

УДК 532.524

## К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВОЛН В СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

М. НАБИЛЬ ЕСМАИЛЬ, В. Я. ШКАДОВ

(Москва)

Результаты работ [1, 2], касающиеся нелинейной теории волн на поверхности слоя воды, стекающей по вертикальной стенке, обобщены на произвольную жидкость. Установлены соответствующие критерии подобия.

Рассматривается влияние трения на поверхности слоя и угла наклона силы тяжести на характеристики волн.

1. Предположим, что тонкий слой вязкой жидкости стекает по поверхности, наклоненной к горизонтали под углом  $\alpha$ . Пусть ось  $x$  направлена вдоль поверхности в сторону течения, а ось  $y$  перпендикулярна к поверхности и направлена в сторону жидкости. Можно показать, что если длина волны  $\lambda$  значительно больше средней толщины слоя, то движение жидкости описывается следующей упрощенной системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \sin \alpha \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g \cos \alpha &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0, \quad Q = \int_0^a u \, dy \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $y = a(x, t)$  — уравнение поверхности жидкости. Два граничные условия

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (1.2)$$

выражают условие прилипания жидкости к пластинке.

Предположим, что кроме постоянного давления  $p_0'$  на поверхности пленки существуют постоянные касательные напряжения со стороны соприкасающейся среды, так что

$$p_{xy}' = p_{yx}' = \mu' \left( \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) = \tau' = \text{const} \quad (1.3)$$

С учетом поверхностного натяжения граничные условия на поверхности жидкости имеют следующий вид [3]:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau'}{\mu}, \quad p = p_0' - \sigma \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \delta \tau' \frac{\partial a}{\partial x} \quad \text{при } y = a(x, t) \quad (1.4)$$

Здесь  $\delta = 1$  в предположении, что касательное напряжение  $p_{xy}'$  постоянно, и  $\delta = 0$ , если предположить, что существует только сила трения, касательная к поверхности жидкости.

Введем новые независимые переменные

$$\xi = \frac{n}{a}(x - \omega t), \quad \tau = n \frac{U_0}{a} t$$

где  $\omega$  — фазовая скорость волны,  $n = 2\pi a_0 / \lambda$  — волновое число, характеризующее длину волны  $\lambda$ ,  $U_0$  — характерная скорость,  $a_0$  — характерная толщина пленки.

Применим усреднение всех искомым функций по толщине слоя и положим приближенно

$$u = 3U(x, t) \left[ \frac{y}{a} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{a} \right)^2 \right] + \frac{\tau'}{\mu} y \quad (1.5)$$

Такое распределение скорости совпадает с точным решением при ламинарном течении слоя и всегда удовлетворяет граничным условиям (1.2), (1.4). Скорость  $v$  найдем из уравнения неразрывности. Тогда, если положить  $a = a_0 h$ ,  $Q = q U_0 a_0$ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (q - zh) &= 0 \\ \frac{1}{h} \frac{\partial q}{\partial \tau} - \left( z - \frac{12}{5} \frac{q}{h} - \frac{F}{20} h \right) \frac{1}{h} \frac{\partial q}{\partial \xi} - \left( \frac{6}{5} \frac{q^2}{h^3} - K - \frac{F^2 h}{40} - \right. \\ \left. - \frac{F}{20} \frac{q}{h} \right) \frac{\partial h}{\partial \xi} + \delta \frac{3n^2}{Rn} F \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} - G \frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} + E \frac{q}{h^3} - H - \frac{9F}{2nR} \frac{1}{h} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Волновые течения соответствуют периодическим решениям этой системы. Для данной жидкости  $(\gamma, \nu)$  эти решения определяются параметрами

$$R_0 = g a_0^3 \nu^{-2} \sin \alpha, \quad R = 3U_0 a_0 \nu^{-1}, \quad n, z = \omega / U_0, \quad a, \tau'$$

Исходя из физического смысла и из условий разрешимости задачи, считаем заданными все параметры, кроме двух, которые находятся в ходе решения. Так, задается угол наклона  $\alpha$  и параметр  $\tau'$ , определяющий трение на поверхности волны. Исследуемый слой определяется заданием характерной толщины  $a_0$  или расхода  $R$ . Волновой режим определяется заданием частоты  $z$  или длины волны  $n$ .

Коэффициенты уравнений (1.6) выражаются через параметры задачи следующим образом:

$$\begin{aligned} G &= \frac{9n^2 \gamma R_0^{1/3}}{R^2}, \quad K = \frac{9R_0}{R^2} \operatorname{ctg} \alpha, \quad H = \frac{9R_0}{R^2 n} \\ E &= \frac{9}{Rn}, \quad F = \frac{3\tau' R_0}{\rho g \sin \alpha R a_0}, \quad \gamma = \frac{\sigma (\nu^4 g \sin \alpha)^{-1/3}}{\rho} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Легко показать, что член, содержащий  $\delta$  во втором уравнении (1.6), по отношению к последнему члену того же уравнения имеет порядок  $n^2$ . Учитывая точность аппроксимации уравнений [1], можно пренебрегать этим членом.

Рассмотрим регулярное установившееся волновое течение. Решение находится в виде чистопериодической функции  $\phi(\xi)$

$$\int_0^{2\pi} \phi d\xi = 0 \quad (1.8)$$

выражающей возмущение поверхности жидкости по отношению к характерной толщине  $a_0$ . Тогда

$$h = 1 + \varphi(\xi), \quad a = a_0(1 + \varphi(\xi))$$

Основываясь на первом уравнении (1.6), находим стационарную и чисто периодическую части  $q$

$$q = q_0 + z\varphi(\xi)$$

Если в качестве  $U_0$  взять среднюю скорость в том сечении, где при волновом режиме толщина слоя равна  $a_0$ , то получим для стационарной части  $q_0 = 1$ .

Таблица 1

Оптимальные режимы для произвольной жидкости  
( $T = 0, A = 0$ )

$\Gamma = \gamma n^{1/3}$	$R_1 = Rn$	$R_{01} = R_0n$	$z$	$R_1 / R_{01}$
0.069	0.495	0.495	2.945	1.001
0.259	1.185	1.137	2.760	1.042
0.471	1.860	1.651	2.569	1.127
0.637	2.525	2.229	2.401	1.133
0.842	3.270	2.779	2.268	1.178
1.025	4.025	3.360	2.161	1.198
1.198	4.800	3.923	2.078	1.224
1.392	5.625	4.474	2.010	1.257
1.562	6.450	5.042	1.955	1.279
1.747	7.315	5.662	1.909	1.292
1.948	8.220	6.235	1.871	1.319
2.164	9.165	6.960	1.839	1.317
2.338	10.080	7.574	1.810	1.331
2.585	11.100	8.283	1.786	1.340
2.991	13.090	9.580	1.746	1.366

Система уравнений (1.6) для установившихся течений, решалась методом прямого численного интегрирования на ЭВМ. Задача об установившихся волнах сводится к интегрированию одного обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка. Для интегрирования уравнения на длине волны ( $\xi_0, \xi_0 + 2\pi$ ) использовался метод Рунге — Кутты. Начальная точка счета бралась на гребне волны, где  $\varphi'(\xi_0) = 0$ . Функция  $\varphi(\xi)$  должна удовлетворять условиям периодичности

$$\varphi(\xi_0) = \varphi(\xi_0 + 2\pi), \quad \varphi'(\xi_0) = \varphi'(\xi_0 + 2\pi) = 0, \quad \varphi''(\xi_0) = \varphi''(\xi_0 + 2\pi) \quad (1.9)$$

Неизвестные параметры  $z, R$  и начальные данные  $\varphi(\xi_0), \varphi''(\xi_0)$  подбирались итерациями так, чтобы выполнялись условия периодичности (1.8), (1.9).

Таблица 2

1	R	10 $a_0$ , см		n		z	
		1	2	1	2	1	2
25	25.17	0.143	0.145	0.101	0.109	2.401	2.460
30	31.08	0.150	0.154	0.109	0.121	2.268	2.316
40	40.56	0.163	0.167	0.120	0.139	2.078	2.148

2. В случае течения со свободной поверхностью система (1.6) упрощается, так как отпадают члены, содержащие коэффициенты  $K, F$ .

Чтобы построить решение, независимое от исследуемой жидкости, необходимо найти параметр подобия, который описал бы влияние всех физи-

ческих характеристик жидкости. Введем следующую систему параметров:

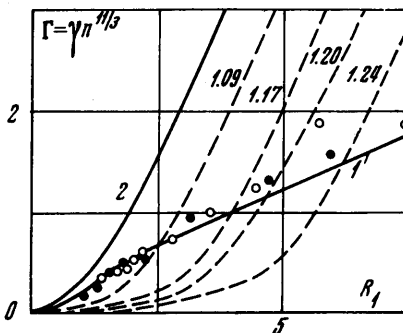
$$\Gamma = \gamma n^{1/3}, \quad R_1 = Rn, \quad R_{01} = R_0n, \quad z$$

Тогда коэффициенты уравнений (1.6) выражаются через эти параметры следующим образом:

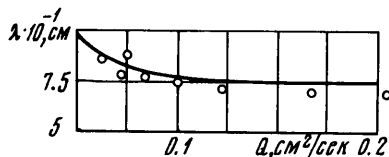
$$G = \frac{9\Gamma}{R_1^2} R_{01}^{1/3}, \quad H = \frac{9R_{01}}{R_1^2}, \quad E = \frac{9}{R_1}$$

Видно, что физические характеристики жидкости и волновое число объединены одним параметром  $\Gamma$ . Можно исследовать все возможные волновые решения системы (1.6), меняя  $\Gamma$  и отношение  $R_{01}/R_1$ . Следовательно, результаты, полученные для одной конкретной жидкости, могут быть применены к разным жидкостям при соответствующих значениях волнового числа. Поэтому  $\Gamma = \gamma n^{1/3}$  представляет собой параметр подобия.

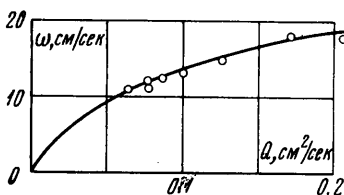
Как показано в [1, 2], при каждом расходе жидкости существует бесконечное множество волновых режимов, различающихся волновыми числами. Один из режимов, названный в [1] оптимальным, имеет наименьшую толщину. В табл. 1 для разных расходов приведены значения параметров течения для оптимальных режимов в случае течения со свободной поверхностью по данным, полученным в работе [4]. Для этих режимов течения при заданной средней толщине расход максимален. Эти результаты в [1] получены аналитическим решением нелинейной системы уравнений (1.6) методом, основанным на разложении в ряд Фурье. Точность этих результатов проверялась сравнением с выборочными просчетами, полученными в данной работе.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

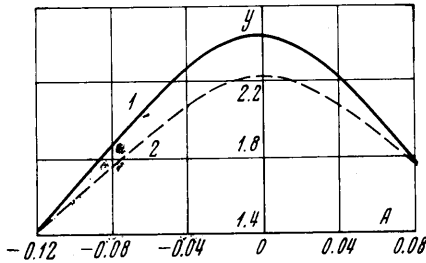
Несколько случаев приведено в табл. 2, где индексом 1 обозначено аналитическое решение, а индексом 2 — численное. Это сравнение показывает достаточную точность аналитического решения.

Пользуясь табл. 1, можно рассчитать оптимальные режимы любой жидкости. Пусть задан расход  $R$  какой-то конкретной жидкости  $\gamma$ . Задавая различные значения  $n$ , вычисляем  $\Gamma = \gamma n^{1/3}$ ,  $R_1 = Rn$ . Подбираем такое значение  $n$ , при котором точка  $R_1$ ,  $\Gamma$  будет расположена на линии 1 (Фиг. 1), построенной по данным табл. 1. После этого из табл. 1 получаем характеристики течения  $R_{01}$ ,  $z$ ,  $R_{01}/R_1$ , используя интерполяцию, если это необходимо.

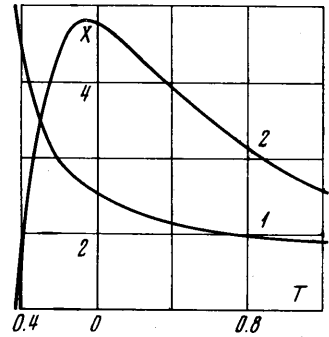
На Фиг. 1 графически изображены кривая нейтральной устойчивости (2) и кривая оптимальных режимов (1). На этой же фигуре нанесены точками результаты опытов [4], относящиеся к двум жидкостям (вода и спирт). Точки, соответствующие спирту, отмеченные черными кружками, вычислены по опытным значениям длины волны  $\lambda$  и среднего расхода  $Q_0$  и по расчетному значению  $a_0$  из-за отсутствия последних значений в [4]. Пунктиром на Фиг. 1 изображаются линии постоянных отношений  $R_1/R_{01}$ . Хорошее совпадение численного решения с экспериментом [4] для спирта (Фиг. 2, 3) подтверждает, что из всех теоретически возможных волновых режимов реализуются оптимальные режимы или режимы, близкие к ним.

3. При произвольном наклоне пластинки добавится еще один параметр подобия  $A = n \operatorname{ctg} \alpha$ ; а если действует сила трения по касательной к поверхности волны, то появится соответствующий параметр подобия  $T = \tau' / a_0 \rho g \sin \alpha$ , где  $F = 3TR_{01} / R_1$ .

В литературе имеется ряд работ, посвященных теории течений тонкого слоя с учетом касательных напряжений и угла наклона силы тяжести (например, [5]). Во всех работах рассматривается линейное приближение. Ниже даются некоторые результаты нелинейной теории этих течений.

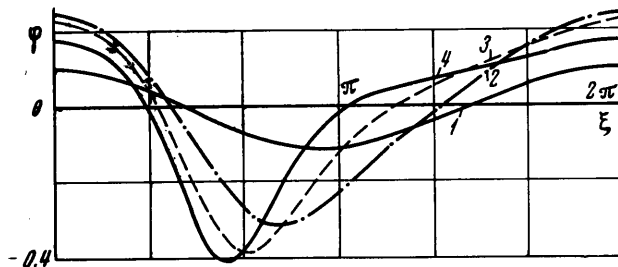


Фиг. 4



Фиг. 5

Как показывают точные численные решения уравнений (1.6), волновые режимы существуют только в ограниченном диапазоне углов наклона стенки (фиг. 4). Кривой 1 соответствует  $Y = R_1(A)$ , кривой 2 —  $Y = R_{01}(A)$ ,  $\Gamma = 0.637$ ,  $T = 0$ ,  $A = n \operatorname{ctg} \alpha$ . Волны затухают в ту и в другую сторону от точки  $\alpha = 1/2\pi$ , и при этом  $R_1 \rightarrow R_{01}$ . Размер области существования волновых режимов при  $\alpha > \pi/2$  превышает соответ-



Фиг. 6

ствующий размер области при  $\alpha < \pi/2$ . Волны существуют при обратном наклоне пластинки ( $\alpha > \pi/2$ ) до значительного угла, после которого они полностью затухают. Видимо, отрыв слоя следует ожидать после затухания волн.

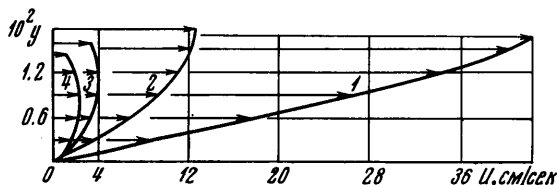
Наличие силы трения на поверхности жидкости, сильно влияет на регулярные волновые течения. Результаты численного решения уравнений (1.6) в этом случае показывают, что, когда течение находится в противотоке, т. е. когда существует отрицательная сила трения, волны начинают затухать и расход жидкости падает при постоянной средней толщине. На фиг. 5 приведена кривая изменения отношения расхода при волновом течении  $R$  к расходу при ламинарном течении  $R_*$  под действием такой же касательной силы (2). Кривая 1 соответствует  $X = z$ , кривая 2 —  $X = 50(R - R_*) / R_*$ . Оказывается, что при критическом значении противодействующей силы трения волны полностью затухают ( $\phi \equiv 0$ ), и течение переходит в ламинарный режим. Это критическое значение силы трения при  $t = 15^\circ$  для слоя воды толщиной  $a_0 = 0.0143$  см равняется примерно  $-6.1$  г/см·сек<sup>2</sup>. Параметр подобия  $T$  при этом принимает значение  $T = -0.44$ .

С возрастанием положительного значения силы трения расход жидкости при постоянной средней толщине увеличивается, а амплитуда волны сначала растет, а потом убывает. При этом профиль волны меняется. На фиг. 6 изображены профили волн при разных значениях  $T$ . Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям  $T$ , равным  $-0.39, 0, 0.77, 1.66$ ;  $R_0 = 22.073$ ,  $n = 0.107$ ,  $\alpha = 90^\circ$ . При больших положительных зна-

чениях силы трения профиль волны преобразуется к виду, соответствующему одиночным волнам. В случае воды при  $t = 15^\circ$  профили типа одиночных волн в слое толщиной  $a_0 = 0.0143$  см начинают появляться при силе трения  $23.22$  г/см·сек<sup>2</sup>. Это соответствует значению параметра подобия, равному  $T = 1.66$ .

На фиг. 7 изображаются профили продольных скоростей течения при разных значениях  $T$  в сечении, проходящем через гребень волны ( $a_{\max}$ ). Профили 1—4 соответствуют значениям  $T$ , равным 1.66, 0,  $-0.39$ ,  $-0.44$ .

Фазовая скорость волны  $z$  уменьшается при возрастании положительного трения и увеличивается при отрицательных значениях трения. На фиг. 5 приведена кривая



Фиг. 7

изменения  $z$  в зависимости от параметра  $T$  (1). Оказывается, что  $z$  может принимать значения, превышающие 3, при наличии относительно маленькой противодействующей силы трения. В случае воды при температуре  $15^\circ$  это происходит при  $\tau' < -2.9$  г/см·сек<sup>2</sup>, что соответствует  $T < -0.206$ . Это может служить объяснением того, что на опытах [6] наблюдались значения  $z$ , превышающие 3, особенно если учесть, что указанный эксперимент проводился в трубке в условиях, не исключающих наличия слабого трения.

Поступило 4 XI 1970

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
2. Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 2.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
4. Капица П. А., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. ЖЭТФ, 1949, т. 19, вып. 2.
5. Yih Chia-shun. Stability of liquid flow down on inclined plane. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3.  
(Рус. перев.: «Механика», Сб. перев. иностр. статей, 1963, № 5.)
6. Binnie A. M. Experiments of the onset of wave formation on a film of water flowing down a vertical plane. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, No. 5, p. 551.