может быть существенно иной. В качестве примера рассмотрим «гомогенное» движение суспензии, когда частицы полностью увлекаются жидкостью, причем тензор скоростей деформаций внутри частиц равен тензору скоростей деформации жидкости, который наблюдался бы в точках, занятых частицей, если бы этой частицы не было в потоке. Движение такого типа наблюдается в некоторых реальных течениях суспензий. В этом случае наблюдаемый тензор скоростей деформаций

$$\langle \mathbf{v} \rangle = (1 - \rho) \langle \mathbf{v}^{(f)} \rangle + \rho \langle \mathbf{v}^{(p)} \rangle = 2\mathbf{v}$$

так что эффективная вязкость μ' для такого течения выражается в виде

$$\mu' = \mu_0 S'(\rho), \quad S'(\rho) = (1 - \rho) S(\rho) \quad (3.10)$$

и значительно меньше μ . В частности, при малых ρ из (3.9) и (3.10) получаем

$$\mu \approx \mu_0(1 + 5/2\rho), \quad \mu' \approx \mu_0(1 + 3/2\rho)$$

Первый результат хорошо известен, однако в соответствии с обсуждением в [4] и выше должен быть отнесен к жидкой фазе, фильтрующей через неподвижные частицы. Второй результат, относящийся к односкоростному движению суспензии, впервые был получен в [6].

При малых ρ величины μ и μ' имеют универсальный характер в том смысле, что они не зависят ни от распределения частиц по размерам, ни от частоты пульсаций жидкости. Однако при больших ρ в выражениях (3.10) и (3.9) появляются члены, существенно зависящие от моментов функции распределения частиц по размерам. Возможно, это обстоятельство поможет объяснить в какой-то мере известный разницей в значениях коэффициентов при высших степенях ρ в разложении вязкости по степеням ρ , полученных в различных экспериментах с суспензиями умеренных концентраций. При больших ρ становится существенной также частотная дисперсия эффективной вязкости, что особенно важно учитывать при исследовании быстропеременных течений.

Подставляя (3.7) в уравнения (2.3), получаем уравнения

$$\begin{aligned} \mu \Delta \langle u \rangle - (1 - \rho) \nabla \langle p \rangle - (id_0 \omega + \alpha) (1 - \rho) \langle u \rangle &= 0 \\ \nabla (1 - \rho) \langle u \rangle \sim \nabla \langle u \rangle = 0 \quad (\rho = \text{const}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

4. Сила взаимодействия жидкости с частицами. Для определения комплексной величины α в уравнениях пп. 2, 3 рассмотрим обтекание пробной частицы однородным потоком

$$\langle U \rangle_0 = \text{const}, \quad \langle P \rangle_0 = \text{const} - \mu_0 \psi^2 (1 - \rho)^{-1} \langle U \rangle_0 r \quad (4.1)$$

удовлетворяющим уравнениям (1.6). Задача для возмущений $\langle U \rangle'$, $\langle P \rangle'$, вносимых частицей, имеет вид (3.2). По-прежнему применяя к уравнениям (3.2) операцию ротора и вводя функцию $f(\omega, r)$ при помощи равенства

$$\langle U \rangle' = \nabla \times \nabla \times f \langle U \rangle_0$$

получим для нее такое же уравнение, что и в п. 3. Решая соответствующую краевую задачу, имеем для возмущения скорости

$$\begin{aligned} \langle U \rangle' &= \frac{3}{2(\psi a)^2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \{ [R_1(\psi r) e^{-\psi(r-a)} - R_1(\psi a)] n \langle U \rangle_0 n - \\ &\quad - [R_2(\psi r) e^{-\psi(r-a)} - 1/3 R_2(\psi a)] \langle U \rangle_0 \} \\ R_1(x) &= 3 + 3x + x^2, \quad R_2(x) = 1 + x + x^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

и для возмущения давления

$$\langle P \rangle' = - \frac{\mu_0}{2(1 - \rho)} \frac{a R_1(\psi a)}{r^2} \langle U \rangle_0 n \quad (4.3)$$

Из (4.1) — (4.3) легко вычислить силу, действующую на частицу. Используя условие самосогласованности теории, согласно которому коэффициент $D(a)$ в определении (1.4) должен совпадать с коэффициентом, вычисляемым из (4.1) — (4.3), получим соотношение

$$D(a) = \frac{6\pi\mu_0 a}{1 - \rho} \left[\left(1 - \frac{2}{3} \rho \right) (1 + \psi a) + \frac{1}{9} (\psi a)^2 \right] \quad (4.4)$$

При $\rho = 0$, когда $\psi^2 = id_0 \mu_0^{-1} \omega$, отсюда получается известное выражение для коэффициента пропорциональности между скоростью и силой, действующей на одиночную частицу в гармоническом потоке [7]. Подчеркнем, что правая часть уравнения (4.4) зависит от величины a , представляющей собой, согласно (1.5), функционал от $D(a)$.

Усредняя $D(a)$ из (4.4) в соответствии с (1.5), получим следующее трансцендентное уравнение для комплексной величины α :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{6\pi\mu_0 n}{1-\rho} \int a \left[\left(1 - \frac{2}{3}\rho\right) (1 + \psi a) + \frac{1}{9}(\psi a)^2 \right] \varphi da = \\ &= \frac{9}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{\mu_0}{b_3} \left[\left(1 - \frac{2}{3}\rho\right) (b_1 + \psi b_2) + \frac{1}{9}\psi^2 b_3 \right], \quad b_n = \int a^n \varphi da \end{aligned} \quad (4.5)$$

причем ψ выражается через α в соответствии с последним уравнением (3.1). Уравнение (4.5) несколько упрощается в случае, когда облако частиц монодисперсно. В этом случае имеем просто $b_n = a^n$, где a — постоянный радиус частиц. Отметим, что α зависит только от трех первых моментов распределения $\varphi(a)$, в то время как величина S , вычисленная в п. 3, определяется всеми моментами этого распределения.

В общем случае решение уравнения (4.5) весьма сложно. Ниже рассмотрено его решение в предельных случаях малых и больших частот пульсаций.

Вводя действительную β и мнимую γ части α , запишем

$$\begin{aligned} \psi &= c e^{i\theta}, \quad c = \mu_0^{-1/2} [\beta^2 + (d_0\omega + \gamma)^2]^{1/4} \\ \theta &= \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{d_0\omega + \gamma}{\beta} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в (4.5), получаем два действительных уравнения

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{9}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{\mu_0}{b_3} \left[\left(1 - \frac{2}{3}\rho\right) (b_1 + c b_2 \cos \theta) + \frac{1}{9} c^2 b_3 \cos 2\theta \right] \\ \gamma &= \frac{9}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{\mu_0}{b_3} c \left[\left(1 - \frac{2}{3}\rho\right) b_2 \sin \theta + \frac{1}{9} c b_3 \sin 2\theta \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

5. Фильтрация при малых частотах. Пусть $|d_0\omega + \gamma| \ll |\beta|$. Тогда с точностью до членов порядка ω включительно имеем из (4.7)

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{9}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{\mu_0}{b_3} \left[\left(1 - \frac{2}{3}\rho\right) \left(b_1 + b_2 \left(\frac{\beta}{\mu_0} \right)^{1/2} \right) + \frac{1}{9} b_3 \frac{\beta}{\mu_0} \right] \\ \gamma &= \frac{9}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{\mu_0}{b_3} \left(\frac{\beta}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{d_0\omega + \gamma}{2\beta} \left[\left(1 - \frac{2}{3}\rho\right) b_2 + \frac{2}{9} b_3 \left(\frac{\beta}{\mu_0} \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

Рассмотрим для упрощения только движение в монодисперсном облаке частиц. Тогда из первого уравнения (5.1) имеем

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{9}{2} \frac{\mu_0}{a^2} \rho \lambda_1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\rho} X^2, \quad X = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9(2-3\rho)}} \left\{ \frac{9}{2} \rho \left(1 - \frac{2}{3}\rho\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{81}{4} \rho^2 \left(1 - \frac{2}{3}\rho\right)^2 + 9\rho(2-3\rho) \left(1 - \frac{2}{3}\rho\right) \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

и из второго уравнения (5.1)

$$\gamma = \frac{\lambda_2}{2} \rho \omega d_0, \quad \lambda_2 = \frac{9 - 6\rho + 2X}{(2-3\rho)X - \rho(2-3\rho)} \quad (5.3)$$

Таким образом, если физическая скорость течения жидкости в промежутках между частицами $\mathbf{v} = \langle \mathbf{u} \rangle e^{i\omega t}$, получаем для силы

$$\mathbf{F} = \frac{9}{2} \frac{\mu_0}{a^2} \rho \lambda_1 \mathbf{v} + \frac{1}{2} d_0 \rho \lambda_2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{4}{3} \pi a^3 \nabla p \quad (5.4)$$

Условие применимости соотношения (5.4) имеет вид

$$|\omega| \ll (1 + \frac{1}{2} \rho \lambda_2)^{-1} \omega_0, \quad \omega_0 = \mu_0 (a^2 d_0)^{-1} \quad (5.5)$$

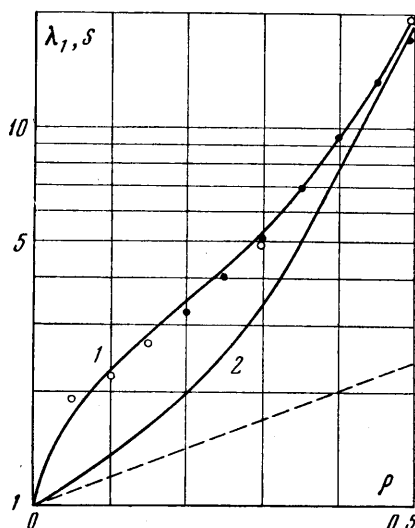
Легко видеть, что форма соотношения (5.4) сохраняется и в случае, когда скорость \mathbf{v} — произвольная функция времени, если только ее спектр сосредоточен в области $|\omega| \ll \omega_m$, а ω_m удовлетворяет условию (5.5).

Подставляя выражение для a , следующее из (5.2) и (5.3), в (3.9), легко найти также явное соотношение для эффективной вязкости $\mu = \mu_0 S$.

Коэффициенты λ_1 и λ_2 описывают отклонение силы взаимодействия \mathbf{F} от ее значения для весьма разреженного облака частиц, в котором можно вообще пренебречь стесненностью обтекания. Отметим, что в соотношении (5.4) отсутствует член, аналогичный силе Бассе, которая действует на одиночную частицу. Физически это связано с тем, что в условиях стесненного обтекания имеет место эффективное гидродинамическое экранирование частицы (экспоненциальное убывание части возмущения, вносимого ею в поток). Для медленных процессов это экранирование оказывается весьма существенным. В этом смысле полученные результаты могут служить неким обоснованием ячеечной модели стесненного течения.

Зависимости λ_1 и S от ρ для медленного течения изображены на фигуре (кривые 1 и 2 соответственно). Здесь же приведены значения λ_1 , соответствующие эмпирической формуле Эргана [8], полученной в результате обработки большого экспериментального материала (темные кружки), и экспериментальные данные Хашпеля и Эпштейна [9] (светлые кружки)¹. К сожалению, число экспериментов по гидравлическому сопротивлению зернистого неподвижного слоя при $\rho \leq 0.2-0.3$ весьма ограничено, что связано, по-видимому, с трудностями реализации такого слоя на опыте. Результаты же, относящиеся к сопротивлению псевдооживленных слоев при малых ρ , можно использовать для проверки теории лишь с большой осторожностью, что связано с известным эффектом понижения гидравлического сопротивления псевдооживленного слоя по сравнению с неподвижной зернистой насадкой той же пористости. Указанным эффектом можно пренебречь лишь в случае, когда пульсации частиц и циркуляция взвешенного материала в слое по тем или иным причинам затруднены. Как видно из фигуры, в области $\rho < 0.5$ согласие между теорией и экспериментом вполне удовлетворительное. Однако при $\rho > 0.5$ теория дает завышенные результаты. По-видимому, это объясняется неприменимостью приближения точечных сил при концентрациях облака, близких к концентрации состояния плотной упаковки, когда корреляции между положениями соседних частиц становятся существенными.

Эффективная сила взаимодействия частиц с жидкостью в условиях стационарного



¹ Отметим, что в экспериментах определяется обычно функция $\lambda_e(\rho)$, входящая в уравнение

$$-\nabla \langle p \rangle = \frac{9}{2} \rho d_0 \omega_0 \lambda_e Q$$

С другой стороны, из (2.4) имеем при $\omega = 0$

$$-(1 - \rho) \nabla \langle p \rangle = \frac{9}{2} \rho d_0 \omega_0 (1 - \rho) \lambda_1 \langle u \rangle = \frac{9}{2} \beta d_0 \omega_0 \lambda_1 Q$$

Поэтому теоретическую величину λ_1 нужно сравнивать не с λ_e , а с $(1 - \rho) \lambda_e$, что и проделано на фигуре.

течения была рассмотрена Тэмом [5], который постулировал для $G(r_j, a_j)$ выражение, отличающееся от (1.4) отсутствием члена с градиентом давления, и получил несколько иное представление для λ_1 и силы F из (5.4). В принципе соотношение (1.4) можно было бы обобщить следующим образом:

$$G(\omega, r_j, a_j) = D' \nabla P^{(3)}(\omega, r_j) + DU^{(3)}(\omega, r_j)$$

где D' — некий новый коэффициент. Оказывается, что различным значениям D' соответствуют существенно разные поля течения в окрестности пробной частицы и, следовательно, разные физические гипотезы о силе, действующей на частицу. Учитывая, что сила, действующая на частицу со стороны поля давления в жидкости, не зависит от присутствия других частиц в системе, приходим к единственно возможному значению $D' = -\sigma_j$. Отметим, что из полумпирических соображений формула, аналогичная (5.4), была получена в [10].

Сравнение с опытом величины (3.9) представляется довольно бессмысленным, ибо в экспериментах по определению вязкости суспензий не делается различия между значениями вязкости, характеризующими течения разных типов. Для сравнения на фигуре показана эйнштейновская функция $S = 1 + 5/2\rho$ (пунктир).

6. Фильтрация при высоких частотах. Пусть теперь $|d_0\omega + \gamma| \gg \beta$. По-прежнему ограничиваясь рассмотрением движения в монодисперсном облаке, имеем вместо (5.2), (5.3) соотношения, верные с точностью до членов $\sim \omega^0 = 1$

$$\beta = \frac{9\rho(1 - 2/3\rho)}{2 - 3\rho} d_0\omega_0 \left[1 + \frac{9}{4} \frac{\rho(1 - 2/3\rho)}{2 - 3\rho} + \left(\frac{1 - \rho}{2 - 3\rho} \right)^{1/2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{1/2} \right] \quad (6.1)$$

$$\gamma = \frac{\rho d_0\omega_0}{2 - 3\rho} \left[\frac{81}{4} \frac{\rho(1 - 2/3\rho)^2}{2 - 3\rho} + 9 \left(1 - \frac{2}{3}\rho \right) \left(\frac{1 - \rho}{2 - 3\rho} \right)^{1/2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{1/2} + \frac{\omega}{\omega_0} \right]$$

Условие справедливости (6.1) имеет вид

$$|\omega| \gg \frac{81}{4} \rho^2 \frac{(1 - 2/3\rho)^2}{(1 - \rho)(2 - 3\rho)} \omega_0 \quad (6.2)$$

Из (6.1) легко получается выражение для силы F , действующей на частицу в поле $v = \langle u \rangle e^{i\omega t}$. Если $v = v(t)$, но спектр этой функции сосредоточен в области частот $|\omega| \gg \omega_m$, причем ω_m удовлетворяет условию (6.2), то, интегрируя указанное выражение по частоте, получаем (ср. с аналогичным интегрированием в [7])

$$F = \frac{9}{2} d_0\omega_0 \rho \lambda_1 v + \frac{1}{2} d_0\rho \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{9}{2} d_0 \left(\frac{\omega_0}{\pi} \right)^{1/2} \rho \lambda_3 \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=\tau} \times$$

$$\times \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} - \frac{4}{3} \pi a^3 n \nabla p, \quad \lambda_2 = \frac{1}{1 - 3/2\rho} \quad (6.3)$$

$$\lambda_1 = \frac{1 - 2/3\rho}{1 - 3/2\rho} \left(1 + \frac{9}{8} \rho \frac{1 - 2/3\rho}{1 - 3/2\rho} \right), \quad \lambda_3 = \frac{(1 - \rho)^{1/2} (1 - 2/3\rho)}{(1 - 3/2\rho)^{3/2}}$$

Таким образом, стесненность обтекания частиц обуславливает увеличение не только «стационарной» вязкой силы Стокса, действующей на изолированную частицу, но также увеличение сил, связанных с ускорением присоединенной массы жидкости и с историей движения. Легко видеть, что при $\rho \rightarrow 0$ все λ_i из (6.3) стремятся к единице, так что (6.3) превращается в из-

вестное выражение для силы, действующей на изолированную частицу, умноженное на счетную концентрацию частиц. Подчеркнем, что коэффициенты λ_1, λ_2 для высокочастотного потока (уравнение (6.3)) не совпадают с коэффициентами для низкочастотного потока (уравнение (5.4)).

Имея представление для α , нетрудно найти выражение для функции S из (3.9), определяющей эффективную вязкость жидкости в высокочастотном гармоническом течении. Эта функция существенно зависит от ω , т. е. имеет место значительная частотная дисперсия вязкости.

Если поток не гармонический, но нижняя граница ω_m области спектра скорости удовлетворяет условию (6.2), то выражение для градиента тензора напряжений, входящее в уравнения (2.3), (2.4) для гармонического течения, также должно быть проинтегрировано по частотам. Нетрудно показать, что вместо стандартного члена, описывающего вязкие напряжения в уравнениях типа (2.3) или (2.4) при малых частотах, в соответствующих уравнениях при больших частотах появится группа членов, зависящих не только от значения v в данный момент, но и от скорости и истории изменения этой величины во времени. Таким образом, при высоких частотах жидкость будет проявлять существенно неньютоновские свойства, что представляется весьма важным для решения многих задач, имеющих прикладной интерес: например, при анализе распространения волн в пористых средах и многофазных дисперсных системах.

Автор благодарен В. Г. Маркову за полезное обсуждение модели и результаты этой работы.

Поступило 25 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics. N. Y., Prentice Hall, 1965.
2. Аэров М. Э., Годес О. М. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л., «Химия», 1968.
3. Бувич Ю. А. Взаимодействие фаз в концентрированных дисперсных системах. ПМТФ, 1966, № 3.
4. Сафрай В. М. О применении ячеечной модели к расчету вязкости дисперсных систем. ПМТФ, 1970, № 1.
5. Tam C. K. W. The drag on a cloud of particles in low Reynolds number flow. J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 3.
6. Покровский В. Н. Уточнение результатов теории вязкости суспензий. ЖЭТФ, 1968, т. 55, вып. 2(8).
7. Ландау Д. Л., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
8. Ergun S. Fluid flow through packed columns. Chem. Engng Progr., 1952, vol. 48, No. 2.
9. Happel J., Epstein N. Cubic assemblages of uniform spheres. Industr. Engng Fund., 1954, vol. 46, p. 1187.
10. Brinkman H. C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. Appl. Sci. Res., 1947, vol. A1, No. 1.