

УДК 532.526

ОБТЕКАНИЕ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Б. И. МУКОСЕЕВ

(Москва)

Обтекание колеблющейся поверхности в потоке идеальной жидкости рассматривалось в работе М. В. Келдыша [1]; в ней установлено, что с ростом частоты колебаний крыла создается сила тяги. В данной работе рассматривается задача обтекания потоком вязкой несжимаемой жидкости полубесконечного гибкого тела. Она является продолжением работ [2, 3], но в отличие от них уравнения идеальной жидкости и уравнения пограничного слоя решаются методом, изложенным в работах В. Я. Шкадова [4, 5]. Приводятся численные результаты расчета коэффициента сопротивления и сравниваются с результатами, полученными в [2, 3]. При этом удается полнее учесть влияние нелинейных членов уравнений Лапласа и пограничного слоя.

1. Постановка задачи. Пусть в плоскопараллельный поток, движущийся со скоростью U_0 , помещено тонкое полубесконечное тело. Ось X направлена вдоль тела и совпадает с направлением течения жидкости, а ось Y перпендикулярна ей. Верхняя и нижняя поверхности тела совершают симметричные относительно оси X вынужденные колебания, которые распространяются вдоль потока по закону

$$y_0 = f(x) \sin(\alpha x - \beta t) \quad (1.1)$$

Начало координат находится в неподвижной точке тела. Для упрощения решения задачи примем ряд допущений:

- 1) тело настолько тонкое, что градиент давления зависит только от колебания поверхности;
- 2) колебания поверхности тела малы, т. е.

$$|y_0| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial y_0}{\partial x} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial y_0}{\partial t} \right| \ll 1 \quad (1.2)$$

- 3) деформация по касательной к поверхности тела вдоль оси X равна нулю;

4) считаем, что данный процесс периодический;

5) на функцию $f(x)$ наложим следующие условия:

$$f(0) = \frac{df}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad f(\infty) = f_0 \quad (1.3)$$

Для решения задачи используем уравнения пограничного слоя Прандтля [6] с соответствующими начальными и граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u(x, y_0, t) = -\frac{\partial y_0}{\partial t} \frac{\partial y_0}{\partial x}, \quad u(x, \infty, t) = U(x, t), \quad u(x_0, y, t) = \varphi(y) \quad (1.4)$$

$$u(x, y, t) = u(x, y, t + T), \quad v(x, y_0, t) = -\left(\frac{\partial y_0}{\partial t} + u(x, y_0, t)\right) \frac{\partial y_0}{\partial x}$$

Здесь x, y — координаты; t — время; u, v — горизонтальная и вертикальная составляющие вектора-скорости соответственно; U — скорость на внешней границе пограничного слоя; ν — переменный коэффициент вихревой вязкости; T — период; $\lambda = 2\pi\alpha^{-1}$ — длина волны; β — частота колебания, $c = \beta\alpha^{-1}$ — скорость распространения волны; f_0 — постоянная амплитуда колебания; ν_0 — постоянный коэффициент кинематической вязкости; $\varphi(y)$ — скорость в сечении $x = x_0$.

Введем новые переменные и функции для упрощения задания граничных условий на поверхности тела

$$x = x', \quad y' = [U_0(\nu_0 x)^{-1}]^{1/2} [y - y_0(x, t)], \quad \theta = \alpha x - \beta t, \quad u = U_0(U - u') \quad (1.5)$$

$$v' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [\nu_0 U_0 x^{-1}]^{1/2} \left[v - (u - c) \frac{\partial y_0}{\partial \theta} - u \frac{\partial y_0}{\partial x} \right] - y' u \right\}$$

Подставляя выражения (1.5) в (1.4), получаем (штрихи опускаем)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right) + x(\dot{U} - u)L_x(u) - xuL_x(U) + \beta x \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ xL_x(u - U) + 0.5(u - U) - \partial v / \partial y &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$u(x, 0, \theta) = U + \beta \frac{\partial y_0}{\partial \theta} \left(\frac{\partial y_0}{\partial x} + \alpha \frac{\partial y_0}{\partial \theta} \right)$$

$$u(x, \infty, \theta) = v(x, 0, \theta) = 0, \quad u(x_0, y, \theta) = \varphi(y), \quad u(x, y, \theta) = u(x, y, \theta + T)$$

где ε — безразмерный коэффициент вихревой вязкости и

$$L_x = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{\partial y_0}{\partial x} + \alpha \frac{\partial y_0}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial y}$$

Неизвестную скорость U определим из аналогичной постановки задачи для идеальной жидкости, при этом течение считаем безвихревым. Тогда движение жидкости можно описать уравнением Лапласа [7]. Как и выше, введем новые переменные в виде

$$x = x', \quad y' = y - y_0(x, \theta), \quad \theta = \alpha x - \beta t \quad (1.7)$$

после подстановки этих выражений в уравнение Лапласа и преобразования получим (штрихи опускаем)

$$\begin{aligned} L_{xy}(\psi) = n_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} + 2n_1 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial y} \right) - n_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow -\infty} \rightarrow U_0 \\ n_2(x, 0, \theta) = \beta f(x) \cos \theta, \quad n_3(x, \infty, \theta) = 0, \quad n_3(\infty, y, \theta) = F(y, \theta) \end{aligned} \quad (1.8)$$

где ψ — функция тока

$$L_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}, \quad n_0^* = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \alpha^2 f$$

$$n_0^c = 2\alpha \frac{df}{dx}, \quad n_0 = n_0^s \sin \theta + n_0^c \cos \theta, \quad n_1 = \frac{df}{dx} \sin \theta + \alpha f \cos \theta$$

$$n_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad n_3 = n_2 - n_1 \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Функцию $F(y, \theta)$ определим из системы уравнений (1.7) при условии $f(\infty) = f_0$, т. е. решим задачу с постоянной амплитудой колебания поверхности и затем это решение стыкуем при подходящих x .

2. Решение задачи. Решение поставленной задачи будем искать в виде следующего ряда (выписывается ряд в общем виде):

$$\psi \simeq \psi_0(x, y) + \sum_{i=1}^N \kappa^i [\psi_i^s(x, y) \sin i\theta + \psi_i^c(x, y) \cos i\theta] \quad (2.1)$$

где κ — малый параметр, допустим отношение амплитуды колебания к длине волны, индекс s относится к коэффициенту при $\sin i\theta$, а c — при $\cos i\theta$.

Для получения системы дифференциальных уравнений применим метод, изложенный в работах [4, 5].

1. *Идеальная жидкость. Колебание с постоянной амплитудой.* Рассматривая случай постоянной амплитуды ($f = \text{const}$), можно считать, что ψ_i являются функциями только y . Тогда получается довольно простая рекуррентная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Выпишем эту систему уравнений включительно до κ^2

$$\frac{d^2 \psi_0}{dy^2} = [f_0(1+b)]^{-1} \frac{d\psi_1^s}{dy}, \quad (1+a^2) \frac{d^2 \psi_1^s}{dy^2} - \alpha^2 \psi_1^s = -\alpha^2 \frac{d\psi_0}{dy} - 6\alpha^2 f_0^{-1} \frac{d\psi_2^s}{dy}$$

$$\frac{d^2 \psi_2^s}{dy^2} - 4\alpha^2 \psi_2^s = 0.5(\alpha f_0)^2 \left(3f_0^{-1} \frac{d^2 \psi_1^s}{dy^2} - \frac{d^2 \psi_0}{dy^2} \right), \quad \frac{d\psi_0}{dy} \Big|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow U_0$$

$$\psi_0(0) = \psi_2^s(0) = \psi_2^s(\infty) = 0, \quad \psi_1^s(0) = cf_0, \quad \psi_1^s(\infty) = f_0 U_0 \quad (2.2)$$

Для этой системы уравнений нетрудно выписать решение

$$\psi = C_3 A^{-1} + U_0 y + C_1(y) + C_2(y) + \{U_0 f_0 - f_0(1+b)[q_1 C_1(y) + (2.3)$$

$$+ q_2 C_2(y)]\} \sin \theta + C_0^{-1} \{(q_1^2 - A)C_1(y) + (q_2^2 - A)C_2(y)\} \cos 2\theta + \dots$$

где приняты следующие обозначения:

$$a = 0.5\kappa\alpha f_0, \quad b = 0.5\alpha^{-2}, \quad m = (c - U_0) [(1+b)(A + q_1 q_2)]^{-1}$$

$$A = \alpha^2 b D^{-1}, \quad D = (1+a^2)(1+b), \quad q_1 = [k^2 + (k^4 - n^4)^{1/2}]^{1/2}$$

$$q_2 = [k^2 - (k^4 - n^4)^{1/2}]^{1/2}, \quad n^4 = 4\alpha^2 A, \quad C_0 = 6\alpha^2 (f_0^2 D)^{-1}$$

$$2k^2 = 4\alpha^2 + A - 0.5C_0 (\alpha f_0)^2 (2 + 3b)$$

$$C_1(y) = m(A - q_2^2) \exp(-q_1 y), \quad C_2(y) = -m(A - q_1^2) \exp(-q_2 y)$$

Колебание с переменной амплитудой. В этом случае система дифференциальных уравнений получается намного сложнее, поэтому выпишем одно уравнение в символическом виде

$$\Lambda(\psi_i^s) = \psi_i^s(\psi_i^c, \psi_{i-1}^s, \dots) + 1/2 \kappa^2 \varphi_{i0}^s(\psi_i^s, \psi_i^c, \dots) \quad (2.4)$$

$$\Lambda = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (i\alpha)^2$$

где Δ — оператор Гельмгольца, φ_i^s — правая часть, зависящая от остальных функций, а φ_{i0}^s — правая часть, в которую может входить и ψ_i^s . Для ψ_i^s получается аналогичное уравнение.

Система уравнений (2.4) решалась численным методом [8]. Для ускорения получения решения была выбрана девятиточечная разностная схема с квадратной сеткой. Разностный оператор имеет вид

$$\psi_{j,k} = [20 + 6(\alpha h)^2]^{-1} [4(\psi_{j,k-1} + \psi_{j-1,k} + \psi_{j+1,k} + \psi_{j,k+1}) + \psi_{j-1,k-1} + \psi_{j-1,k+1} + \psi_{j+1,k-1} + \psi_{j+1,k+1} - 6h^2 f_{j,k}]$$

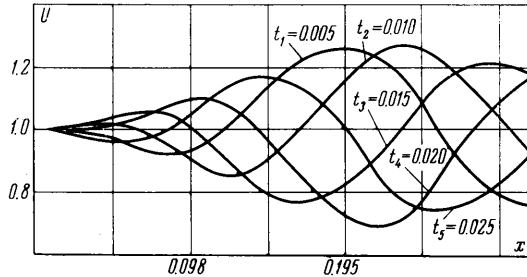
где h — шаг, $f_{j,k}$ — значение правой части в точке (j, k) . Система уравнений (2.4) решалась в области $x_1 \leq x \leq x_2, 0 \leq y \leq y_1$. На границе $x = x_1$ решение стыковалось с решением $\psi = U_0 y$, а при $x = x_2$ — с решением (2.3). Величина y_1 выбиралась в зависимости от волнового числа α . Функция $f(x)$ была взята в следующем виде:

$$f(x) = f_0 [1 - \exp(-\alpha x^3)]$$

После получения решения определялась скорость U по формуле

$$U = \partial \psi / \partial y$$

В качестве иллюстрации на фиг. 1 приведены кривые U в зависимости от времени при $\alpha = 8\pi$ и $c = 10$.



Фиг. 1

2. Вязкая жидкость. Как и в предыдущей задаче решение для u и v было представлено в виде ряда (2.1). Делая аналогичные выкладки, получаем рекуррентную систему дифференциальных уравнений в частных производных от переменных x, y . Ввиду ее громоздкости выпишем одну пару уравнений в символическом виде

$$\begin{aligned} L_y(u_i^s) &= \varphi_i^s, & N(v_i^s) &= 0 \\ L_y(u_i^c) &= \varphi_i^c, & N(v_i^c) &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

где через L_y и N обозначены следующие операторы:

$$\begin{aligned} L_y(u_i^s) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial u_i^s}{\partial y} \right) - v_0 \frac{\partial u_i^s}{\partial y} - x u_i^s \frac{\partial}{\partial x} (U_0 - u_0) + \\ &+ x(u_0 - U_0) \frac{\partial u_i^s}{\partial x} - v_i^s \frac{\partial u}{\partial y} \mp \alpha x(c + u_0 - U_0) u_i^c \\ N(v_i^s) &= x \left(\frac{\partial u_i^s}{\partial x} \mp i \alpha u_i^c - \frac{\partial U_i^s}{\partial x} \right) + 0.5(u_i^s - U_i^s) \end{aligned}$$

Знак минус соответствует члену разложения при $\sin i\theta$ и плюс — члену при $\cos i\theta$; правые части φ_i^s и φ_i^c зависят от остальных функций.

Система уравнений (2.5) решалась также численно. Для получения системы алгебраических уравнений была применена двухслойная неявная разностная схема [9]. Полученная система уравнений решалась методом прогонки.

3. Расчет коэффициентов сопротивления давления и трения. Для вычисления коэффициента сопротивления давления использовался интеграл Коши [6]

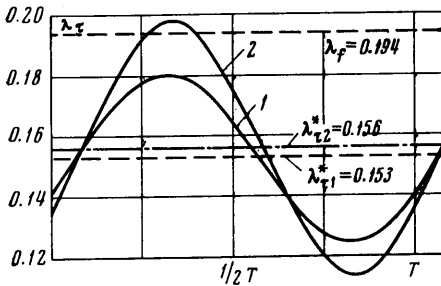
$$\partial\Phi/\partial t + 1/2(U^2 + V^2) + p\rho^{-1} = F(t)$$

массовыми силами пренебрегаем. Здесь Φ — потенциал скорости, V — значение вертикальной скорости на поверхности. Заменяя потенциал скорости Φ через [6]

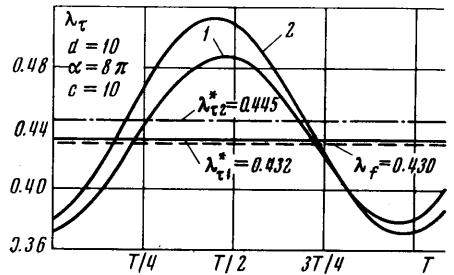
$$\Phi = \int_0^l U dx + \int_0^y V(a, y, t) dy$$

и переходя к переменным (1.7), получаем окончательное выражение для коэффициента сопротивления давления

$$C_p = \int_0^l 2(p - p_0)(\rho U_0^2)^{-1} dx = \int_0^l \left\{ 1 - (U^2 + V^2) - 2\kappa\beta \left[V \frac{\partial y_0}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\int_0^x U dx + \int_0^y V(0, y, \theta) dy \right) \right] \right\} dx \quad (3.1)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

а коэффициент сопротивления трения вычислялся по закону Ньютона [6]

$$C_f = 2R^{-1/2} \int_0^l x^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} dx \quad (3.2)$$

где R — число Рейнольдса.

Для дальнейшего численного сравнения двух методов запишем формулу коэффициента полного сопротивления в более компактном виде

$$C_L = C_p + \lambda_\tau R^{-1/2} \quad (3.3)$$

где через λ_τ обозначен удвоенный интеграл выражения (3.2).

Было рассмотрено два режима обтекания: ламинарный и приближенно турбулентный. Ламинарному режиму обтекания соответствовал коэффициент вязкости $\varepsilon = 1$, а для турбулентного коэффициента вихревой вязкости выбирался согласно [7] в следующем виде:

$$\varepsilon = 1 + du_0^3$$

Расчет коэффициентов сопротивления производился от точки отрыва пограничного слоя. В качестве иллюстрации приведены координаты некоторых точек отрыва x^* .

Ламинарный режим ($\epsilon = 1, c = 10 \text{ м/сек}$): значениям $\lambda = 0.1, 0.2, 0.25 \text{ м}$ соответствуют значения $x^* = 0.047, 0.055, 0.094 \text{ м}$.

Турбулентный режим ($\epsilon = 1 + 10u_0^3$): значениям $\lambda = 0.1, 0.25 \text{ м}$ соответствуют значения $x^* = 0.0625, 0.117 \text{ м}$.

Ламинарный режим ($\epsilon = 1, c = 5 \text{ м/сек}$): значениям $\lambda = 0.167, 0.25 \text{ м}$ соответствуют значения $x^* = 0.117, 0.203 \text{ м}$.

Турбулентный режим ($\epsilon = 1 + 10u_0^3$): значениям $\lambda = 0.167, 0.25 \text{ м}$ соответствуют значения $x^* = 0.234, 0.992 \text{ м}$.

По этим результатам видно, что с увеличением величины d и с уменьшением c точка отрыва отодвигается вниз по течению. Эти расчеты точек отрыва полностью согласуются с расчетами, изложенными в [3].

Для сравнения двух методов на фиг. 2 и фиг. 3 соответственно для $d = 0$ и $d = 10$ приведены графики коэффициентов сопротивления трения, при этом $\alpha = 8\pi, c = 10$.

Из сравнения кривых видно, что осредненные значения $\langle \lambda_\tau \rangle$ отличаются одно от другого примерно на 3%, хотя для λ_τ в отдельных точках различие достигает 9%.

Отсюда можно заключить, что результаты, полученные обоими методами, верны. Полученное решение согласуется с выводами, сделанными в работах [4, 5]. Это видно хотя бы и из сравнения осредненных скоростей $\langle U \rangle$ в идеальной жидкости по методу [2]

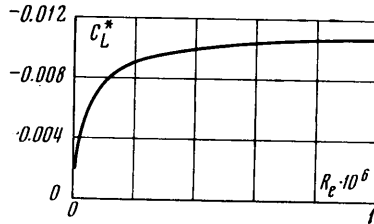
$$\langle U \rangle = 2a^2(c - U_0)$$

и по методу [4]

$$\langle U \rangle = 2a^2(1 + 2a^2)^{-1}(c - U_0)$$

т. е. данным методом полнее учитываются нелинейные эффекты. Перейдем к анализу полученных результатов. Как и следовало ожидать, получить решение при больших амплитудах колебания не удастся, так как довольно быстро наступает отрыв пограничного слоя. Поэтому все расчеты были проведены для амплитуды $f_0 = 0.001$, т. е. для микроволн,

которые имеют место на поверхности морских животных [10]. При ламинарном режиме течения осредненный коэффициент сопротивления трения $\langle \lambda_\tau \rangle$ падает по сравнению с жесткой пластиной λ_f (фиг. 2), но в то же время наступает довольно быстро отрыв. В то время как при турбулентном режиме отрыв наступает не так быстро, здесь возрастает сопротивление трения (фиг. 3), хотя резко падает сопротивление давления и в общем балансе создается сила тяги (фиг. 4) ($\alpha = 8\pi, c = 5$).



Фиг. 4

Автор благодарит В. Я. Шкадова за полезные советы и дискуссии.

Поступило 24 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. К теории крыла конечного размаха, колеблющегося в потоке воздуха. Докл. АН СССР, 1938, т. 21, № 5, стр. 224—227.
2. Мукосеев Б. И. Обтекание колеблющейся поверхности идеальной несжимаемой жидкостью. Научн. тр. Дальневосточн. высш. инж.-морского училища, 1968, вып. 5.
3. Мукосеев Б. И. Обтекание колеблющейся поверхности вязкой несжимаемой жидкостью. Научн. тр. Дальневосточн. высш. инж.-морского училища, 1968, вып. 5.
4. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
5. Шкадов В. Я. Стационарные течения вязкой жидкости между коаксиальными вращающимися цилиндрами после потери устойчивости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
7. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
8. Том А., Эйплт К. Д. Числовые расчеты полей в технике и физике. М.—Л., «Энергия», 1964.
9. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. М., Физматгиз, 1962.
10. Бионика. Гидродинамические вопросы бионики. Сб. статей, вып. 3, Киев, «Наукова думка», 1969.