

УДК 532.5

СОУДАРЕНИЕ ТРЕХ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫТЕКАЮЩИХ ИЗ КАНАЛОВ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

П. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

(Москва)

Рассматриваемое течение в общем случае имеет разрывы вдоль линий тока, разделяющих струи. Аналитические функции, описывающие течение в каждой области его непрерывности, связаны на линиях разрыва соотношениями, которые можно свести к нелинейной системе, содержащей два числовых параметра и включающей в себя сингулярные интегралы. Упомянутая выше система имеет единственное решение, если числовые параметры равны нулю. Поэтому, если параметры достаточно малы, решение системы можно представить в виде двойного ряда по степеням этих параметров. При этом коэффициенты ряда оказываются решениями линейных сингулярных интегральных уравнений первого рода.

Решение задачи представляет интерес в связи с приложением к теории струйной автоматики (пневмоники).

Из канала шириной δ_0 (фиг. 1), образованного стенками AC и AF , параллельными оси x , вытекает струя жидкости плотности ρ_0 , имеющая скорость v_0 в бесконечно удаленной точке A .

Из канала шириной δ_1 , образованного параллельными стенками EF и EH , вытекает струя жидкости плотности ρ_1 , имеющая на свободной границе HD скорость v_1 . Стенки AF и EF образуют угол α . Третья струя жидкости, имеющая плотность ρ_2 и скорость v_2 на свободной границе GD , вытекает из канала шириной δ_2 , образованного параллельными стенками BC и BG . Стенки AC и BC образуют угол β . Пусть

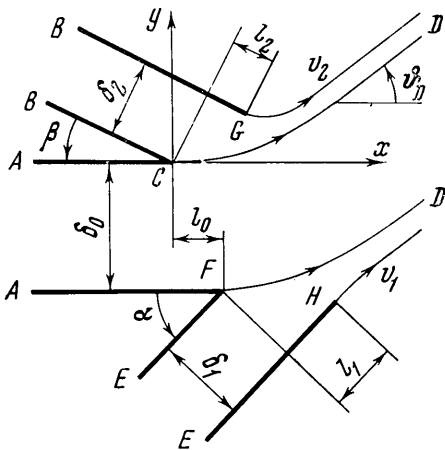
$$\varepsilon_1 = \rho_1 v_1^2 / \rho_0 v_0^2, \quad \varepsilon_2 = \rho_2 v_2^2 / \rho_0 v_0^2$$

Рассматривается случай, когда ε_1 и

ε_2 меньше единицы. По теореме Бернулли течение имеет разрыв вдоль линий CD и FD , разделяющих струи, и описывается кусочно-аналитическими функциями, которым в области течения $BCDGB$ в дальнейшем будет приписываться индекс плюс, а в области $EFDHE$ — минус. Струя, вытекающая из бесконечно удаленной точки A , не имеет критической точки и ограничена линиями с непрерывно меняющейся касательной. Решение задачи определяется в виде формальных двойных рядов по степеням ε_1 и ε_2 . Задача о соударении двух струй [1, 2] является частным случаем данной.

1. Рассмотрим течение в области $ACDFA$. Соответствующая область изменения комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ представляет собой полосу шириной $q_0 = v_A \delta_0$, где q_0 — расход вытекающей из канала жидкости, а v_A — скорость течения в бесконечно удаленной точке канала.

Пусть $w(C) = q_0 i$, $w(F) = \varphi_F$, где φ_F — действительное число (фиг. 2). Область изменения функции w может быть конформно отображена на второй квадрант вспомогательной комплексной плоскости $\tau = \xi + i\zeta$ так, чтобы точки D , C и F перешли соответственно в -1 , 0 и бесконечно удален-



Фиг. 1

ную точку (фиг. 3). При этом

$$\tau = - \left[\frac{\exp(\pi w/q_0) + 1}{\exp(\pi w/q_0) - \Psi} \right]^{1/2}, \quad \Psi = \exp \frac{\pi \varphi_F}{q_0} \quad (1.1)$$

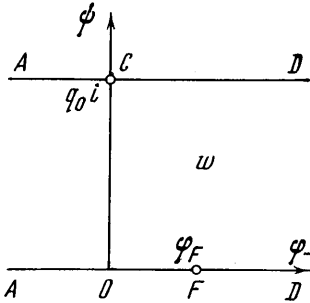
Здесь Ψ — функция, зависящая от ε_1 и ε_2 . Так же как и в работе [2], введем функцию

$$\omega = \ln \frac{dw}{v_0 dz} = \ln \frac{v}{v_0} - i\theta \quad (1.2)$$

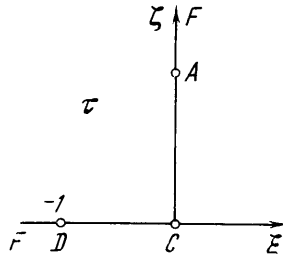
где v и θ — модуль и аргумент вектора скорости. Эта функция может быть аналитически продолжена на всю верхнюю полуплоскость τ и представлена в виде

$$\omega = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{v}{v_0} \frac{d\tau}{\tau - \xi} \quad (1.3)$$

Пусть $\lambda_- = 2p/\rho_1 v_1^2$ и $\lambda_+ = 2p/\rho_2 v_2^2$ — безразмерные величины давления p соответственно на линиях разрыва течения FD и CD . Очевидно, что



Фиг. 2



Фиг. 3

функции λ_{\mp} изменяются от 1 до 0. В силу конформного отображения (1.1) величины λ_{\mp} , ε_1 , ε_2 , ξ связаны некоторыми соотношениями

$$f_{-}^{\circ}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_{-}, \xi) = 0 \quad (|\xi| \geq 1) \quad (1.4)$$

$$f_{-}^{\circ}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1, \pm\infty) = 0, \quad f_{-}^{\circ}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0, \pm 1) = 0$$

$$f_{+}^{\circ}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_{+}, \xi) = 0 \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (1.5)$$

$$f_{+}^{\circ}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1, 0) = 0, \quad f_{+}^{\circ}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0, \pm 1) = 0$$

Эти соотношения определяют непрерывные функции $\xi = \xi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_{\mp})$ и $\lambda = \lambda_{\mp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \xi)$, причем последние из них являются четными функциями аргумента ξ . По теореме Бернулли

$$\frac{v}{v_0} = \begin{cases} \sqrt{1 - \varepsilon_1 \lambda_{-}} & (|\xi| \geq 1) \\ \sqrt{1 - \varepsilon_2 \lambda_{+}} & (-1 \leq \xi \leq 1) \end{cases} \quad (1.6)$$

Так же как и в работе [2], можно получить

$$a = \frac{v_A}{v_0} = \exp \left(\frac{2\Psi^{1/2}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln(v/v_0) d\xi}{\Psi \xi^2 + 1} \right) \quad (1.7)$$

$$\xi^2 = \frac{\Phi_-^\circ + 1}{\Phi_-^\circ - \Psi}, \quad \Phi_-^\circ = \Psi \exp\left(\frac{\pi}{a\delta_0} \int_0^s \sqrt{1 - \varepsilon_1 \lambda_-} ds\right) \quad (|\xi| > 1) \quad (1.8)$$

$$\xi^2 = \frac{\Phi_+^\circ - 1}{\Phi_+^\circ + \Psi}, \quad \Phi_+^\circ = \exp\left(\frac{\pi}{a\delta_0} \int_0^s \sqrt{1 - \varepsilon_2 \lambda_+} ds\right) \quad (-1 < \xi < 1) \quad (1.9)$$

В выражении (1.8) величина s есть дуговая абсцисса линии разрыва FD , измеряемая от точки F . В выражении (1.9) эта же величина представляет собой дуговую абсциссу линии разрыва CD , измеряемую от точки C . Выделяя из выражения (1.3) мнимую часть, можно получить

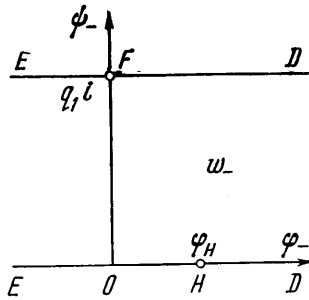
$$\theta[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \xi(\varepsilon_2, \lambda_\mp)] = \theta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_\mp) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(v^*/v_0) d\xi^*}{\xi^* - \xi} \quad (1.10)$$

Здесь ξ и ξ^* — полученные из формулы (1.1) отображения на плоскость τ некоторых точек M и M^* , лежащих на линии разрыва CDF .

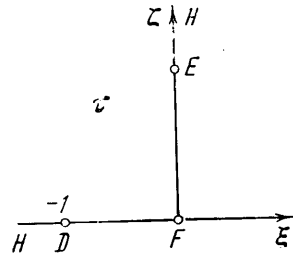
Величины v^* и ξ^* связаны соотношениями (1.4) — (1.9). При $-1 < \xi \leq 0$ выражение (1.10) представляет собой натуральное уравнение линии разрыва CD , а при $\xi < -1$ — линии разрыва FD . В силу четности функций $v[\lambda_\mp(\xi)]$ правая часть выражения (1.10) представляет собой нечетную функцию аргумента ξ .

2. Рассмотрим течение в областях $EFDHE$ и $BCDGB$. Область изменения комплексного потенциала $w_- = \varphi_- + i\psi_-$, соответствующая области течения $EFDHE$, представляет собой полосу шириной $q_1 = v_E \delta_1$ (фиг. 4), где q_1 — расход вытекающей из канала жидкости, а v_E — скорость течения в бесконечно удаленной точке канала.

Пусть $w_-(F) = q_1 i$, $w_-(H) = \varphi_H$, φ_H — действительное число.



Фиг. 4



Фиг. 5

Область изменения функции w_- может быть конформно отображена на второй квадрант плоскости τ так, чтобы точки D , F и H перешли соответственно в -1 , 0 и бесконечно удаленную точку (фиг. 5). Так же как и в предыдущем пункте

$$\tau = - \left[\frac{\exp(\pi w_- / q_1) + 1}{\exp(\pi w_- / q_1) - \Psi_-} \right]^{1/2} \quad \Psi_- = \exp \frac{\pi \varphi_H}{q_1} \quad (2.1)$$

где Ψ_- — функция, зависящая от ε_1 и ε_2 .

Область течения $BCDGB$, так же как и в работе [2], конформно отображается на первый квадрант вспомогательной плоскости τ так, чтобы отрез-

ку $[0, 1]$ действительной оси соответствовала линия разрыва течения CD , а верхней части мнимой оси — стенки каналов BC и BG .

Для ветвей функции ω , непрерывных в областях течения $EFDHE$ и $BCDGB$, имеют место соотношения

$$\omega_- = \ln \frac{dw}{v_1 dz} = \ln \frac{v_-}{v_1} - i\vartheta_-, \quad \omega_+ = \ln \frac{v_+}{v_2} - i\vartheta_+ \quad (2.2)$$

$$\omega_- + i\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \lambda_-) d\xi_-}{\xi_- - \tau}, \quad \omega_+ - i\beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \lambda_+) d\xi_+}{\xi_+ - \tau} \quad (2.3)$$

Здесь величины λ_{\mp} и ξ_{\mp} связаны некоторыми соотношениями

$$f_{\mp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_{\mp}, \xi_{\mp}) = 0 \quad (-1 \leq \xi_{\mp} \leq 1) \quad (2.4)$$

$$f_{\mp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1, 0) = 0, \quad f_{\mp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0, \pm 1) = 0$$

которые определяют непрерывные функции $\xi_{\mp} = \xi_{\mp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_{\mp})$ и $\lambda_{\mp} = \lambda_{\mp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \xi_{\mp})$, причем последние из них — четные функции аргумента ξ_{\mp} . Аналогично работе [2]

$$e = \frac{v_-}{v_1} = \exp \left(\frac{\Psi_-^{1/2}}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln(1 - \lambda_-) d\xi_-}{\Psi_- \xi_-^2 + 1} \right) \quad (2.5)$$

$$b = \frac{v_+}{v_2} = \exp \left(\frac{\Psi_+^{1/2}}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln(1 - \lambda_+) d\xi_+}{\Psi_+ \xi_+^2 + 1} \right)$$

$$\xi_{\mp}^2 = \frac{\Phi_{\mp} - 1}{\Phi_{\mp} + \Psi_{\mp}}, \quad \begin{aligned} \Phi_- &= \exp \left(\frac{\pi}{e\delta_1} \int_0^1 \sqrt{1 - \lambda_-} ds \right) \\ \Phi_+ &= \exp \left(\frac{\pi}{b\delta_2} \int_0^1 \sqrt{1 - \lambda_+} ds \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Выделяя из выражений (2.3) мнимые части, можно получить

$$\vartheta_-[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \xi_-(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_-)] = \theta_-(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_-) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \lambda_-^*) d\xi_-}{\xi_-^* - \xi_+} + \alpha \quad (2.7)$$

$$\vartheta_+[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \xi_+(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_+)] = \theta_+(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_+) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \lambda_+^*) d\xi_+}{\xi_+^* - \xi_+} - \beta \quad (2.8)$$

где ξ_{\mp} и ξ_{\mp}^* — отображения на плоскость τ упомянутых выше точек M и M^* , лежащих на линиях разрыва CD и FD .

Величины λ_{\mp}^* и ξ_{\mp}^* связаны соотношениями (2.4). При $-1 < \xi_- \leq 0$ и при $0 \leq \xi_+ < 1$ выражения (2.7) и (2.8) представляют собой натуральные уравнения линий разрыва течения FD и CD соответственно. В силу четности функций $\lambda_{\mp}(\xi_{\mp})$ интегралы в правых частях выражений (2.7) и (2.8) представляют собой нечетные функции аргументов ξ_{\mp} .

3. Учитывая геометрический смысл выражений (1.10), (2.7) и (2.8), а также нечетность входящих в них интегралов, можно получить следующие два уравнения:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(v^*/v_0) d\xi^*}{\xi^* - \xi} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \lambda_-^*) d\xi_-^*}{\xi_-^* - \xi_-} - \alpha \operatorname{sign} \xi_- & (|\xi| > 1) \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \lambda_+^*) d\xi_+^*}{\xi_+^* - \xi_+} - \beta \operatorname{sign} \xi_+ & (|\xi| < 1) \end{cases} \quad (3.1)$$

Аналогично работе [2] можно получить уравнения

$$\frac{2b(\Psi + 1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v_0}{v} \frac{\zeta d\zeta}{(\Psi \zeta^2 - 1)(\zeta^2 + 1)} = \sigma_0 \quad \left(\sigma_0 = \frac{l_0}{\delta_0} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{2b(\Psi_+ + 1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v_2}{v_+} \frac{\zeta d\zeta}{(\Psi_+ \zeta^2 - 1)(\zeta^2 + 1)} = \sigma_2 \quad \left(\sigma_2 = \frac{l_2}{\delta_2} \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{2e(\Psi_- + 1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v_1}{v_-} \frac{\zeta d\zeta}{(\Psi_- \zeta^2 - 1)(\zeta^2 + 1)} = \sigma_1 \quad \left(\sigma_1 = \frac{l_1}{\delta_1} \right) \quad (3.4)$$

фиксирующие положение точек схода струй F , G и H на физической плоскости z . Дифференцируя соотношения (1.9), можно установить зависимость между дифференциалом дуги линии разрыва CD и дифференциалом $d\lambda_+$ безразмерной величины давления. Аналогичная зависимость может быть определена и из соотношений (2.5). Сравнение полученных выражений дает дифференциальное уравнение

$$\frac{a(\Psi + 1)d(\xi^2)}{(\Psi \xi^2 + 1)(1 - \xi^2)\sqrt{1 - \varepsilon_2 \lambda_+}} = \frac{\sigma_{20} b(\Psi_+ + 1)d(\xi_+^2)}{(\Psi \xi_+^2 + 1)(1 - \xi_+^2)\sqrt{1 - \lambda_+}} \quad (3.5)$$

$$(\sigma_{20} = \delta_2 / \delta_0)$$

В силу конформных отображений пунктов 1 и 2 имеют место следующие граничные условия:

$$\xi = 0 \quad \text{при} \quad \xi_+ = 0, \quad \xi^2 = 1 \quad \text{при} \quad \xi_+^2 = 1 \quad (3.6)$$

Из выражений (1.8) и (2.5) аналогично предыдущему можно определить дифференциал дуги FD и получить следующие уравнения и граничные условия:

$$\frac{a\Psi^{-1}(\Psi + 1)d(\xi^2)}{(\Psi \xi^2 + 1)(1 - \xi^2)\sqrt{1 - \varepsilon_1 \lambda_-}} = \frac{\sigma_{10} e(\Psi_- + 1)d(\xi_-^2)}{(\Psi_- \xi_-^2 + 1)(1 - \xi_-^2)\sqrt{1 - \lambda_-}} \quad \left(\sigma_{10} = \frac{\delta_1}{\delta_0} \right)$$

$$\xi^2 = \infty \quad \text{при} \quad \xi_- = 0, \quad \xi^2 = 1 \quad \text{при} \quad \xi_-^2 = 1 \quad (3.8)$$

Выражения (3.7) и (3.8) удобно представить в виде

$$\frac{a\Psi^{-1}(\Psi^{-1} + 1)d(\xi^{-2})}{(\Psi^{-1} \xi^{-2} + 1)(1 - \xi^{-2})\sqrt{1 - \varepsilon_1 \lambda_-}} = \frac{\sigma_{10} e(\Psi_- + 1)d(\xi_-^2)}{(\Psi_- \xi_-^2 + 1)(1 - \xi_-^2)\sqrt{1 - \lambda_-}} \quad (3.9)$$

$$\xi^{-1} = 0 \quad \text{при} \quad \xi_- = 0, \quad \xi^{-2} = 1 \quad \text{при} \quad \xi_-^2 = 1 \quad (3.10)$$

Соотношения (3.9) и (3.10) аналогичны соотношениям (3.5) и (3.6). Таким образом, семь уравнений (3.1) — (3.5) и (3.9) связывают восемь величин ξ , ξ_{\mp} , Ψ , Ψ_{\mp} и λ_{\mp} , одна из которых является независимой переменной.

4. Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, а величины a , b , e , Ψ , Ψ_{\mp} принимают значения 1 , b_0 , e_0 , Ψ_0 , Ψ_{\mp}° . Из уравнений (3.1) — (3.5) и (3.9) можно получить

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \lambda_{-}^*) d\xi_{-}^*}{\xi_{-}^* - \xi_{-}} = \alpha \operatorname{sign} \xi_{-}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \lambda_{+}^*) d\xi_{+}^*}{\xi_{+}^* - \xi_{+}} = \beta \operatorname{sign} \xi_{+} \quad (4.1)$$

$$\frac{2(\Psi_0 + 1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\zeta d\zeta}{(\Psi_0 \zeta^2 - 1)(\zeta^2 + 1)} = \sigma_0 \quad (4.2)$$

$$\frac{2b_0(\Psi_{+}^{\circ} + 1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v_2}{v_{+}} \frac{\zeta d\zeta}{(\Psi_{+}^{\circ} \zeta^2 - 1)(\zeta^2 + 1)} = \sigma_2 \quad (4.3)$$

$$\frac{2e_0(\Psi_{-}^{\circ} + 1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v_1}{v_{-}} \frac{\zeta d\zeta}{(\Psi_{-}^{\circ} \zeta^2 - 1)(\zeta^2 + 1)} = \sigma_1 \quad (4.4)$$

$$\frac{(\Psi_0 + 1)d(\xi^2)}{(\Psi_0 + 1)d(\xi^2)} = \frac{\sigma_{20} b_0 (\Psi_{+}^{\circ} + 1)d(\xi_{+}^2)}{\sigma_{20} b_0 (\Psi_{+}^{\circ} + 1)d(\xi_{+}^2)} \quad (4.5)$$

$$\frac{\Psi_0^{-1}(\Psi_0^{-1} + 1)d(\xi^{-2})}{(\Psi_0 \xi^2 + 1)(1 - \xi^2)} = \frac{\sigma_{10} e_0 (\Psi_{-}^{\circ} + 1)d(\xi_{-}^2)}{(\Psi_{+}^{\circ} \xi_{+}^2 + 1)(1 - \xi_{+}^2)\sqrt{1 - \lambda_{+}}} \quad (4.6)$$

Дифференциальным уравнениям (4.5) и (4.6) соответствуют граничные условия (3.6) и (3.10). Уравнения (4.1) и (4.2) тождественны соответствующим уравнениям работы [2]. Поэтому

$$(1 - \lambda_{-})^{\pi/2\alpha} = \frac{1 - \sqrt{1 - \xi_{-}^2}}{1 + \sqrt{1 - \xi_{-}^2}} \quad (1 - \lambda_{+})^{\pi/2\beta} = \frac{1 - \sqrt{1 - \xi_{+}^2}}{1 + \sqrt{1 - \xi_{+}^2}} \quad (4.7)$$

$$\Psi_0 = \exp(\pi\sigma_0) \quad (4.8)$$

Предполагая заданным коэффициент b_0 и учитывая тождественность уравнений (4.3) и (4.5) соответственно уравнениям (4.3) и (4.4) работы [2], можно определить величины σ_2 и Ψ_{+}° из выражений

$$\sigma_2 = - \frac{(1 + b_0^{\pi/\beta})^2}{\pi b_0^{\pi/\beta - 1}} \int_0^1 \frac{t^{-\beta/\pi} (1 - t) dt}{(t + 1)(t - b_0^{\pi/\beta})(t - b^{-\pi/\beta})} \quad (4.9)$$

$$\Psi_{+}^{\circ} = (1 - b_0^{\pi/\beta})^2 / 4b_0^{\pi/\beta} \quad (4.10)$$

Связь между величинами ξ и ξ_{+} может быть получена из выражения $(u_{+} = (1 - \lambda_{+})^{\pi/4\beta})$

$$\ln \frac{\Psi_0 \xi^2 + 1}{1 - \xi^2} = \frac{2\sigma_{20} (1 + b_0^{\pi/\beta})^2}{b_0^{\pi/\beta - 1}} \int_0^{u_{+}} \frac{t^{1-2\beta/\pi} (1 + t^2) dt}{(1 - t^2)(t^2 + b_0^{\pi/\beta})(t^2 + b_0^{-\pi/\beta})} \quad (4.11)$$

с учетом второго равенства (4.7). Аналогично предыдущему значения σ и Ψ_0 могут быть получены из выражений (4.9) и (4.10), если в правых частях этих выражений величины b_0 и β заменить соответственно на величины e_0 и α . Связь между значениями ξ и ξ_- может быть получена из выражения ($u_- = (1 - \lambda_-)^{\pi/\alpha}$)

$$\frac{1}{\Psi_0} \ln \frac{\Psi_0 \xi_-^2 + 1}{1 - \xi_-^2} = \frac{2\sigma_{10} (1 + e_0^{\pi/\alpha})^2}{e_0^{\pi/\alpha - 1}} \int_0^{u_-} \frac{t^{-2\beta/\pi} (1 + t^2) dt}{(1 - t^2) (t^2 + e_0^{\pi/\alpha}) (t^2 + e_0^{-\pi/\alpha})} \quad (4.12)$$

Таким образом, при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ из выражений (4.7) — (4.12) все величины, входящие в уравнения (4.1) — (4.6), могут быть определены единственным образом. Исходя из физических представлений естественно предположить, что существует единственное решение задачи при достаточно малых значениях параметров ε_1 и ε_2 . Предполагая также аналитичность решения по ε_1 и ε_2 , можно определить неизвестные в виде двойных рядов по степеням ε_1 и ε_2 .

5. Предварительно необходимо преобразовать левую часть выражения (3.1)

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \varepsilon_2 \lambda_+^*) d\xi^*}{\xi^* - \xi} + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > 1} \frac{\ln(1 - \varepsilon_1 \lambda_-^*) d\xi^*}{\xi^* - \xi} \quad (5.1)$$

Подставляя во второй интеграл правой части (5.1) тождество

$$\frac{d\xi^*}{\xi^* - \xi} = \left[\frac{1}{(\xi^*)^{-1} - \xi^{-1}} - \frac{1}{(\xi^*)^{-1}} \right] d[(\xi^*)^{-1}]$$

и учитывая, что в силу четности функции $\lambda_-(\xi)$

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \varepsilon_1 \lambda_-^*) d[(\xi^*)^{-1}]}{(\xi^*)^{-1}} = 0$$

правую часть равенства (5.1) можно представить в виде

$$\theta = -\frac{1}{2\pi} \int \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon_2 \lambda_+^*)^k}{k} \frac{d\xi^*}{\xi^* - \xi} + \frac{1}{2\pi} \int \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon_1 \lambda_-^*)^k}{k} \frac{d[(\xi^*)^{-1}]}{(\xi^*)^{-1} - \xi^{-1}} \quad (5.2)$$

Аналогично работе [2] в предположении аналитичности по ε_1 и ε_2 функция θ может быть представлена в виде

$$\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{mn} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n, \quad (5.3)$$

$$\theta_{mn} = \frac{D_1^m D_2^n}{m! n!} \theta \Big|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0}$$

$$D_k = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} - \frac{\partial \lambda_-}{\partial \varepsilon_k} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda_-} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial \lambda_+}{\partial \varepsilon_k} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda_+} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (k = 1, 2) \quad (5.4)$$

Как видно из выражения (5.2), коэффициент θ_{mn} содержит частные производные функций λ_{\pm} по ε_1 и ε_2 порядка не выше $m + n - 1$. Если указанные производные уже вычислены, то коэффициент θ_{mn} может быть определен при помощи соотношений (4.7), (4.11) и (4.12), связывающих величины λ_{\pm} , ξ , ξ_{\pm} при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Функции θ_{\pm} также разлагаются в двойные степенные ряды при помощи формул (5.3),

(5.4). Причем коэффициент при степени $\varepsilon_1^m \varepsilon_2^n$ содержит частные производные функций λ_{\mp} до порядка $m + n$ включительно. В силу равенств (4.1) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{\mp}} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \lambda_{\mp}^*) d\xi_{\mp}^*}{\xi_{\mp}^* - \xi_{\mp}} = 0 \quad (5.5)$$

и, следовательно, старшие производные функций λ_{\mp} содержатся только под знаком сингулярного интеграла. При подстановке полученных выше разложений в уравнение (3.1) для каждой пары значений m и n получаются два линейных уравнения для вычисления функций $\partial^{m+n} \lambda_{\mp} / \partial \varepsilon_1^m \partial \varepsilon_2^n$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ через производные низших порядков. В силу сделанного выше замечания указанные уравнения являются сингулярными интегральными уравнениями первого рода [3]. В частности, для $m = 0$, $n = 1$ и $m = 1$, $n = 0$

$$\begin{aligned} \theta_{01} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda_+^* d\xi^*}{\xi^* - \xi}, & \theta_{10} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda_-^* d[(\xi^*)^{-1}]}{(\xi^*)^{-1} + \xi^{-1}} \\ \theta_{01} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial \lambda_+^*}{\partial \varepsilon_2} \frac{1}{1 - \lambda_+^*} \frac{d\xi_+^*}{\xi_+^* - \xi_+} & (-1 < \xi < 1) \\ \theta_{01} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial \lambda_-^*}{\partial \varepsilon_2} \frac{1}{1 - \lambda_-^*} \frac{d\xi_-^*}{\xi_-^* - \xi_-} & (|\xi| > 1) \\ \theta_{10} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial \lambda_+^*}{\partial \varepsilon_1} \frac{1}{1 - \lambda_+^*} \frac{d\xi_+^*}{\xi_+^* - \xi_+} & (-1 < \xi < 1) \\ \theta_{10} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial \lambda_-^*}{\partial \varepsilon_1} \frac{1}{1 - \lambda_-^*} \frac{d\xi_-^*}{\xi_-^* - \xi_-} & (|\xi| > 1) \end{aligned}$$

Правые части первых двух равенств представляют собой известные функции. Следовательно, остальные четыре равенства можно рассматривать как уравнения для определения функций $\partial \lambda_{\mp} / \partial \varepsilon_k$ ($k = 1, 2$). Согласно соотношениям (2.4) эти функции обращаются в нуль на концах отрезка интегрирования. Воспользовавшись формулой обращения сингулярного интеграла [3] для случая, когда искомая функция ограничена на обоих концах отрезка интегрирования, можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_{\mp}}{\partial \varepsilon_2} &= \frac{2(1 - \lambda_{\mp}) \sqrt{1 - \xi_{\mp}^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\theta_{01}^*}{\sqrt{1 - \xi_{\mp}^{*2}}} \frac{d\xi_{\mp}^*}{\xi_{\mp}^* - \xi_{\mp}}, & \int_{-1}^1 \frac{\theta_{01} d\xi_{\mp}}{\sqrt{1 - \xi_{\mp}^2}} &= 0 \\ \frac{\partial \lambda_{\mp}}{\partial \varepsilon_1} &= \frac{2(1 - \lambda_{\mp}) \sqrt{1 - \xi_{\mp}^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\theta_{10}^*}{\sqrt{1 - \xi_{\mp}^{*2}}} \frac{d\xi_{\mp}^*}{\xi_{\mp}^* - \xi_{\mp}}, & \int_{-1}^1 \frac{\theta_{10} d\xi_{\mp}}{\sqrt{1 - \xi_{\mp}^2}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

В силу нечетности функций $\theta(\xi_{\pm})$ функции θ_{mn} также обладают этим свойством.

Поэтому дополнительные условия обращения сингулярных интегралов в формулах (5.6) выполняются автоматически. Частные производные по ε_1 и ε_2 функций λ_{\mp} второго и более высокого порядка определяются аналогично.

6. При помощи соотношений пунктов 1—4 и найденных выше частных производных функций λ_{\mp} по ε_1 и ε_2 все неизвестные задачи, а также любые другие величины могут быть получены в виде двойных рядов по степеням ε_1 и ε_2 . В частности, таким образом может быть определен асимптотический угол ϑ_D

$$\vartheta_D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(v/v_0) d\xi}{\xi + 1} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k_{mn} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n$$

$$k_{mn} = \frac{\partial^{m+n} \vartheta_D}{m! n! \partial \varepsilon_1^m \partial \varepsilon_2^n} \Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \frac{1}{2\pi m! n!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{m+n} \ln(v/v_0)}{\partial \varepsilon_1^m \partial \varepsilon_2^n} \frac{d\xi}{\xi + 1} \Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}$$

Значения коэффициентов k_{01} и k_{02} при некоторых комбинациях геометрических параметров вычислены в работах [1, 2]. Коэффициенты k_{10} и k_{20} легко выражаются через предыдущие. При симметричной геометрии стенок каналов коэффициент k_{11} равен нулю.

Поступило 16 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский П. М. Задача о столкновении двух струй, вытекающих из каналов с параллельными стенками при разных скоростях на свободной поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
2. Белоцерковский П. М. Нелинейная задача о соударении плоских струй идеальной несжимаемой жидкости с разрывом течения на границе между струями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5.
3. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи, Изд. 2. М., Физматгиз, 1963.