

УДК 534.2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЧЕРЕЗ РЕШЕТКУ ПЛАСТИН, ОБТЕКАЕМУЮ ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

М. А. ТРАХТЕНБРОЙТ

(Москва)

Решается задача о взаимодействии звуковых волн с решеткой полубесконечных пластин, установленных с выносом и обтекаемых дозвуковым потоком газа под нулевым углом атаки. Полученные результаты используются для приближенного решения задачи прохождения плоской звуковой волны через решетку пластин с конечной хордой. Производится сравнение результатов с результатами других авторов.

В связи с исследованием шума и вибраций лопаток турбомашин возрос интерес к задачам о распространении звуковых волн через решетку профилей. В работе [1] получено численное решение задачи о распространении плоской звуковой волны через решетку плоских пластин в потоке. Решение основано на методе диполей, впервые примененном к решеткам В. Б. Курзиным [3]. В работе [2] при решении той же задачи использован подход, аналогичный предлагаемому в настоящей работе, однако в более грубом приближении. Обсуждение основных отличий предлагаемого метода производится ниже.

1. Рассмотрим сначала решетку, состоящую из бесконечно тонких, идеально отражающих полуплоскостей (фиг. 1), обтекаемых стационарным плоскопараллельным потенциальным потоком идеального газа с числом $M < 1$ под нулевым углом атаки. Потенциал ускорений акустического поля удовлетворяет волновому уравнению в движущейся среде

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{2M}{a} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

где a — скорость звука, при следующих граничных условиях:

- 1) на полуплоскостях нормальная компонента акустической скорости равна нулю (условие непротекания);
- 2) потенциал ускорений непрерывен на продолжении полуплоскостей.

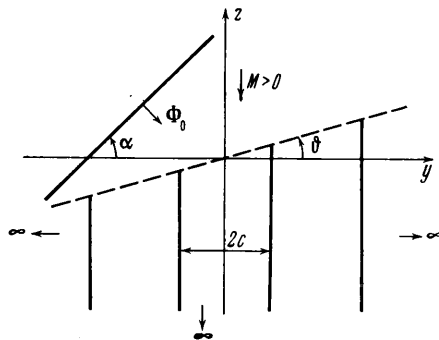
Кроме того, на входных ($M > 0$) и выходных ($M < 0$) кромках полуплоскостей должны выполняться условия, обеспечивающие единственность решения

$$\Delta p[z, (2m + 1)c] \sim [z - (2m + 1)l]^{-1/2} \quad \text{при } z \rightarrow (2m + 1)l, \quad M > 0$$

$$\Delta p[z, (2m + 1)c] \sim [z - (2m + 1)l]^{1/2} \quad \text{при } z \rightarrow (2m + 1)l, \quad M < 0$$

$$m = 0, \pm 1, \dots; \quad l = c \operatorname{tg} \theta$$

где Δp — перепад давления на полуплоскостях.



Фиг. 1

Зависимость от времени предполагается в виде $e^{-i\omega t}$ ($\omega = ka$).

При помощи обобщенной теоремы Кирхгофа для движущейся среды [4] можно получить выражение для потенциала ускорений акустического поля в любой точке пространства

$$\Phi(z, y) = \frac{1}{a\sqrt{1-M^2}} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{(2m+1)l} f_m(z_0) G[z, y|z_0, (2m+1)c] dz_0 \quad (1.2)$$

где

$$f_m(z) = \frac{a}{4\pi} \{ \Phi[z, (2m+1)c - 0] - \Phi[z, (2m+1)c + 0] \}$$

есть функция, пропорциональная скачку потенциала на полуплоскостях, а

$$G(z, y|z_0, y_0) = \pi i \exp \left[ik \frac{M}{\sqrt{1-M^2}} (z - z_0) \right] H_0^{(1)} \left[\frac{k}{\sqrt{1-M^2}} \left(\frac{(z - z_0)^2}{1-M^2} + (y - y_0)^2 \right)^{1/2} \right]$$

есть функция Грина для уравнения (1.1).

Будем рассматривать поля, обладающие пространственной периодичностью вида

$$f_m(z) = f[z - (2m+1)l] \exp [i(m + 1/2)\psi]$$

где ψ есть сдвиг фаз между колебаниями газа в соседних каналах, образованных полуплоскостями. Введем в качестве искомой функции преобразование типа Фурье от скачка потенциала на полуплоскостях

$$F(w) = 1/2(\pi)^{-1} (1 - M^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \exp[-i w z (1 - M^2)^{-1/2}] dz$$

где w является комплексной переменной. После несложных преобразований получим из (1.2)

$$\Phi(z, y) = \frac{\pi}{a} \int_c \exp[i w z (1 - M^2)^{-1/2}] F(w) \varphi(w, y) dw \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(w, y) &= i [e^{-i v y} \sin(v c - 1/2 \psi + w l (1 - M^2)^{-1/2}) - \\ &\quad - e^{-i v y} \sin(v c + 1/2 \psi - w l (1 - M^2)^{-1/2})] \times \\ &\times [\sin(v c - 1/2 \psi + w l (1 - M^2)^{-1/2}) \sin(v c + 1/2 \psi - w l (1 - M^2)^{-1/2})]^{-1} \\ v &= \left[\left(k \sqrt{\frac{1+M}{1-M}} - w \right) \left(k \sqrt{\frac{1-M}{1+M}} + w \right) \right]^{1/2} \quad (\text{Im } v > 0) \end{aligned}$$

а C есть некоторый контур интегрирования в плоскости комплексного переменного w , форма которого определяется видом волны, падающей на решетку.

Граничные условия 1) и 2) приводят к двум интегральным уравнениям для искомой функции $F(w)$

$$\int_c \exp[i w z (1 - M^2)^{-1/2}] v F(w) \Omega(w) [M(1 - M^2)^{-1/2} w + k]^{-1} dw = 0 \quad (1.4)$$

при $z < 0$

$$\int_c \exp[iwz(1 - M^2)^{-1/2}] F(w) dw = 0 \quad \text{при } z < 0 \quad (1.5)$$

где

$$\Omega(w) = {}^{1/2}i \sin 2vc [\sin(vc - {}^{1/2}\psi + wl(1 - M^2)^{-1/2}) \sin(vc + {}^{1/2}\psi - \\ - wl(1 - M^2)^{-1/2})]^{-1}$$

Решение уравнений (1.4) и (1.5) производится методом факторизации аналогично работе [5], и подстановка полученной функции $F(w)$ в (1.3) определяет искомое волновое поле в виде контурного интеграла. Вычеты в полюсах подынтегрального выражения в (1.3) дают отраженные и прошедшие волны. Факторизация функции $\Omega(w)$ производится разложением в бесконечные произведения и имеет вид

$$\Omega(w) = \Omega_+(w)\Omega_-(w)$$

$$\Omega_-(w') = \Omega_0 \exp[\chi(w')] \left(q \sqrt{\frac{1+M}{1-M}} - w' \right)^{1/2} \left(1 - \frac{w'}{\beta_0^-} \right)^{-1} \times \\ \times \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w'}{\gamma_n^-} \right) \left(1 - \frac{w'}{\beta_n^-} \right)^{-1} \left(1 - \frac{w'}{\beta_{-n}^-} \right)^{-1}$$

$$\Omega_+(w') = \Omega_0 \exp[-\chi(w')] \left(q \sqrt{\frac{1-M}{1+M}} + w' \right)^{1/2} \left(1 - \frac{w'}{\beta_0^+} \right)^{-1} \times \\ \times \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w'}{\gamma_n^+} \right) \left(1 - \frac{w'}{\beta_n^+} \right)^{-1} \left(1 - \frac{w'}{\beta_{-n}^+} \right)^{-1}$$

$$\Omega_0 = [{}^{1/2}i \sin(2\pi q) q^{-1} \sin^{-1} \pi(q - \eta) \sin^{-1} \pi(q + \eta)]^{1/2}$$

$$\chi(w') = i2w' \left\{ \ln \left[2 \cos \vartheta \left(\frac{1 - M^2}{1 - M^2 \cos^2 \vartheta} \right)^{1/2} \right] + \right. \\ \left. + (1 - M^2)^{-1/2} \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{arc} \operatorname{tg} [(1 - M^2)^{-1/2} \operatorname{tg} \vartheta] \right\}$$

где введены безразмерные параметры

$$w' = \frac{wc}{\pi}, \quad \eta = \frac{\psi}{2\pi}, \quad q = \frac{kc}{\pi}, \quad v' = \frac{vc}{\pi}$$

$$\gamma_n^{\pm} = qM(1 - M^2)^{-1/2} \mp [q^2(1 - M^2)^{-1} - ({}^{1/2}n)^2]^{1/2} \\ \beta_n^{\pm} = \cos \vartheta (1 - M^2)^{1/2} (1 - M^2 \cos^2 \vartheta)^{-1} \times \\ \times \{ (n + \eta) \sin \vartheta + qM \cos \vartheta \mp [q^2 + 2Mq(n + \eta) \sin \vartheta \cos \vartheta - \\ - (n + \eta)^2 \cos^2 \vartheta (1 - M^2)]^{1/2} \}$$

Если на решетку из свободного полупространства падает плоская волна под углом α к оси y

$$\Phi_0(z, y) = A \exp \left[\frac{ik}{1 + M \cos \alpha} (y \sin \alpha - z \cos \alpha) \right] \quad (1.6)$$

то сдвиг фаз ψ равен

$$\psi = \frac{2kc}{1 + M \cos \alpha} \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\cos \vartheta}$$

и при $z > y \operatorname{tg} \vartheta$ получаем

$$\Phi(z, y) = \Phi_0(z, y) + A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta_n \exp \left\{ i\pi \left[\frac{\beta_n^-}{\sqrt{1-M^2}} \frac{z}{c} - v_n' \frac{y}{c} \right] \right\} \quad (1.7)$$

где Δ_n — коэффициент отражения, а

$$v_n' = \left(q \sqrt{\frac{1+M}{1-M}} - \beta_n^- \right)^{1/2} \left(q \sqrt{\frac{1-M}{1+M}} + \beta_n^- \right)^{1/2}$$

При $z < y \operatorname{tg} \vartheta$, $-c < y < c$ имеем

$$\Phi(z, y) = A \sum_{n=0}^{\infty} T_n \exp \left[i\pi \left(\frac{\gamma_n^+}{\sqrt{1-M^2}} \frac{z}{c} \right) \right] \cos \frac{n\pi}{2c} (y - c) \quad (1.8)$$

где T_n — коэффициент прохождения.

Если падающие волны приходят по каналам, образованным полуплоскостями, и при $(2m-1)c < y < (2m+1)c$ имеют вид

$$\Phi_0 = A \exp \left[i\pi \left(\frac{\gamma_n^-}{\sqrt{1-M^2}} \frac{z-2ml}{c} \right) \right] \cos \frac{n\pi}{2c} [y - (2m+1)c] e^{im\psi}$$

то при $z > y \operatorname{tg} \vartheta$

$$\Phi(z, y) = A \sum_{l=-\infty}^{\infty} S_{n,l} \exp \left[i\pi \left(\frac{\beta_l^-}{\sqrt{1-M^2}} \frac{z}{c} - v_l' \frac{y}{c} \right) \right]$$

а при $z < y \operatorname{tg} \vartheta$, $-c < y < c$

$$\Phi(z, y) = \Phi_0(z, y) + A \sum_{h=0}^{\infty} R_{n,h} \exp \left[i\pi \left(\frac{\gamma_h^+}{\sqrt{1-M^2}} \frac{z}{c} \right) \right] \cos \frac{h\pi}{2c} (y - c)$$

Отраженные волны являются плоскими при β_n^- действительном и поверхностными при β_n^- комплексном.

В зависимости от направления потока выражения для коэффициентов Δ_n , T_n , $S_{n,l}$, $R_{n,h}$ оказываются различными. Это различие является существенным, так как при $M < 0$ появляются вихревые следы, на образование которых затрачивается часть энергии падающей волны. Интенсивность вихревых следов может быть также получена из решения. Поскольку при решении задачи о падении плоской волны на решетку понадобятся выражения для T_0 и $R_{0,0}$, приведем их

$$T_0 = (1 + M \cos \alpha) (1 + M)^{-1} T \quad \text{при } M > 0, \quad T_0 = T \quad \text{при } M < 0$$

где

$$\begin{aligned} T = & \exp \left[-\chi \left(\beta_0^+ + q \sqrt{\frac{1-M}{1+M}} \right) \right] \sin \left[\pi \left(\eta + \frac{q \operatorname{tg} \vartheta}{1+M} \right) \right] (\beta_0^- - \beta_0^+) \pi^{-1} \times \\ & \times \left(\eta - \frac{\beta_0^+ \operatorname{tg} \vartheta}{\sqrt{1-M^2}} \right)^{-1} \left(\beta_0^- + q \sqrt{\frac{1-M}{1+M}} \right)^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{q}{\gamma_n^-} \sqrt{\frac{1-M}{1+M}} \right) \times \\ & \times \left(1 - \frac{\beta_0^+}{\beta_n^-} \right) \left(1 - \frac{\beta_0^+}{\beta_{-n}^-} \right) \left(1 - \frac{\beta_0^+}{\gamma_n^-} \right)^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\times \left(1 + \frac{q}{\beta_n^-} \sqrt{\frac{1-M}{1+M}}\right)^{-1} \left(1 + \frac{q}{\beta_{-n}^-} \sqrt{\frac{1-M}{1+M}}\right)^{-1}$$

$R_{0,0} = (1-M)(1+M)^{-1}R$ при $M > 0$, $R_{0,0} = R$ при $M < 0$
 где

$$R = \exp \left[-\chi \left(\frac{2q}{\sqrt{1-M^2}} \right) \right] \sin \left[\pi \left(\eta - \frac{q \operatorname{tg} \vartheta}{1-M} \right) \right] \left(q \sqrt{\frac{1-M}{1+M}} + \beta_{0^+} \right) \times$$

$$\times \sin^{-1} \pi \left(\eta + \frac{q \operatorname{tg} \vartheta}{1+M} \right) \left(q \sqrt{\frac{1+M}{1-M}} - \beta_{0^+} \right)^{-1} \times$$

$$\times \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{q}{\gamma_n^+} \sqrt{\frac{1+M}{1-M}} \right) \left(1 + \frac{q}{\beta_n^+} \sqrt{\frac{1-M}{1+M}} \right) \left(1 + \frac{q}{\beta_{-n}^+} \sqrt{\frac{1-M}{1+M}} \right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{q}{\gamma_n^+} \sqrt{\frac{1-M}{1+M}} \right)^{-1} \left(1 - \frac{q}{\beta_n^+} \sqrt{\frac{1+M}{1-M}} \right)^{-1} \left(1 - \frac{q}{\beta_{-n}^+} \sqrt{\frac{1+M}{1-M}} \right)^{-1}$$

Выражения для других коэффициентов ввиду их громоздкости в статье не приводятся.

2. Рассмотрим теперь аналогичную задачу для решетки конечных пластин, с хордой, равной b . При падении на нее плоской волны (1.6) появляется ряд отраженных волн (1.7) (будем условно обозначать их β_n^- , а также ряд волн (1.8), проходящих внутрь решетки (γ_n^+). При выполнении условия

$$q < \frac{1}{2} \sqrt{1-M^2}$$

все γ_n , кроме γ_0 , комплексные, и внутри решетки могут распространяться только плоские волны γ_0^+ и γ_0^- , а остальные экспоненциально затухают по длине каналов. Так, при выполнении условия

$$\tau = \frac{b}{t} > (2\pi)^{-1} \ln 10 \left(\frac{1}{4} - \frac{q^2}{1-M^2} \right)^{-1/2}, \text{ где } t = \frac{2c}{\cos \vartheta}$$

несущественно ограничивающего практически интересный диапазон параметров решетки, после прохождения канала длиной b амплитуда волны γ_1^+ уменьшится в 10 раз. Поскольку волны более высоких номеров (γ_2^+ , γ_3^+ , ...) затухают еще быстрее, можно считать, что к нижнему срезу решетки приходит только плоская волна γ_0^+ . Такое рассмотрение несправедливо для решеток малых густот, которые, однако, не находят большого применения на практике. В результате взаимодействия волны γ_0^+ с нижним срезом решетки появляется ряд вышедших волн β_n^+ и ряд отраженных волн γ_n^- . К верхнему срезу решетки вновь приходит только плоская волна γ_0^- , опять происходят отражение и прохождение, и т. д. Выражение для поля внутри канала $-c < y < c$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, просуммировав которую, получим

$$\Phi(z) = T \frac{1+M \cos \alpha}{1+M} \left[\exp \left(-ik \frac{z}{1+M} \right) + R \exp \left(ik \frac{2b}{1-M^2} \right) \times \right.$$

$$\times \left. \exp \left(ik \frac{z}{1-M} \right) \right] \left[1 - R^2 \frac{1-M}{1+M} \exp \left(ik \frac{2b}{1-M^2} \right) \right]^{-1} \text{ при } M > 0$$

(2.1)

$$\Phi(z) = T \left[\exp \left(-ik \frac{z}{1+M} \right) + R \frac{1+M}{1-M} \exp \left(ik \frac{2b}{1-M^2} \right) \right] \times \\ \times \exp \left(ik \frac{z}{1-M} \right) \left[1 - R^2 \frac{1+M}{1-M} \exp \left(ik \frac{2b}{1-M^2} \right) \right]^{-1} \quad \text{при } M < 0 \quad (2.2)$$

Суммарный коэффициент прохождения для волн β_n^+ , отходящих от нижнего среза решетки, будет иметь вид

$$T_{nz} = S_{0,n}^{(2)} T \frac{1+M \cos \alpha}{1+M} \left[1 - R^2 \frac{1-M}{1+M} \exp \left(ik \frac{2b}{1-M^2} \right) \right]^{-1} \quad \text{при } M > 0$$

$$T_{nz} = S_{0,n}^{(2)} T \left[1 - R^2 \frac{1+M}{1-M} \exp \left(ik \frac{2b}{1-M^2} \right) \right]^{-1} \quad \text{при } M < 0$$

а суммарный коэффициент отражения для волн β_n^- , отходящих от верхнего среза решетки

$$R_{nz} = \Delta_n^{(1)} + S_{0,n}^{(1)} TR \exp \left(ik \frac{2b}{1-M^2} \right) \frac{1+M \cos \alpha}{1+M} \times \\ \times \left[1 - R^2 \frac{1-M}{1+M} \exp \left(ik \frac{2b}{1-M^2} \right) \right]^{-1} \quad \text{при } M > 0$$

$$R_{nz} = \Delta_n^{(1)} + S_{0,n}^{(1)} TR \exp \left(ik \frac{2b}{1-M^2} \right) \frac{1+M}{1-M} \times \\ \times \left[1 - R^2 \frac{1+M}{1-M} \exp \left(ik \frac{2b}{1-M^2} \right) \right]^{-1} \quad \text{при } M < 0$$

Здесь верхние индексы (1) и (2) относятся соответственно к верхнему и нижнему срезу решетки.

Выражения (2.1) и (2.2) дают возможность вычислить также поток акустической энергии через решетку в направлении, нормальном к ее фронту. Относя величину этого потока к величине потока энергии падающей волны в этом же направлении, получим коэффициент прохождения акустической энергии через решетку, который является наиболее характерной величиной, определяющей ее отражающие свойства

$$T_N = \frac{1+M \cos \alpha}{[\cos(\alpha - \vartheta) + M \cos \vartheta]} |T|^2 \left[1 - \left(\frac{1-M}{1+M} |R| \right)^2 \right] \cos \vartheta \times \\ \times \left\{ 1 - 2 \frac{1-M}{1+M} |R|^2 \cos 4\pi q \left[\frac{\tau}{(1-M^2) \cos \vartheta} + \frac{\theta}{c} \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{1-M}{1+M} \right)^2 |R|^4 \right\}^{-1} \quad \text{при } M > 0$$

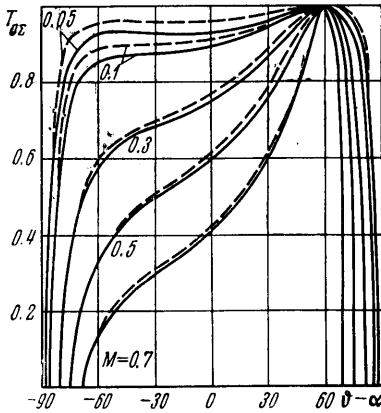
$$T_N = \frac{(1+M)^2}{(1+M \cos \alpha) [\cos(\alpha - \vartheta) + M \cos \vartheta]} |T|^2 (1 - |R|^2) \cos \vartheta \times \\ \times \left\{ 1 - 2 \frac{1+M}{1-M} |R|^2 \cos 4\pi q \left[\frac{\tau}{(1-M^2) \cos \vartheta} + \frac{\theta}{c} \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{1+M}{1-M} \right)^2 |R|^4 \right\}^{-1} \quad \text{при } M < 0$$

где учтено, что

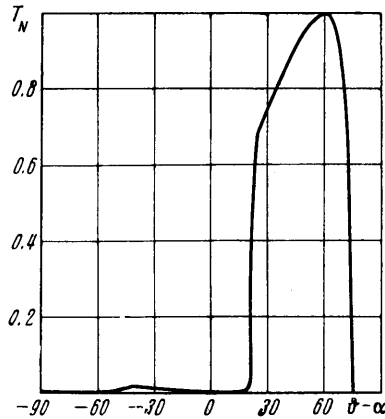
$$R = |R| \exp(i2\pi q\theta / c)$$

3. Произведенные расчеты показали (фиг. 2) хорошее совпадение полученных результатов (сплошные линии) с результатами прямого численного решения точного интегрального уравнения [1] (пунктирные линии). Время счета одного варианта на ЭВМ М-220 порядка 1 сек.

На фиг. 3 показана зависимость энергетического коэффициента прохождения от угла падения волны в случае, когда могут существовать две плоские волны, отраженные от решетки. В этом случае при некотором угле падения происходит резкое уменьшение коэффициента прохождения, связанное с появлением второй отражен-



Фиг. 2. $\theta = 60^\circ$, $kb = \pi/4$, $\tau = 1.0$



Фиг. 3. $\theta = 60^\circ$, $kb = 3.05\pi$, $\tau = 1.9$, $M = 0.5$

ной волны. В работе [1] не проведен энергетический анализ, вследствие чего эта интересная особенность осталась невыявленной.

В работе [2] при решении аналогичной задачи в случае, когда внутри решетки могут распространяться несколько волн, авторы определяют общий коэффициент прохождения для каждой вышедшей из решетки волны как алгебраическую сумму модулей коэффициентов прохождения от каждой внутренней волны, игнорируя фазовые соотношения. Это заведомо должно приводить к ошибочным (завышенным) результатам для общего коэффициента прохождения. Кроме того, в работе [2] не учитывается бесконечное число отражений, происходящих внутри решетки. Авторы считают, что это приводит к ошибочным результатам только в узких полосах частот вблизи частот отсечки внутренних волн, поскольку при этом их коэффициенты отражения близки к единице. Однако коэффициенты отражения внутренних волн могут быть близки к единице и в областях, весьма далеких от частот отсечки. В частности, это имеет место в тех случаях, когда $(\alpha - \theta)$ близко к $\pm 1/2\lambda$. Такие режимы очень важны при анализе распространения через решетку шума вращения турбомашин. В этих случаях метод работы [2] также будет давать неправильные результаты.

Автор благодарит Л. Е. Олыштейна за постоянное внимание к работе, Л. А. Вайнштейна и Р. А. Шипова за советы и полезные обсуждения.

Поступило 8 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaji S., Okazaki T. Propagation of sound waves through a blade row, p. 1, 2. J. Sound Vib., 1970, vol. 11, No. 3, pp. 339—375.
2. Many R., Horvay G. Sound transmission through blade rows. J. Sound Vib., 1970, vol. 12, No. 1, pp. 59—83.
3. Курзин В. Б. Колебания решетки тонких профилей в сжимаемом дозвуковом потоке. ПМТФ, 1962, № 1, стр. 44—50.
4. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.—Л., ОГИЗ, 1946.
5. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М., Сов. радио, 1966.