УДК 533.6.011:532.5

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РЕШЕТОК ПРОФИЛЕЙ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОТОКЕ

В. Э. САРЕН

(*Новосибирск*)

Рассматривается задача о безотрывном обтекании потенциальным потоком несжимаемой жидкости двух взаимно движущихся решеток профилей произвольной формы в предположении отсутствия вихревых следов за профилями (квазистационарная постановка). Предлагается метод приближенного решения задачи для решеток с произвольными шагами, основанный на представлении скорости жидкости на профилях решетки в виде ряда по степеням малого параметра, характеризующего расстояние между решетками. Получены предельные формулы для определения циркуляции скорости жидкости на профилях двухрядной решетки в случае, когда первая решетка является густой решеткой криволинейных дужек, а вторая — редкой решеткой пластин.

В случае решеток с равными шагами задача решалась ранее методом конформных отображений [1-3], а также методом интегральных уравнений [4], который приводит к системе двух интегральных уравнений на контурах исходных профилей решетки. Соответствующая система интегральных уравнений получена также и в общем случае решеток с произвольными шагами [4], однако при решении такой системы возникают значительные трудности, связанные с тем, что областью интегрирования является граница многосвязной области. В практическом отношении, возможно, более приемлем метод последовательных приближений [5], который состоит в последовательном решении задачи обтекания изолированной решетки с заданной неравномерностью внешнего потока, обусловленной наличием второй решетки.

В данной работе определение коэффициентов разложений искомой скорости жидкости на профилях каждой из решеток сводится к решению конечного числа линейных интегральных уравнений на контуре одного из профилей решетки.

1. В плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ (фиг. 1) рассмотрим потенциальный поток идеальной несжимаемой жидкости через двухрядную решетку профилей. Пусть скорость жидкости на бесконечном удалении перед решеткой фиксирована и вторая решетка движется в положительном направлении оси y с постоянной скоростью u. Будем предполагать, что в каждый момент времени на профилях решеток реализуется безотрывное обтекание, и ограничимся квазистационарной постановкой задачи, пренебрегая влиянием нестационарных вихревых следов, сбегающих в соответствии с теоремой Томсона с профилей.

При сделанных ограничениях рассматриваемая гидродинамическая задача сводится к определению комплексной скорости жидкости $\mathbf{V} = V_x - iV_y$, являющейся аналитической функцией в каждый момент времени t всюду во внешности двухрядной решетки профилей. На профилях решеток выполняется условие безотрывного обтекания

$$\operatorname{Im}[\mathbf{V}(z,t)e^{i\alpha_\mu(s)}] = \begin{cases} 0 & (z \in L_{1k}) \\ -u\cos\alpha_2 & (z \in L_{2k}) \end{cases} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad (1.1)$$

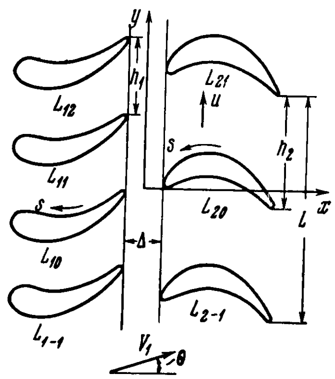
Здесь k — номер профиля в решетке; L_{1k}, L_{2k} — соответственно контур k-го профиля первой и второй решеток; α_1, α_2 — соответственно углы, образуемые касательной к профилям L_{1k} и L_{2k} в точках z и положительным направлением оси x; s — длина дуги контура профиля, отсчитываемая от выходной кромки в положительном направлении обхода (против хода часовой стрелки).

На бесконечном удалении перед решетками имеем

$$\lim_{x\to-\infty} \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 = V_{1x} - iV_{1y} \tag{1.2}$$

Условие равенства нулю относительной скорости жидкости в фиксированных выходных кромках профилей или условие Жуковского — Чаплыгина о конечности скорости в острых выходных кромках замыкает сформулированную задачу.

Нетрудно видеть, что нестационарный поток через две взаимно-движущиеся решетки, вызванный изменением их взаимного расположения, обладает периодом $iL = iN_1h_1 = iN_2h_2$, где h_1 и h_2 — соответственно шаги решеток, а N_1 и N_2 — натуральные числа. В реальных решетках в качестве N_1 и N_2 в общем случае можно взять соответственно числа лопаток решетки направляющего аппарата и решетки рабочего колеса.



Фиг. 1

Пусть $\mathbf{V}_{1k}(Z_k, t)$ и $\mathbf{V}_{2k}(Z_k, t)$ — соответственно комплексная скорость жидкости на k-м профиле первой и второй решеток. Из условия периодичности в каждый момент времени имеем

$$\mathbf{V}_{\mu k}(Z_k, t) = \mathbf{V}_{\mu k}(Z_{k+N\mu}, t) = \\ = \mathbf{V}_{\mu k}(Z_k, t + L/u) \quad (\mu = 1{,}2) \tag{1.3}$$

$$Z_k = \begin{cases} z_1 + ikh_1 - {}^1/{}_2\Delta & (z_1 \in L_1,\ \mu = 1) \\ z_2 + ikh_2 + iut + {}^1/{}_2\Delta & (z_2 \in L_2,\ \mu = 2) \end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь через L_1 и L_2 (фиг. 2) соответственно обозначены сдвинутые вдоль оси x на ${}^1/{}_2\Delta$ и $-{}^1/{}_2\Delta$ исходные профили первой и второй решеток в некоторый, выбранный в качестве начального, момент времени $t = 0$

Комплексная скорость жидкости в точке z области течения в момент времени t в соответствии с равенствами (1.2) — (1.4) может быть представлена формулой [6]

$$\mathbf{V}(z, t) = \frac{1}{2Li} \int\limits_{L_1} \sum_{m=0}^{N_1-1} \mathbf{V}_{1m}(\zeta_1, t) \left[\operatorname{cth} \pi \left(\frac{z - \zeta_1 + {}^1/{}_2\Delta}{L} - i\frac{m}{N_1} \right) + 1 \right] d\zeta_1 +$$

$$+ \frac{1}{2Li} \int\limits_{L_2} \sum_{m=0}^{N_2-1} \mathbf{V}_{2m}(\zeta_2, t) \left[\operatorname{cth} \pi \left(\frac{z - \zeta_2 - iut - {}^1/{}_2\Delta}{L} - i\frac{m}{N_2} \right) + 1 \right] d\zeta_2 + \mathbf{V}_1.$$

$$\zeta_\mu = \xi_\mu + i\eta_\mu, \quad \zeta_\mu \in L_\mu \quad (\mu = 1, 2)$$

Устремим точку z из области течения к k-му профилю сначала первой, а затем второй решетки. Значения скоростей $\mathbf{V}_{1k}$ и $\mathbf{V}_{2k}$ определятся при этом по формулам Сохоцкого как краевые значения аналитической в области функции. Используя равенства (1.1), (1.4) и разложения

$$\operatorname{cth} z + 1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nz}, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

$$\operatorname{cth} z + 1 = -2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2nz}, \quad \operatorname{Re} z < 0$$

получим систему двух интегральных уравнений для определения относительной скорости жидкости $V_{1k}(s, t)$ и $V_{2k}(s, t)$ на профилях решеток

$$\frac{1}{2}V_{\mu k}(\sigma,t)-\frac{e^{i\alpha_\mu(\sigma)}}{2Li}\times$$

$$\times\int\limits_{L_\mu}\sum_{m=0}^{N_\mu-1}V_{\mu m}(s,t)\left[\operatorname{cth}\pi\left(\frac{z_\mu-\zeta_\mu}{L}+i\frac{k-m}{N_\mu}\right)+1\right]ds=\Pi_\mu(\sigma) \quad (1.5)$$

где

$$\Pi_1(\sigma)=e^{i\alpha_1(\sigma)}\left\{-\frac{1}{Li}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{L_2}\sum_{m=0}^{N_2-1}V_{2m}(s,t)\exp\left[2\pi n\left(Z_{12}-\frac{\Delta}{L}-i\frac{m}{N_2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-in\left(\omega t-2\pi\frac{k}{N_1}\right)\right]ds+\mathrm{V}_1\right\}$$

$$\Pi_2(\sigma)=e^{i\alpha_2(\sigma)}\left\{\frac{1}{Li}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{L_1}\sum_{m=0}^{N_1-1}V_{1m}(s,t)\exp\left[2\pi n\left(Z_{21}-\frac{\Delta}{L}+i\frac{m}{N_2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-in\left(\omega t+2\pi\frac{k}{N_1}\right)\right]ds+\mathrm{V}_1+iu\right\}$$

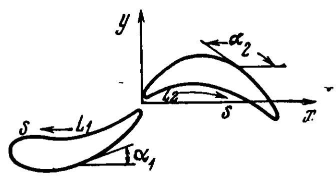
$$Z_{12}=\frac{z_1(\sigma)-\zeta_2(s)}{L},\qquad Z_{21}=-\frac{z_2(\sigma)-\zeta_1(s)}{L},\qquad \omega=\frac{2\pi u}{L} \quad (1.6)$$

Исходя из вида правых частей уравнений (1.5), представим искомое решение в виде

$$V_{\mu k}(s,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\left[u_{\mu nr}(s)\cos r(\omega t+k\varphi_\mu)+\right.$$

$$\left.+v_{\mu nr}(s)\sin r(\omega t+k\varphi_\mu)\right]e^{-2\pi n\Delta/L} \quad (1.7)$$

$$\varphi_\mu=(-1)^\mu\frac{2\pi}{N_\mu} \qquad (\mu=1,\,2)$$



Фиг. 2

Для исходных ($k=0$) профилей решеток интегральные уравнения (1.6) запишутся тогда в форме

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}K_{\mu r}(U_{\mu nr},\varphi_\mu)\,e^{jr\omega t}e^{-2\pi n\Delta/L}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\Pi_{\mu nr}(\sigma)\,e^{jr\omega t}e^{-2\pi n\Delta/L}$$

$$U_{\mu nr}=u_{\mu nr}+jv_{\mu nr} \qquad (\mu=1,\,2) \quad (1.8)$$

Введенная здесь для сокращения записи мнимая единица j не взаимодействует с i.

Интегральный оператор $K_{\mu r}(U_{\mu nr}, \varphi_\mu)$ имеет вид

$$K_{\mu r}=\frac{1}{2}U_{\mu nr}(\sigma)-\frac{e^{i\alpha_\mu(\sigma)}}{2Li}\int\limits_{L_\mu}U_{\mu nr}(s)\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{N_\mu-1}e^{-jmr\varphi_\mu}\left[\operatorname{cth}\pi\left(\frac{z_\mu-\zeta_\mu}{2Li}-i\frac{m}{N}\right)+1\right]ds \quad (1.9)$$

Отметим, что действительная (по i) часть $K_{\mu r}$ есть оператор Фредгольма второго рода, а мнимая часть — сингулярный оператор первого рода с ядром Коши.

Для определения правых частей уравнений (1.8) после подстановки равенств (1.7) в выражения (1.6) получаем формулы

$$\Pi_{100} = V_1 e^{i\alpha_1(\sigma)}, \qquad \Pi_{200} = \frac{e^{i\alpha_2(\sigma)}}{h_1 i} \int\limits_{L_1} u_{100}(s)\,ds + (V_1 + iu)\, e^{i\alpha_2(\sigma)} \tag{1.10}$$

$$\Pi_{1nr} = -\varkappa_{2r} \frac{e^{i\alpha_1(\sigma)}}{2h_2 i} \int\limits_{L_2} \Big\{ \sum_{k=\varkappa_1}^{n-1} (1 - ij)\, a(2, k, k - n + r) \exp[2\pi(n-k) Z_{12}] +$$
$$+ \sum_{\substack{k=\varkappa_2 \\ r \leqslant n-2}}^{n-1} (1 + ij)\, a(2, k, k - n - r) \exp[2\pi(n-k) Z_{12}] \Big\}\, ds \tag{1.11}$$

$$\Pi_{2nr} = \varkappa_{1r} \frac{e^{i\alpha_2(\sigma)}}{2h_1 i} \int\limits_{L_1} \Big\{ \sum_{k=\varkappa_1}^{n} (1 - ij)\, a(1, k, k - n + r) \exp[2\pi(n-k) Z_{21}] +$$
$$+ \sum_{k=\varkappa_2}^{n} (1 + ij)\, a(1, k, k - n - r) \exp[2\pi(n-k) Z_{21}] \Big\}\, ds$$

$$\varkappa_1 = \left[\frac{n - r + 1}{2}\right], \quad \varkappa_2 = \left[\frac{n + r + 1}{2}\right] \qquad \text{(целые части)}$$

$$\varkappa_{\mu r} = \frac{1}{N_\mu} \sum_{m=0}^{N_\mu - 1} e^{\pm i 2\pi r m / N_\mu} = \begin{cases} 1, & r = r_1 N_\mu \\ 0, & r \neq r_1 N_\mu \end{cases}, \quad r_1 = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.12}$$

$$a(\mu, k, l) = \begin{cases} u_{\mu k l} + i v_{\mu k l}, & l > 0 \\ 2u_{\mu k 0}, & l = 0 \\ u_{\mu k r} - i v_{\mu k r}, & r = -l, \quad l < 0 \end{cases} \tag{1.13}$$
$$(\mu = 1, 2)$$

Соотношения (1.8) — (1.13) дают алгоритм для приближенного определения относительной скорости жидкости на профилях двухрядной решетки с любой наперед заданной степенью точности. Действительно, приравнивая коэффициенты левых и правых частей уравнений (1.8) последовательно при $n = 0, 1, 2, \ldots$, и $r = 0, 1, 2, \ldots, n$, получим цепочку интегральных уравнений относительно функций $U_{\mu n r}$ ($\mu = 1, 2$). При этом правые части уравнений относительно U_{1nr} ($r = 0, 1, 2, \ldots, n$) согласно равенствам (1.10) — (1.13) полностью определяются функциями U_{2n_1r} ($n_1 = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; $r = 0, 1, 2, \ldots, n_1$). Отсюда после определения U_{1nr} получаем по второй формуле (1.11) правые части для уравнений относительно функций U_{2nr} ($r = 0, 1, 2, \ldots, n$). Ограничиваясь $n = n_0$, после решения интегральных уравнений приближенное решение задачи с точностью до слагаемых порядка величины $\exp(-2\pi n_0 \Delta / L)$ дается формулами (1.7), где полагается $n \leqslant n_0$.

Отметим, что, как следует из равенств (1.12), в формулах (1.7) сохраняются лишь слагаемые с индексами r, кратными числами N_2 ($\mu = 1$) и

$N_1(\mu = 2)$. Это обстоятельство находится в соответствии с известным для осевых турбомашин фактом, что нестационарные периодические усилия, вызванные наличием соседней решетки, движущейся относительно данной, действуют на решетку с частотами, кратными числу лопаток соседней решетки. Таким образом, относительная скорость жидкости на профилях двух взаимно движущихся решеток может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} V_{1k}(s,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n_2}[u_{1nr}(s)\cos r(\omega_1 t + k\psi_1) + \\ &\quad + v_{1nr}(s)\sin r(\omega_1 t + k\psi_1)]\, e^{-2\pi n\Delta/L} \\ V_{2k}(s,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n_1}[u_{2nr}(s)\cos r(\omega_2 t + k\psi_2) + \\ &\quad + v_{2nr}(s)\sin r(\omega_2 t + k\psi_2)]\, e^{-2\pi n\Delta/L} \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$n_1 = \left[\frac{n}{N_1}\right], \quad n_2 = \left[\frac{n}{N_2}\right] \quad \text{(целые части)}$$

$$\omega_1 = 2\pi u / h_2, \quad \omega_2 = 2\pi u / h_1, \quad \psi_1 = -2\pi N_2 / N_1, \quad \psi_2 = 2\pi N_1 / N_2.$$

Функции $u_{\mu nr}$ и $v_{\mu nr}$ $(\mu = 1, 2)$ определяются в результате последовательного решения интегральных уравнений

$$\begin{aligned} K_{1r}(U_{1nr}, \psi_1) &= \Pi_{1nr_1}\big|_{r_1 = rN_2}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n_2 \\ K_{2r}(U_{2nr}, \psi_2) &= \Pi_{2nr_1}\big|_{r_1 = rN_1}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n_1 \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

2. Рассмотрим частный случай двухрядной решетки, составленной из тонких профилей-дужек. Заменим каждый профиль решетки слоем непрерывно распределенных вихрей с погонной интенсивностью

$$\gamma_{\mu k}(s, t) = V_{\mu k}^{+}(s, t) - V_{\mu k}^{-}(s, t); \quad \mu = 1, 2; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

где через $V_{\mu k}^{\pm}$ обозначены соответственно предельные значения относительной скорости жидкости при подходе снизу и сверху к k-му профилю μ-й решетки. Возмущенная скорость жидкости на профиле решетки определяется тогда как полусумма предельных индуктивных скоростей, полученных при подходе к профилю снизу и сверху.

Искомую величину погонной интенсивности вихревого слоя в соответствии с равенствами (1.14) и (1.15) можно представить в виде

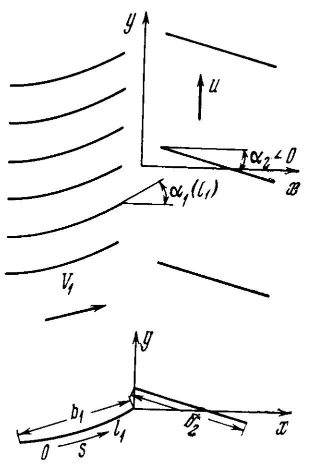
$$\begin{aligned} \gamma_{1k}(s,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n_2}[\eta_{1nr}(s)\cos r(\omega_1 t + k\psi_1) + \\ &\quad + \varepsilon_{1nr}(s)\sin r(\omega_1 t + k\psi_1)]\, e^{-2\pi n\Delta/L} \\ \gamma_{2k}(s,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n_1}[\eta_{2nr}(s)\cos r(\omega_2 t + k\psi_2) + \\ &\quad + \varepsilon_{2nr}(s)\sin r(\omega_2 t + k\psi_2)]\, e^{-2\pi n\Delta/L} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Функции $\gamma_{\mu nr} = \eta_{\mu nr} + \varepsilon_{\mu nr}$ $(\mu = 1, 2)$ удовлетворяют сингулярным интегральным уравнениям с ядром Коши

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}_i K_{1r}(\gamma_{1nr}, \psi_1) &= \operatorname{Im}_i \Pi_{1nr_1}\big|_{r_1=rN_2}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n_2 \\ \operatorname{Im}_i K_{2r}(\gamma_{2nr}, \psi_2) &= \operatorname{Im}_i \Pi_{2nr_1}\big|_{r_1=rN_1}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n_1 \\ &(n=0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Интегрирование в операторах $K_{\mu r}$ $(\mu = 1, 2)$ производится здесь по дужке профиля соответствующей решетки и длина дуги s отсчитывается от передней кромки. При этом согласно общей теории уравнений типа (2.2) и условию Жуковского — Чаплыгина искомое решение принадлежит к классу интегрируемых функций, непрерывных во всех внутренних точках дужки профиля и конечных в выходных кромках профилей ($s = l_\mu$, $\mu = 1, 2$).

Обозначим через b_μ и $\tau_\mu = b_\mu / h_\mu$ $(\mu = 1, 2)$ соответственно, длину хорды профиля и густоту μ-й решетки. Пусть далее первая решетка будет густой $(\tau_1 \gg 1)$ решеткой криволинейных дужек, а вторая — редкой $(\tau_2 \ll 1)$ решеткой пластин (фиг. 3). При этом, очевидно, имеем $N_2 \ll N_1$. В качестве примера применения алгоритма, изложенного в п. 1, построим предельное решение исследуемой задачи, когда областью изменения параметров τ_1 и τ_2 является полуполоса $\tau_1 \gg 1$, $\tau_2 \ll 1$.



Фиг. 3

Сопоставляя равенства (2.1), (2.2) с соотношениями (1.10) — (1.13), для погонной интенсивности вихрей на профилях решетки в рассматриваемом случае получим выражения

$$\begin{aligned} \gamma_{1k}(s, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \big[\eta_{1nr}\big|_{n=rN_2} \cos r(\omega_1 t + k\psi_1) + {} \\ + \varepsilon_{1nr}\big|_{n=rN_2} \sin r(\omega_1 t + k\psi_1)\big] \times {} \\ \times \exp(-2\pi r\tau_2\Delta_2) + O(\tau_2^2, \tau_1 e^{-2\pi\tau_1\Delta_1}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{2k}(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{2n0}(s) \exp(-4\pi n\tau_2\Delta_2) + {} \\ + O(\tau_2^2\ \tau_1 e^{-2\pi\tau_1\Delta_1}) \\ \Delta_1 = \Delta / b_1, \qquad \Delta_2 = \Delta / b_2 \end{aligned}$$

Интегральные операторы в левой части уравнений (2.2) в рассматриваемой области изменения параметров τ_1 и τ_2 могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}_i K_{10}(\gamma_{100}, \psi_1) = -\operatorname{Im}_i \left\{ \frac{e^{i\alpha_1(\sigma)}}{2b_1 i} \tau_1 \int_0^{l_1} \gamma_{100}(s) \left[\operatorname{sgn}(x_1 - \xi_1) + 1\right] ds \right\} + {} \\ + O(\tau_1 \exp(-2\pi\tau_1^{1-\delta})) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}_i K_{20}(\gamma_{2n0}, \psi_2) = -\operatorname{Im}_i \left\{ \frac{e^{i\alpha_2(\sigma)}}{2\pi b_2 i} \int_0^{l_2} \gamma_{2n0}(s) \left[\frac{b_2}{z_2 - \zeta_2} + \pi\tau_2 \right] ds \right\} + O(\tau_2^2), \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\operatorname{Im}_i K_{1r}(\gamma_{1nr}|_{n=rN_2}, \psi_1) = -\operatorname{Im}_i\left\{\frac{e^{i\alpha_1(\sigma)}}{2b_1 i}\tau_1\int_0^{l_1}\gamma_{1nr}(s)J_n(z_1,\zeta_1)\,ds\right\} + O\left(\frac{r^2N_2^2}{N_1^2}\right) \tag{2.6}$$

где

$$0<\delta<1,\qquad J_n = \int_0^1 e^{j2\pi n\varphi}\operatorname{cth}\left[\pi\left(\frac{z_1-\zeta_1}{L} - in\varphi\right)\right]d\varphi$$

Отметим, что в операторах (1.9) особые интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши, поэтому для обоснования представлений (2.4) и (2.5) достаточно использовать соответствующие разложения ядер операторов $K_{\mu 0}$ ($\mu = 1, 2$) вне некоторой окрестности точки z_1 ($|x_1 - \xi_1| \geqslant \varepsilon > 0$). Соотношение (2.6) получается, если рассмотреть сумму

$$\sum_{m=0}^{N_1-1} e^{j2\pi nm/N_1}\operatorname{cth}\left[\pi\left(\frac{z_1-\xi_1}{L} - i\frac{m}{N_1}\right)\right]\frac{1}{N_1},\qquad n = rN_2$$

как приближенное значение интеграла J_n. Последний является дифференцируемой функцией параметров $X = x_1 - \xi_1$ ($|X|) \geqslant \varepsilon > 0$) и $Y = y_1 - \eta_1$. Отсюда в результате несложных вычислений получим

$$J_n(z_1,\zeta_1) = [\operatorname{sgn}(x_1-\xi_1) + ij]\exp\left[-2\pi n\frac{z_1-\zeta_1}{L}\operatorname{sgn}(x_1-\xi_1)\right] \tag{2.7}$$

Пренебрегая в дальнейшем членами порядка величины τ_2^2, $\tau_1 e^{-2\pi\tau_1\Delta_1}$ и N_2/N_1, из соотношений (1.10), (2.4) и (2.5) получаем уравнения относительно функций γ_{100} и γ_{200}, дающие «нулевое» ($n = 0$) приближение искомого предельного решения

$$k_{10}(\sigma) = \int_0^\sigma \gamma_{100}(s)\,ds = -\frac{\sin(\theta - \alpha_1(\sigma))}{\tau_1\cos\alpha_1(\sigma)} \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\sigma \gamma_{200}(s)\left[\frac{1}{\sigma - s} + \pi\tau_2\cos\alpha_2\right]ds = \Pi_{200}(\sigma) \tag{2.9}$$

где

$$\Pi_{200} = (u - \tau_2\Gamma_{100})\cos\alpha_2 - \sin(\theta - \alpha_2),\qquad \Gamma_{100} = \int_0^{l_1}\gamma_{100}(s)\,ds,\qquad \mathrm{V}_1 = V_1 e^{-i\theta}$$

Здесь и далее все величины размерности скорости нормированы к скорости набегающего потока V_1, а линейные размеры — к длине хорды профиля соответствующей решетки.

Представим решение уравнения (2.8) обобщенной функцией вида

$$\gamma_{100}(s) = \Gamma_0\delta(s) + \frac{d\Gamma(s)}{ds}\qquad\left(\frac{1}{2}\Gamma_0 = \lim_{\sigma\to 0} k_{10}(\sigma)\right) \tag{2.10}$$

где $\delta(s)$ — дельта-функция Дирака, а $\Gamma(s)$ — непрерывная дифференцируемая функция. Подставляя равенство (2.10) в уравнение (2.8), после дифференцирования последнего будем иметь

$$\gamma_{100}(s) = -2\frac{\sin(\theta-\alpha_1(0))}{\tau_1 \cos\alpha_1(0)}\delta(s) + \alpha_1'(s)\frac{\cos\theta}{\tau_1\cos^2\alpha_1(s)} \tag{2.11}$$

Механический смысл соотношения (2.10) состоит в том, что безотрывное обтекание весьма густой решетки тонких профилей может быть построено при помощи цепочки дискретных вихрей, расположенных в передних кромках профилей и некоторого вихревого слоя, непрерывно распределенного с плотностью $\Gamma'(s)$ по дужкам профилей решетки. Этот непрерывный вихревой слой обусловлен поворотом потока в густой решетке вследствие кривизны профилей. В частном случае густой решетки пластин имеем $\alpha_1'(t) = 0, \Gamma'(s) = 0$.

Интегрируя равенство (2.11) по дужке профиля первой решетки, получаем известное (см. [7]) предельное выражение для циркуляции скорости жидкости в густой решетке тонких профилей

$$\Gamma_{100} = -\frac{\sin(\theta-\alpha_1(l_1))}{\tau_1\cos\alpha_1(l_1)} \tag{2.12}$$

Решение уравнения (2.9) дается формулой обращения особого интеграла с ядром Коши (см., например, [8]) для разомкнутого контура. Учитывая равенство (2.12), по формуле обращения получаем

$$\gamma_{200}(s) = C\left(\frac{1-s}{s}\right)^{1/2}, \quad \Gamma_{200} = \int_0^1 \gamma(s)\,ds = \frac{\pi}{2}C \tag{2.13}$$

$$C = 4\frac{\cos\theta\sin(\alpha_1(l_1)-\alpha_2) - u\cos\alpha_2\cos\alpha_1(l_1)}{(2-\pi\tau_2\cos\alpha_2)\cos\alpha_1(l_1)}$$

Интегральное уравнение относительно функций $\gamma_{1nr}(s)$ $(n = rN_2$, $r = 1, 2, 3, \ldots)$ после подстановки (2.7) в (2.6) и определения правой части Π_{1nr} $(n = rN_2,\ r = 1, 2, 3, \ldots)$ из равенств (1.11) примет вид (2.14)

$$k_r(\sigma) = \frac{\tau_1}{2}\int_0^{l_1}\gamma_{1nr}(s)\operatorname{sgn}(x_1-\xi_1)\exp\left\{-k_r\frac{b_1}{b_2}[|x_1-\xi_i| - j(y_1-\eta_1)] - \right.$$

$$\left. - j\operatorname{sgn}(x_1-\xi_1)\alpha_1(\sigma)\right\}ds = \tau_2 C_r \exp\left[k_r\frac{b_1}{b_2}(x_1+jy_1) + j\alpha_1(\sigma)\right]$$

$$k_r = 2\pi r\tau_2, \qquad r^2 \leqslant N_1/N_2$$

$$C_r = C\int^1\left(\frac{1-s}{s}\right)^{1/2}\exp[-k_r(\xi_2+j\eta_2)]\,ds = \frac{\pi}{2}C\Phi\left(\frac{1}{2}, 2, -k_r e^{j\alpha_2}\right)$$

Здесь Φ — вырожденная гипергеометрическая функция [9].

Решение уравнения (2.14), непрерывное во всех внутренних точках дужки профиля первой решетки и конечное в выходной кромке, удовлетворяет соотношению

$$\lim \int^{l_1}\gamma_{1nr}(s)\,ds = 0$$

что указывает на представимость функции $\gamma_{1nr}(s)$ в форме (2.10). Подставляя (2.10) в уравнение (2.14) и дважды дифференцируя последнее по переменной σ, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[F(\sigma)\,\frac{\exp(-2j\alpha_1(\sigma))+1}{2\Psi(\sigma)}\right]+F(\sigma)=0$$

где

$$F(\sigma)=\Gamma'(\sigma)\exp\left[-\frac{k_r b_1(x_1+jy_1)}{b_2}\right],\quad \Psi(\sigma)=\frac{k_r b_1\cos\alpha_1(\sigma)}{b_2}+j\frac{d\alpha_1(\sigma)}{d\sigma}$$

Отсюда

$$\Gamma'(\sigma)=\frac{d\Gamma}{d\sigma}=\frac{A}{\cos^2\alpha_1(\sigma)}\Psi(\sigma),\qquad A=\mathrm{const}$$

Находим далее константу A из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}k_r(\sigma)\,\Big|_{\sigma=l_1}=\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\mathrm{Im}_i\,\Pi_{1nr}\right]\Big|_{\sigma=l_1}$$

после чего коэффициент Γ_0 однозначно определяется из исходного уравнения (2.14). Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательный вид решения

$$\gamma_{1nr}(s)=2\frac{\tau_2}{\tau_1}C_r\exp\left[j\left(k_r\frac{b_1}{b_2}y_1(l_1)+\alpha_1(l_1)+\alpha_1(0)\right)\right]\times$$
$$\times\left[2\frac{\cos\alpha_1(l_1)}{\cos\alpha_1(0)}\delta(s)+e^{-j\alpha_1(0)}\frac{\cos\alpha_1(l_1)}{\cos^2\alpha_1(s)}\Psi(s)\right]\tag{2.15}$$

$$\Gamma_{1nr}=\int_0^{l_1}\gamma_{1nr}(s)\,ds=2\frac{\tau_2}{\tau_1}C_r\exp\left[j\left(k_r\frac{b_1}{b_2}y_1(l_1)+\alpha_1(l_1)\right)\right]\times$$
$$\times\left[e^{j\alpha_1(l_1)}+k_r\frac{b_1}{b_2}\int_0^{l_1}\frac{ds}{\cos\alpha_1(s)}\right]\tag{2.16}$$

Функции $\eta_{2n0}(s)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ определяются как решения уравнения (2.9), где правая часть, вычисленная по формулам (1.11) и (2.15), равна

$$\mathrm{Im}_i\,\Pi_{2n_0}(\sigma)=\mathrm{Im}_i\left\{\frac{e^{i\alpha_2}}{i}J_r\exp[-k_r(x_2+iy_2)]\right\}$$

$$J_r=\pi\tau_2 C\Phi\left(\frac{1}{2},2,-k_r e^{-i\alpha_2}\right)e^{-i2\alpha_1(l_1)}$$

Отсюда по формуле обращения получаем

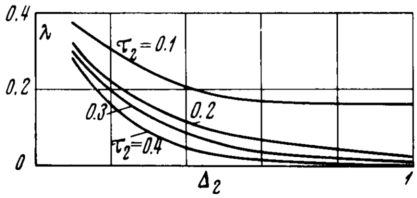
$$\gamma_{2n_0}(\sigma)=-\left(\frac{1-\sigma}{\sigma}\right)^{1/2}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^1\left(\frac{s}{1-s}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{Im}_i\,\Pi_{2n_0}(s)}{\sigma-s}ds-\tau_2\Gamma_{2n0}\cos\alpha_2\right]\tag{2.17}$$

где

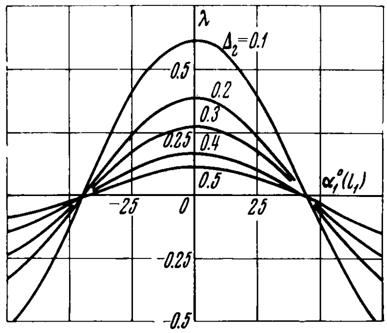
$$\Gamma_{2n0}=\int_0^1\gamma_{2n0}(s)\,ds=-\frac{2\pi^2\tau_2}{2-\pi\tau_2\cos\alpha_2}\mathrm{Im}\left\{\frac{\exp[i(\alpha_2-2\alpha_1(l_1))]}{i}\times\right.$$
$$\left.\times\Phi\left(\frac{1}{2},2,-k_r e^{-i\alpha_2}\right)\Phi\left(\frac{3}{2},2,-k_r e^{i\alpha_2}\right)\right\}\tag{2.18}$$

Равенства (2.3), (2.11) — (2.13) и (2.15) — (2.18) дают предельное решение (решение в полуполосе $\tau_1 \gg 1$, $\tau_2 \ll 1$) задачи о гидродинамическом взаимодействии густой решетки профилей — дужек и редкой решетки пластин. Нетрудно видеть, что аналогично может быть построено предельное решение в области $\tau_1 \ll 1$, $\tau_2 \gg 1$.

В заключение остановимся на интересном в практическом отношении вопросе о величине средней за период $T = L / u$ циркуляции скорости жидко-



Фиг. 4



Фиг. 5

сти Γ_{20} на профиле решетки, движущейся относительно соседней решетки, которая расположена на расстоянии Δ от данной. В соответствии с равенствами (1.14) и (1.15) величина Γ_{20} может быть представлена в форме

$$\Gamma_{20} = b_2 V_1 \Gamma_{200} [1 + \lambda(\Delta, \tau_1, \tau_2, \alpha_1, \alpha_2)], \qquad \lim_{\Delta \to \infty} \lambda = 0$$

где функция λ характеризует гидродинамическое взаимодействие с соседней решеткой. В рассматриваемом случае $\tau_1 \gg 1$, $\tau_2 \ll 1$ согласно равенствам (2.13) и (2.18) функция λ равна

$$\lambda = -\frac{4\pi\tau_2}{2 - \pi\tau_2 \cos\alpha_2} \operatorname{Im}\left[\frac{\exp i(\alpha_2 - 2\alpha_1(l_1))}{i} \sum_{r=1}^{r_0} \Phi\left(\frac{1}{2}, 2, -k_r e^{-i\alpha_2}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \Phi\left(\frac{3}{2}, 2, -k_r e^{i\alpha_2}\right) \exp(-4\pi r \tau_2 \Delta_2)\right], \qquad r_0^2 \leqslant [N_2/N_1]$$

Зависимости $\lambda(\Delta_2, \tau_2)$ для $\alpha_1(l_1) = 30°$ и $\lambda(\Delta_2, \alpha_1(l_1))$ для $\tau_2 = 0.3$ при значении $\alpha_2 = 0$ представлены на фиг. 4 и фиг. 5.

Поступило 29 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Feindt E. G. Berechnung der Strömung des Tandemgitters mit bewegter zweite Schraufelreihe. Ingr.— Arch., 1961, Nr 2, Bd 30.
2. Feindt E. G. Berechnung der Strömung des instationären vielstufigen Plattengitters. Ingr.— Arch., 1961, Nr 5, Bd 30.
3. Feindt E. G. Berechnung der instationären Strömung des vielstufigen destaffelten Plattengitters. Ingr.— Arch., 1962. Nr 4, Bd 31.
4. Kazimierski Z. Plaski przeplyw przez osiowy stopien maszyny przeplywowey o dowolnich parametrach geometryczuch. Arch. Budowy Maszyn, 1966, vol. 13, No. 2.
5. Самойлович Г. С. Нестационарное обтекание и аэроупругие колебания решеток турбомашин. М., «Наука», 1969.
6. Сарен В. Э. Решетка произвольных вибрирующих профилей в потоке несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
7. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М., «Наука», 1965.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи, Изд. 2. М., Физматгиз, 1963.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.