

УДК 621.4/6:533.6

РАСЧЕТ КВАЗИТРЕХМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В МЕЖЛОПАТОЧНОМ КАНАЛЕ ОСЕВОЙ ТУРБОМАШИНЫ

Г. Л. ПОДВИДЗ

(Москва)

Рассмотрено стационарное квазитрехмерное течение идеальной сжимаемой жидкости применительно к прямой задаче течения в каналах осевых турбин. Представлены результаты расчета течения в сопловом венце при различной форме меридианного сечения.

В расчете стационарного трехмерного течения идеальной жидкости в турбомашине используются известные методы расчета плоских решеток [1-9]. Трехмерное течение рассматривается как совокупность двумерных течений на пересекающихся поверхностях тока S_1 и S_2 [1, 5-7] (поверхность S_1 образована линиями тока частиц, расположенных перед венцом на дуге окружности, поверхность S_2 образована линиями тока частиц, расположенных перед венцом вдоль радиальной прямой). Для упрощения рассматривается квазитрехмерное течение на поверхностях S_1' и S_2' [1, 6, 8, 9]: на осесимметричной поверхности тока S_1' рассчитывается течение между выпуклой и вогнутой сторонами профилей соседних лопаток, на поверхности S_2' , за которую может быть принята средняя поверхность межлопаточного канала с граничными линиями на периферийной и корневой образующих меридианного сечения, рассчитывается осесимметричное течение.

1. Квазитрехмерное течение рассматривается на следующей системе поверхностей: на поверхности тока S_2' с нормалью $\mathbf{n}$ и с граничными линиями на корневой и периферийной образующих меридианного сечения, которая делит пополам расход газа в межлопаточном канале между выпуклой и вогнутой поверхностями соседних лопаток, и на совокупности осесимметричных поверхностей тока S_1' с нормальми $\mathbf{g}$ и с граничными линиями на выпуклой и вогнутой поверхностях соседних лопаток. Вектор относительной скорости течения $\mathbf{w}$ лежит в плоскости, касательной к поверхности S_2'

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (1.1)$$

а также в плоскости, касательной к поверхности S_1'

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (1.2)$$

Используется цилиндрическая система координат φ, z, r и естественная система φ, m, n , в которой координата m направлена вдоль проекции линии тока в меридианной плоскости $\varphi = \text{const}$, а координата n — вдоль нормали к m (фиг. 1).

Угол δ между проекциями нормами $\mathbf{n}$ поверхности S_2' , угол γ наклона меридианной линии тока и угол потока β_r определяются соотношениями

$$\text{tg } \delta = -\frac{n_r}{n_u}, \quad \text{tg } \gamma = \frac{w_r}{w_z}, \quad \text{ctg } \beta_r = \frac{w_u}{w_z} \quad (1.3)$$

Угол потока β_n на осесимметричной поверхности S_1' определяется выражением

$$\text{ctg } \beta_n = \frac{w_u}{w_m} \quad (1.4)$$

Углы потока и проекции скорости связаны зависимостями

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \beta_r &= \operatorname{ctg} \beta_n \cos^{-1} \gamma, \quad w_z = w_m \cos \gamma, \quad w_r = w_m \sin \gamma \\ w &= w_z (1 + \operatorname{ctg}^2 \beta_r + \operatorname{tg}^2 \gamma)^{1/2} = w_m (1 + \operatorname{ctg}^2 \beta_n)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Общее уравнение поверхности S_2' имеет вид

$$S(\varphi, z, r) = 0$$

Уравнение меридианной линии тока $r = r(z)$ и линии тока на осесимметричной поверхности S_1' $\varphi = \varphi(m)$ в дифференциальной форме примут вид

$$\frac{dr}{dz} = \operatorname{tg} \gamma, \quad r \frac{d\varphi}{dm} = \operatorname{ctg} \beta_n \quad (1.6)$$

Угол наклона δ между касательной к линии пересечения поверхности S_2' с плоскостью $z = \text{const}$ и радиальным направлением равен

$$\operatorname{tg} \delta = r \frac{d\varphi}{dr} \quad (1.7)$$

Уравнение Эйлера стационарного абсолютного движения идеальной жидкости в энергетической форме Фридмана — Крокко¹ запишется в виде

$$-\mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{w}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} = T \nabla s - \nabla h^*$$

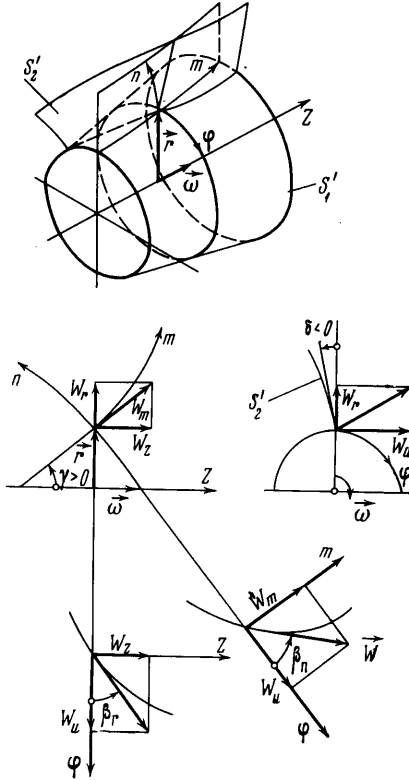
Здесь T — температура, s — энтропия, $h^* = i + w^2/2 - u^2/2$ — полная обобщенная энтальпия, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения ротора.

Жесткая непроницаемая поверхность S_2' в межлопаточном канале вводится при осреднении уравнений течения в окружном направлении φ . В уравнении движения появляется массовая сила $\mathbf{F}_2$ воздействия поверхности S_2' на поток идеальной жидкости, перпендикулярная этой поверхности

$$\mathbf{F}_2 \times \mathbf{n} = 0 \quad (1.8)$$

Для косвенного учета потерь в рамках течения идеальной жидкости в уравнение движения вводится сила сопротивления $\mathbf{f}$, направленная против скорости потока [6]

$$\mathbf{f} = -\frac{\mathbf{w}}{w^2} T \frac{ds}{dt} \quad (1.9)$$



Фиг. 1

¹ Общепринято это уравнение называть уравнением Крокко по его работе 1937 г. (см. «Современное состояние аэродинамики больших скоростей» под ред. Л. Хоуарта, т. 1. М., Изд-во иностр., лит., 1955), однако оно имеется в книге А. А. Фридмана «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости», М.—Л., ОНТИ, ГТТИ, 1934, стр. 198, 239.

которая учитывает осредненные по шагу потери трения, кромочные и вторичные. Вне лопаток сила f учитывает потери трения и вязкой жидкости и потери смешения.

В пренебрежении членами, учитывающими пульсации параметров течения, векторное уравнение осредненного течения на поверхности S_2' примет вид

$$-w \times (\nabla \times w) + 2\omega \times w = T\nabla s - \nabla h^* + F_2 + f \quad (1.10)$$

При адиабатическом течении вдоль линии тока на поверхности S_2' в относительном движении

$$h^* = \text{const} \quad (1.11)$$

Уравнение состояния для совершенного газа имеет вид

$$\rho = p / RT$$

Уравнение (1.10) в проекции на ось r системы координат φ, z, r после преобразований с учетом (1.3), (1.9) на поверхности S_2' для относительного движения в канале рабочего колеса примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_z}{\partial r} = \sin^2 \beta_r \left[\frac{1}{w_z} \left(\frac{\partial h^*}{\partial r} - T \frac{\partial s}{\partial r} \right) + \frac{w_r}{w^2} T \frac{ds}{dz} - \frac{F_{2r}}{w_z} - \right. \\ \left. - 2\omega \operatorname{ctg} \beta_r + \frac{\partial w_r}{\partial z} \right] + w_z \left(\operatorname{ctg} \beta_r \frac{\partial \beta_r}{\partial r} - \frac{\cos^2 \beta_r}{r} \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Из проекции уравнения (1.10) на окружное направление φ находится радиальная проекция массовой силы F_{2r}

$$F_{2r} = -w_z \left[\frac{\partial w_u}{\partial z} + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{r} \frac{\partial (rw_u)}{\partial r} + 2\omega \operatorname{tg} \gamma + \frac{w_u}{w^2} T \frac{ds}{dz} \right] \operatorname{tg} \delta. \quad (1.13)$$

В уравнении (1.12) учитываются наклон и кривизна линий тока в меридианной плоскости, неравномерность h^* и s , учитывающая распределение p_0^* , T_0^* в начальном сечении канала по радиусу и потери вдоль линии тока, проекция F_{2r} , вызванная наклоном лопаток по отношению к радиальному направлению.

Уравнение для абсолютного движения на поверхности S_2' в канале соплового аппарата получается из (1.12) (1.13) заменой w, h^*, β_r на s, i^*, α_r при $\omega = 0$. Вне межлопаточного канала дополнительно полагается $F_{2r} = 0$.

Потери при течении учитываются в расчете на поверхности S_2' при помощи коэффициента из энтропичности течения

$$\sigma_s = \exp \frac{s_0 - s}{R}$$

определяющего изменение энтропии вдоль линии тока вследствие работы, совершаемой по преодолению силы сопротивления f . Уравнение процесса калорически совершенного вида записывается в виде

$$\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0^*}{\rho_0^{*k}} \sigma_s^{1-k} \quad (1.14)$$

Коэффициент полного давления на линии тока $\sigma_p = p^* / p_0^*$ связан с σ_s соотношением

$$\sigma_p = \sigma_s \left(\frac{T^*}{T_0^*} \right)^{k/(k-1)}$$

$$\sigma_s = \left\{ \left[h^* - \frac{1}{2} \left(\frac{w}{\psi} \right)^2 + \frac{u^2}{2} \right] / \left[h^* - \frac{w^2}{2} + \frac{u^2}{2} \right] \right\}^{k/(k-1)},$$

$$\frac{T^*}{T_0^*} = \frac{h^* + u^2/2}{h_0^* + u_0^2/2} \quad (1.15)$$

Здесь k — показатель адиабаты, R — газовая постоянная, $u = \omega r$ — переносная скорость, $\psi = \sqrt{1 - \zeta}$ — коэффициент скорости, ζ — коэффициент потерь в меридианной плоскости.

Непроницаемость осесимметричная поверхность S_1' приближенно принимается за поверхность тока. В результате введения поверхности S_1' в уравнении движения появляется поле массовой силы F_1 воздействия выделенной поверхности на поток идеальной жидкости, направленное по нормали g

$$F_1 \times g = 0 \quad (1.16)$$

Из (1.2), (1.16) следует, что вектор F_1 ортогонален вектору скорости

$$F_1 \cdot w = 0 \quad (1.17)$$

Для исключения производных в направлении ортогонали n проводится осреднение поперек слоя переменной толщины на поверхности S_1' . В пренебрежении дополнительными пульсационными членами векторное уравнение стационарного течения идеальной жидкости на поверхности S_1' примет вид

$$-w \times (\nabla \times w) + 2\omega \times w = T \nabla s - \nabla h^* + F_1 \quad (1.18)$$

При адиабатическом движении с массовыми силами, ортогональными скорости потока (1.17), вдоль линии тока на поверхности S_1' в относительном движении $h^* = \text{const}$.

Во входном сечении канала T_0^* и p_0^* рассматриваются зависящими только от r , что более справедливо для лопаточных венцов, начиная с рабочих лопаток первой ступени турбины, поэтому

$$\frac{\partial h^*}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.19)$$

Уравнение (1.18) в проекции на окружное направление в естественной системе координат с учетом (1.19) на поверхности S_1' примет вид

$$-\frac{w_m}{r} \left[\frac{\partial w_m}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r w_u)}{\partial m} \right] + 2\omega w_m \sin \gamma = 0 \quad (1.20)$$

Так как сила F_1 ортогональна поверхности S_1' , то проекция $F_{1u} = 0$ и не входит в уравнение (1.20).

Область течения на криволинейной поверхности S_1' конформно отображается на плоскость xy преобразованием

$$x = \varphi, \quad y = \int r^{-1} dm$$

Проекция скорости w_u, w_m на поверхности S_1' заменяются на

$$w_x = r w_u, \quad w_y = r w_m \quad (1.21)$$

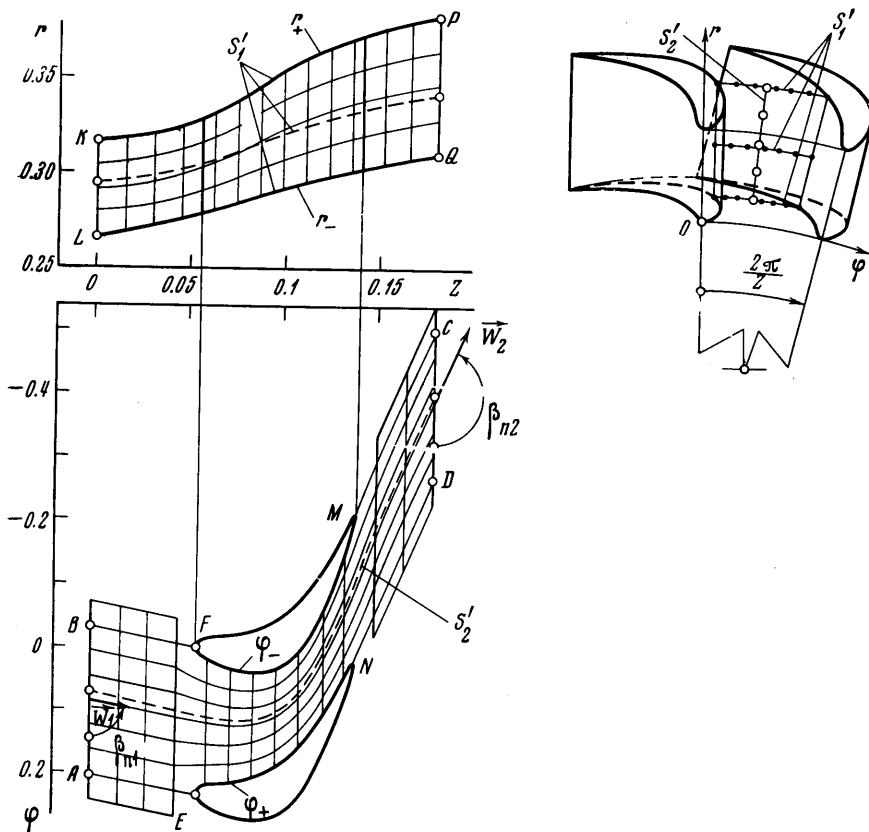
дифференциальное уравнение линии тока (1.6) примет вид

$$dx / dy = \text{ctg } \beta_n \quad (1.22)$$

а уравнение (1.20) преобразуется к виду

$$\frac{\partial w_y}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial y} + 2\omega r^2 \sin \gamma \quad (1.23)$$

Течению в канале решетки, расположенной на поверхности S'_1 , соответствует некоторое вихревое течение жидкости в решетке на плоскости xy .



Фиг. 2

Уравнение неразрывности в относительном движении для z каналов примет вид

$$G_z = mz \int_{-x}^{+x} \int_{-r}^{+r} \frac{p_w^* q(\lambda_w) r \cos \gamma}{\sqrt{T_w^*} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta_n}} dx dr$$

$$q(\lambda) = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{1/(k-1)} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{1/(k-1)} \lambda \quad (1.24)$$

$$m = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{(k+1)/2(k-1)} \sqrt{\frac{k}{R}}$$

Здесь r_- , r_+ — радиусы корневой, периферийной образующих меридианного сечения; x_- , x_+ — координаты выпуклой, вогнутой сторон соседних профилей.

2. Расчет квазитрехмерного течения в канале решетки сводится к решению следующей системы уравнений: уравнение радиального равновесия (1.12), уравнение движения в окружном направлении (1.23), неразрывности (1.24), процесса (1.14), равенства (1.11) для адиабатического движения с учетом дополнительных соотношений (1.3), (1.7), (1.13), (1.15), (1.22). В этой системе неизвестными являются w_z , w_θ , h^* , s , ρ .

На межлопаточной поверхности S_2' образующие LQ и KP являются граничными линиями тока. На плоскости отображения xu выпуклая FM и вогнутая EN стороны соседних профилей являются граничными линиями тока; на линиях тока вне решетки AE , BF , MC , ND используется условие периодичности течения для расхода газа, w_x , $\partial w_x / \partial x$, $\partial w_x / \partial y$. Система уравнений эллиптическая при $M_w < 1$.

Для расчета квазитрехмерного течения в прямой задаче задаются следующие величины: G_z — суммарный расход газа через лопаточный венец, z — число лопаток, ω — угловая скорость вращения, k — показатель адиабаты, R — газовая постоянная, в сечениях $z = \text{const}$ r_- и r_+ — координаты образующих LQ и KP (фиг. 2). Поверхность лопатки задается в нескольких цилиндрических сечениях $r = \text{const}$, в каждом — координатами выпуклой и вогнутой сторон профиля в хордовой системе координат и углом установки профиля в решетке. Во входном сечении канала вдоль линии LK , расположенной на поверхности S_2' , задаются температура и давление заторможенного потока T_0^* , p_0^* и угол набегающего потока β_{n1} . В выходном сечении канала вдоль QP задается угол выхода потока β_{n2} . Коэффициент потерь ζ на поверхности S_2' распределяется по z и по r . Распределение угла наклона γ во входном и выходном сечениях берется из начального приближения.

Расчет на поверхности S_2' проводится в фиксированной сетке z_i , r_k меридианной плоскости с близким к постоянному шагом Δz_i и постоянным в каждом сечении $z_i = \text{const}$ шагом Δr_k (фиг. 2). В плоскости отображения xu через середины входных и выходных кромок соседних лопаток проводятся прямые AE , BF и MC , ND под углами β_{n1} и β_{n2} . Расчет на каждой поверхности S_1' проводится в фиксированной сетке x_j , y_i с постоянными шагами Δx_j , Δy_i , которые уточняются в последовательных приближениях. Во внутренних точках используется для функций интерполяционный многочлен Лагранжа второго порядка и для производных — центральные разности (в граничных точках соответственно линейная интерполяция и разности первого порядка). Область, непосредственно примыкающая к входным и выходным кромкам лопаток, из рассмотрения исключается.

3. Система уравнений квазитрехмерного течения решается путем последовательных приближений (методом прямых). Для улучшения сходимости расчет начинается с приближения, хорошо отражающего картину течения.

В приближенном расчете на поверхности S_2' рассматривается цилиндрическое течение без учета кривизны линий тока, лопатки цилиндрические радиально направленные, пренебрегается силой сопротивления и изменением h^* и s в радиальном направлении. При этих предположениях упрощенное уравнение радиального равновесия примет вид

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{w}{r} \cos^2 \beta_r - 2\omega \cos \beta_r, \quad (3.1)$$

а выражение для элементарного расхода

$$dG = \rho w \sin \beta_r (\varphi_+ - \varphi_-) r dr \quad (3.2)$$

Система уравнений (3.1), (3.2) интегрируется при условии прохождения заданного расхода газа G через поперечное сечение $z = \text{const}$ одного канала. При постоянных плотности газа ρ , угле потока β_r и координатах границ лопатки φ_+ , φ_- в направлении r изменение скорости потока в радиальном направлении получим в виде

$$w(r) = w_- \left(\frac{r_-}{r} \right)^{\cos^2 \beta_r} - \frac{2\omega \cos \beta_r}{\cos^2 \beta_r + 1} \left[r - \left(\frac{r_-}{r} \right)^{\cos^2 \beta_r} r_- \right]$$

где скорость в корневом сечении канала на поверхности S_2' равна

$$w_- = (2 - \cos^2 \beta_r) \frac{\frac{G}{A_2} + \frac{2\omega \cos \beta_r}{3(\cos^2 \beta_r + 1)}(r_+^3 - r_-^3)}{r_+^2 \left(\frac{r_-}{r_+} \right)^{\cos^2 \beta_r} - r_-^2} - \frac{2\omega \cos \beta_r r_-}{\cos^2 \beta_r + 1}$$

$$A_2 = \rho \sin \beta_r (\varphi_+ - \varphi_-)$$

В приближенном расчете на каждой поверхности S_1' пренебрегается изменением h^* и s в окружном направлении (1.19). Из проекции уравнения (1.18) на направление $l = r\varphi$, параллельное фронту решетки в пренебрежении изменением скорости вдоль линии тока, получается упрощенное уравнение для изменения скорости

$$\frac{dw}{dl} = - \frac{\sin \beta_n}{R_s} w + 2\omega \sin \gamma \sin \beta_n \quad (3.3)$$

где R_s — радиус кривизны линии тока на поверхности S_1' . Выражение для элементарного расхода газа запишется в виде

$$dG = \rho w \sin \beta_n (r_+ - r_-) \cos \gamma dl \quad (3.4)$$

Система уравнений (3.3), (3.4) интегрируется аналогично (3.1), (3.2). При постоянных ρ , R_s , β_n , угле наклона γ образующей поверхности S_1' в направлении фронта решетки l изменение скорости потока в направлении l получим в виде

$$w(l) = \exp \frac{-l \sin \beta_n}{R_s} \left[w_- + 2\omega R_s \sin \gamma \left(\exp \frac{l \sin \beta_n}{R_s} - 1 \right) \right]$$

где скорость на выпуклой поверхности профиля равна

$$w_- = \frac{G/A_1 - 2\omega L \sin \gamma \sin \beta_n}{1 - \exp \frac{-L \sin \beta_n}{R_s}} + 2\omega R_s \sin \gamma$$

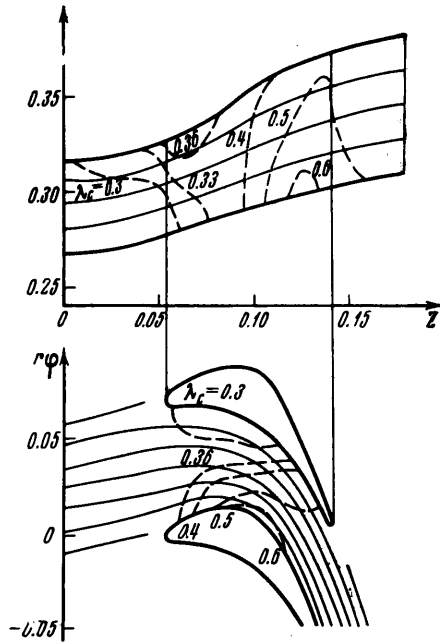
$$A_1 = \rho (r_+ - r_-) \cos \gamma R_s, \quad L = r(\varphi_+ - \varphi_-), \quad l = r(\varphi - \varphi_-)$$

где R_s приближенно определяется как радиус окружности, проходящей через три соседние точки средней линии канала.

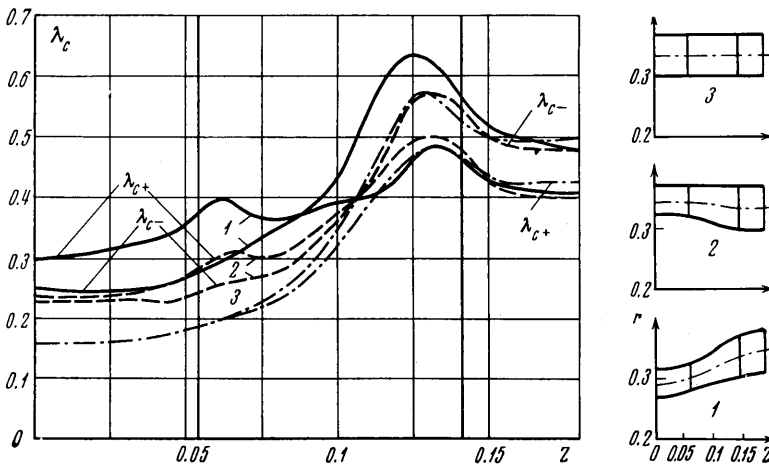
Уравнения движения (1.12), (1.23) квазитрехмерного течения записываются в безразмерном виде и интегрируются, начиная от средней точки канала, на поверхности S_2' в сечении $z = \text{const}$ методом Эйлера с пересчетом и далее на поверхностях S_1' — в сечениях $y = \text{const}$ методом трапеций. Значения внутреннего интеграла (1.24) вычисляются на поверхностях S_1' и интерполируются на узлы r_k , по которым рассчитывается наружный интеграл. Для получения заданного расхода газа через сечение $z = \text{const}$ вводится поправка на w_z в средней точке и пересчитывается распределение скоростей. Перед и за решеткой на плоскости отображения xu поверхности S_1' средняя линия тока строится многочленом третьей степени со следующими условиями в трех соседних точках A, B, C :

$$\begin{aligned}x_A &= x(y_A), \quad x_B = x(y_B), \\ \text{ctg } \beta_{nB} &= x'(y_B), \\ \text{ctg } \beta_{nC} &= x'(y_C)\end{aligned}$$

Уточняются форма поверхности S_2' , получающаяся объединением средних линий тока на поверхностях S_1' , координаты r образующих поверхностей S_1' , углы $\beta_n, \delta, \gamma, \beta_r$ и находятся координаты линий тока на поверхностях S_2' и S_1' . Для сходимости последовательных приближений введены коэффициенты релаксации координат линий тока λ_1 и проекций скорости λ_2 .



Фиг. 3.

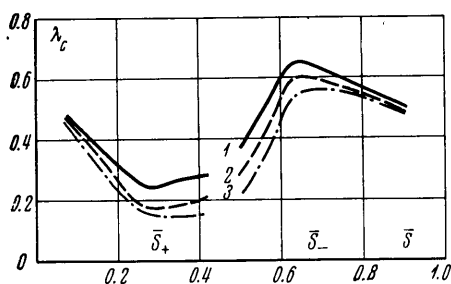


Фиг. 4

4. В качестве примера рассмотрено течение в сопловом венце (фиг. 2) при $\lambda_2 = 0,46$ с числом лопаток $z = 27$, $k = 1,33$. Радиусы периферийной r_+ и корневой r_- образующих меридианного сечения возрастают к выходу

из решетки и образуют канал с увеличивающейся высотой (вариант 1). Лопатка цилиндрическая, входная кромка направлена радиально. Форма профиля задается в трех сечениях. Во входном сечении канала поток однородный $\alpha_{n1} = 80^\circ$, в выходном сечении $\alpha_{n2} = 157,3^\circ$. Коэффициент потерь ζ постоянен по высоте канала и перед лопатками равен $\zeta = 0$, внутри лопаток принято параболическое распределение, за лопатками $\zeta = 0,06$. Сетка расчета представлена на фиг. 2, расчет проводился на трех поверхностях S_1' — корневой, средней, периферийной.

Сходимость расчета была получена с коэффициентами релаксации $\kappa_1 = 0.1$ и $\kappa_2 = 0.2$ после 15 приближений, время счета примера на ЭВМ типа БЭСМ-3 составляло 2 час. 30 мин. Наибольшая погрешность λ_c равнялась $\Delta\lambda_c = 0.003$, координат линий тока на поверхностях S_2' и S_1' — соответственно $\Delta r = 0.0004$ м и $\Delta x = 0.003$. Расчет по каналовому методу обладает повышенной погрешностью у кромок и наиболее применим во внутренних сечениях решетки.



Фиг. 5

сгущаются у спинки профиля. Линии $\lambda_c = \text{const}$ позволяют установить зоны диффузорного течения внутри канала. Сплошными линиями на фиг. 4, 5 нанесены результаты расчета варианта 1.

На фиг. 4 представлено распределение λ_c по оси z на периферийной и корневой образующих меридианного сечения на поверхности S_2' , зависящее от угла потока α , и кривизны меридианных линий тока. Участки диффузорного течения имеются на входе в решетку у периферии и более интенсивные на выходе из решетки с наибольшей протяженностью у корня.

На фиг. 5 представлено распределение λ_c по вогнутой и далее по выпуклой стороне профиля на средней поверхности S_1' , распределение λ_c на периферийной и корневой поверхностях S_1' аналогичное. В канале решетки варианта 1 имеются две зоны с наибольшим по модулю отрицательным градиентом скорости: на входном участке вогнутой поверхности у периферии и на выходном участке выпуклой поверхности у корня лопатки.

При проточной части с $r_+ = \text{const}$ и прежней высотой канала (вариант 2, пункт на фиг. 4, 5) во входных сечениях венца меридианные линии тока направлены выпуклостью к периферии, а в выходных сечениях венца — выпуклостью к корню (зависимость — обратная по отношению к варианту 1). В результате на входном участке периферийной образующей отсутствует участок диффузорного течения (фиг. 4), уменьшилась длина и интенсивность диффузорных участков на поверхностях профиля.

При цилиндрическом канале с постоянной высотой лопаток (вариант 3, штрих-пункт на фиг. 4, 5) меридианные линии тока близки к цилиндрическим. Площадь проходного сечения более значительно увеличилась на входе в венец, поэтому здесь значительно уменьшилась скорость потока. В результате на входном участке вогнутой поверхности профиля практически отсутствует участок диффузорного течения. На входе в венец уменьшилась (по сравнению с вариантом 1) разность между давлениями на вы-

пуклой и вогнутой поверхностях соседних лопаток, особенно значительно на периферии, что уменьшает интенсивность вторичных течений.

Автор благодарит Г. Ю. Степанова за постановку задачи и руководство работой и А. И. Басманову за помощь в отладке программы на ЭВМ.

Поступило 10 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
2. Симонов Л. А. О пространственном потоке в гидромашинах. ПММ, 1941, т. 5, вып. 3.
3. Рибо. Расчет пространственных течений жидкости в турбомашинах с помощью метода особенностей. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., Сер. А., 1968, т. 90, № 3.
4. Аэродинамика турбин и компрессоров. М., «Машиностроение», 1968.
5. Wu C. H. A general theory of three dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial, radial and mixed-flow types. Trans. ASME, 1952, vol. 74, No. 8.
6. Сироткин Я. А. К постановке краевой задачи вихревого течения идеальной сжимаемой жидкости в турбомашинах. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 2.
7. Макаров А. Ф. Расчет пространственного течения жидкости в радиально-осевой турбине. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
8. Катсанис. Применение метода произвольных квазиортогональных линий к расчету распределения потока в турбомашине. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., Сер. А., 1966, т. 88, № 2.
9. Smit I. L., Johnston I. H. Investigations on an experimental single — stage turbine of conservative design, pt 1. Aeron. Res. Council Repts and Mem., 1967, No. 3544.