

УДК 532.526.011.55

**О ВЛИЯНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ  
НА ГИПЕРЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ С ВЯЗКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ**

И. Г. КОЗЛОВА, В. В. МИХАЙЛОВ

(Москва)

Указаны возможные формы дополнительного критерия подобия и дана количественная оценка степени влияния возмущений пограничного слоя на интегральные и локальные характеристики течения.

Согласно работам [1, 2] на режиме сильного или умеренного вязкого взаимодействия возмущения пограничного слоя не локализованы в областях, малых по сравнению с характерным размером тела, а распространяются на все поле течения. Это свойство проявляется, в частности, в том, что решение вблизи острой передней кромки треугольного крыла или плоского тела (с углом или без угла скольжения) неединственно. Согласно [1] полный набор возможных решений для сильного взаимодействия на бесконечной треугольной или скользящей пластине представляет собой однопараметрическое семейство.

На бесконечном треугольном крыле условия, наложенные вблизи оси симметрии, позволяют выделить из указанного семейства единственное решение. На плоских телах выбор решения зависит от произвольного условия, наложенного, например, на величину давления на задней кромке. Поэтому при учете возмущений, распространяющихся вверх по потоку, известный закон подобия должен быть дополнен. В случае плоских тел в этот закон подобия необходимо ввести еще один критерий, обеспечивающий подобие указанных возмущений.

1. При гиперзвуковых скоростях набегающего потока для достаточно тонкого тела и достаточно больших чисел Рейнольдса вблизи острой передней кромки тел реализуется режим сильного вязкого взаимодействия. Ниже по течению может существовать при этом режимы умеренного и затем слабого взаимодействия. Если размерами областей сильного и умеренного взаимодействия можно пренебречь, то условия на внешней границе пограничного слоя полностью определяются решением задачи о течении невязкого газа. При этом, естественно, отсутствует передача возмущений вверх по потоку, так как уравнения пограничного слоя при заданных условиях на его границах параболические.

Однако при учете эффектов взаимодействия исследование течения вблизи передней кромки тела [1, 2] указывает на неоднозначность решения. Выбор нужной ветви решения может трактоваться при этом как учет возмущений, распространяющихся вверх по потоку. Для треугольной пластины бесконечной длины указанный выбор может быть сделан из условия стыковки решений, полученных для правой и левой половин крыла. При обтекании плоского тела такой выбор определяется достаточно произвольными условиями на задней кромке. Согласно [1, 2] набор возможных решений представляет собой в этих случаях однопараметрическое семейство. Поэтому влияние задней кромки плоского тела должно полностью характеризоваться каким-либо одним параметром, а закон подобия для обтекания тонких тел должен быть дополнен еще одним критерием.

Такой критерий нетрудно получить, используя теорию размерности. Пусть  $u_\infty$ ,  $\rho_\infty$ ,  $p_\infty$ ,  $M_\infty$  — соответственно скорость, плотность, давление и число  $M$  набегающего потока;  $\tau l$ ,  $l$  — характерные толщина и длина тела;  $H_w$  — энтальпия газа на поверхности тела;  $H_0$ ,  $\mu_0$  — энтальпия и коэффициент вязкости адиабатически заторможенного набегающего потока. Газ

считаем совершенным с постоянными значениями показателя адиабаты  $\kappa$ , числа Прандтля  $P$  и показателя  $\omega$  в степенной зависимости вязкости от температуры. Тогда известные критерии подобия для гиперзвуковых течений вязкого газа около тонких аффинно-подобных двумерных тел (включая скользящие) можно представить в виде

$$K_1 = M_\infty \tau, \quad K_2 = \tau^2 \sqrt{R_0}, \quad K_3 = H_w / H_0, \quad \chi$$

( $\chi$  — угол стреловидности,  $R_0 = p_\infty u_\infty l / \mu_0$ ).

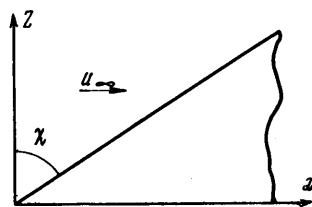
Если в качестве дополнительного параметра, определяющего решение, выбрать  $p_*$  — величину давления при определенном значении безразмерных координат тела (например, на его заднем конце), то в задачу войдет еще один критерий  $K_4^* = p_* R_0^{1/2} / (\rho_\infty u_\infty^2)$  или  $K_4 = p_* / (\rho_\infty u_\infty^2 \tau^2)$ .

Естественно, что вместо  $p_*$  в качестве дополнительного условия, определяющего решение, можно выбрать положение точки отрыва и т. п. (при выполнении условий подобия безразмерное давление  $p R_0^{1/2} / (\rho_\infty u_\infty^2)$  в точках отрыва должно быть постоянным).

Применительно к случаю обтекания пластины, установленной под нулевым углом атаки, критерии подобия после исключения параметра  $\tau$  могут быть записаны в виде<sup>1</sup>

$$K_1^* = M_\infty R_0^{-1/4}, \quad K_3 = H_w / H_0,$$

$$K_4^* = p_* R_0^{1/2} / (\rho_\infty u_\infty^2), \quad \chi$$



Фиг. 1

Если  $p_\infty$  много меньше давления возмущенного потока ( $K_4^* \gg 1$ ), то критерий  $K_4^*$  несуществен, и течение на пластине будет автомодельным, если значение  $K_4^*$  соответствует автомодельному решению. При других значениях  $K_4^*$  автомодельного решения существовать не может. Естественно, что все возможные значения  $K_4^*$  ограничены сверху и снизу, так как  $K_4^* > 0$  и меньше некоторого значения, соответствующего точке отрыва. В носике пластины  $K_4^*$  равно значению этого параметра для автомодельного течения. Поэтому критерий  $K_4^*$  (подсчитанный по текущей длине  $l = x$ ) при движении вниз по потоку должен пробегать все возможные значения до своего максимума или минимума. Отсюда следует, что любое решение будет частью одного из двух решений, соответствующих максимально и минимально возможным значениям  $K_4^*$ , если в точках, по которым выбраны характерные длины, значения  $K_4^*$  совпадают. При произвольном выборе характерных длин распределения безразмерных параметров на определенных частях пластин будут аффинно-подобны.

2. Рассмотрим обтекание скользящей и треугольной пластин, установленных под нулевым углом атаки при числе  $M_\infty = \infty$ .

Пусть ось  $x$  прямоугольной системы координат совпадает с направлением скорости  $u_\infty$  и осью симметрии тела (для треугольной пластины), а ось  $y$  перпендикулярна поверхности пластин (фиг. 1). Обозначим через  $uu_\infty$ ,  $vu_\infty$ ,  $wu_\infty$  проекции полной скорости соответственно на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а через  $x\mu_0 / (\rho_\infty u_\infty)$ ,  $y\mu_0 / (\rho_\infty u_\infty)$ ,  $z\mu_0 / (\rho_\infty u_\infty)$  — координаты вдоль соответствующих осей.

Тогда после ряда преобразований уравнения трехмерного пограничного слоя на скользящей и треугольной пластине бесконечной длины могут быть записаны согласно [1] в единой форме

$$Nu_\tau - \epsilon h - \xi \{ [\beta^2 - (1 - \xi)^n u] u_\xi - 4\epsilon h (1 - \xi)^n L_\xi / L \} = u_{\tau\tau}$$

<sup>1</sup> Этот случай при  $\chi = 0$  исследовался в работе [2], где при выводе закона подобия рассматривалась система уравнений движения.

$$\begin{aligned}
 Nt_r + \varepsilon h - \xi \{ [t\beta^2 - (1 - \xi)^n u] t_\xi + 4\varepsilon h L_\xi / L \} &= t_{rr} \\
 NH_r - \xi [t\beta^2 - (1 - \xi)^n u] H_\xi &= H_{rr} / P + 1/2 (1 - 1/P) (u^2 + t^2 \beta^2)_{rr} \\
 N_r - 1/4 (t\beta^2 - u) - \xi \{ [t\beta^2 - (1 - \xi)^n u] L_\xi / L + t_\xi \beta^2 - (1 - \xi)^n u_\xi \} &= 0 \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

$$L = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{1/2} \left[ \frac{3}{4} \Phi + \xi (1 - \xi)^n \Phi_\xi \right], \quad \Phi L = 2\varepsilon^{1/2} \int_0^\infty h dr$$

Здесь  $hu_\infty^2$  — энтальпия

$$\beta = \operatorname{tg} \chi, \quad t = w / \beta, \quad \varepsilon = (\kappa - 1) / 2\kappa, \quad H = h + 1/2 (u^2 + t^2 \beta^2)$$

$$L = (x - z\beta)^{1/4} (p / \rho_\infty u_\infty^2)^{1/2}$$

$n = 1$  и  $0$  соответственно для треугольной и скользящей пластин.

Независимые переменные  $r$  и  $\xi$  введены согласно соотношениям

$$r = \left( \frac{\varepsilon \rho_\infty u_\infty^2}{p(x - z\beta)} \right)^{1/2} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_\infty} dy, \quad \xi = \frac{x - z\beta}{x^n}$$

Параметр  $N$  является некоторым аналогом составляющей  $v$ , а индексами  $r$ ,  $\xi$ ,  $rr$  обозначены соответственно частные производные по  $r$ ,  $\xi$  и вторая производная по  $r$ .

На поверхности пластин  $u = t = N = 0$ ,  $H = H_w$ ,  $r = 0$ , на внешней границе слоя  $u \rightarrow 1$ ,  $t \rightarrow 0$ ,  $H \rightarrow 1/2$ ,  $r \rightarrow \infty$ . Распределение давления в соотношениях (1.1) вычисляется по методу касательных клиньев, зависимость вязкости от температуры выбрана линейной ( $\omega = 1$ ).

В работе [1] показано, что если искать решение системы (1.1) вблизи  $\xi = 0$  в виде ряда по возрастающим степеням  $\xi$ , то разложения для скользящей и треугольной пластин совпадают до второго члена ряда включительно и могут быть записаны в виде

$$L(\xi) = L_0 + L_1 \xi^\lambda + \dots, \quad f(\xi, r) = f_0(r) + (L_1 / L_0) f_1(r) \xi^\lambda + \dots \quad (1.2)$$

Здесь  $\lambda = \lambda(\chi)$ ,  $f$  — любая из входящих в соотношения (1.1) функций от  $\xi$  и  $r$ ;  $L_0$  и  $f_0(r)$  — автомодельное решение для случая обтекания скользящей пластины, а  $L_1$  — некоторый произвольный параметр, от которого зависит разложение.

Выбором соответствующего значения параметра  $L_1$  можно удовлетворить какому-либо условию на некоторой линии  $\xi = \text{const}$ . Если  $L_1 = 0$ , течение соответствует обтеканию бесконечной скользящей пластины.

3. Влияние возмущений, распространяющихся вверх по потоку от задней кромки тела, оценим на примере обтекания скользящей пластины.

При этом достаточно проделать вычисления лишь для двух значений  $L_1 / L_0$ , равных, например,  $+1$  и  $-1$ , поскольку все остальные решения могут быть получены из указанных линейным преобразованием координаты  $\xi$ . Это следует из выводов п. 1 и непосредственно из соотношений (1.1), (1.2), которые допускают замену  $\xi_* = (\pm L_1 / L_0)^{1/\lambda} \xi$ , сводящую задачу к одному из случаев  $L_1 / L_0 = \pm 1$ .

Расчет проведен для теплоизолированной поверхности, так как влияние градиента давления на пограничный слой в этом случае максимально. Число  $P$  полагалось равным единице. Вблизи кромки ( $\xi = 0$ ) использовались два члена ряда для функции  $L$ , а начиная с некоторого значения  $\xi$  производился подбор значения  $L_\xi / L$  на каждом шаге интегрирования по  $\xi$  из условий удовлетворения двух последних уравнений системы (1.1). Для решения остальных уравнений применялась методика, изложенная в работе [3].

При построении графиков координата  $\xi$  была нормирована таким образом, чтобы безразмерное давление  $\bar{L}^2 = p\xi^{1/2} / (\rho_\infty u_\infty^2)$  при  $\xi = 1$  отличалось на  $-20\%$  от значения этого параметра для автомодельной задачи, если  $L_1/L_0 = -1$ , и на  $+50\%$ , если  $L_1/L_0 = +1$ .

Целью проведенных расчетов была качественная оценка степени влияния на течение с вязким взаимодействием возмущений, возникающих на задней кромке тонких тел.

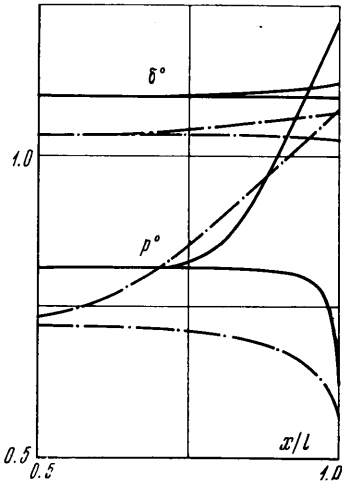
На фиг. 2 нанесены безразмерные толщина вытеснения  $\delta^\circ = \delta R_x^{3/4} / x$  и давление  $p^\circ = p R_x^{1/2} / (\rho_\infty u_\infty^2)$ .

На фиг. 3 показано распределение коэффициентов продольного и поперечного

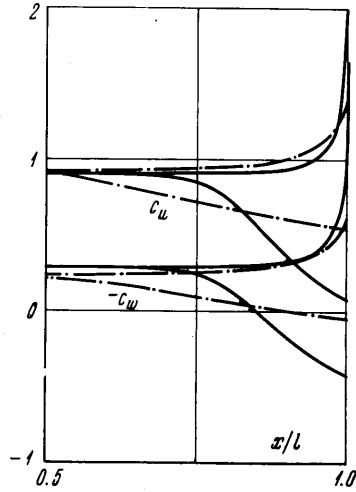
$$c_u = \mu_0 (\partial u / \partial y)_w R_x^{3/4} / (\rho_\infty u_\infty^2)$$

$$c_w = \mu_0 (\partial w / \partial y)_w R_x^{3/4} / (\rho_\infty u_\infty^2 \operatorname{tg} \chi)$$

коэффициентов трения. В записанных соотношениях для  $\delta^\circ$ ,  $p^\circ$ ,  $c_u$ ,  $c_w$  величины  $\delta$ ,  $p$ ,  $u$ ,  $w$  и  $y$  представляют собой соответственно размерную толщину вытеснения, давле-



Фиг. 2



Фиг. 3

ние, составляющие скорости и координату  $y$ ;  $x$  — расстояние от передней кромки тела,  $R_x = \rho_\infty u_\infty x / \mu_0$ . Данные, представленные на фиг. 2 и фиг. 3, могут рассматриваться как распределение соответствующих параметров по сечениям  $z = \text{const}$  скользящей пластины, если координата  $x$  отсчитывается от передней кромки. На фиг. 2 и фиг. 3 сплошные линии соответствуют значению  $\chi = 0$ , штрих-пунктирная —  $\chi = 60^\circ$ .

При  $\chi = 0$  максимальное расстояние, на котором влияние задней кромки существенно, составляет  $\sim 15\%$  длины пластины для предотрывного течения и  $\sim 10\%$  для случая разрежения на задней кромке. Согласно расчету влияние задней кромки увеличивается с ростом угла стреловидности. Предотрывное течение при  $\chi = 60^\circ$  занимает уже половину длины пластины.

Расчет интегральных характеристик течения на поверхности пластины показал, что при учете влияния задней кромки наиболее сильно изменяется коэффициент боковой силы  $c_z$  (на  $30\%$  для предотрывного течения при  $\chi = 60^\circ$ ).

При разрежении на задней кромке и  $\chi \leq 60^\circ$  подъемная сила и сопротивление пластины могут вычисляться без учета этого влияния с погрешностью порядка  $1\%$ , а боковая сила — с погрешностью порядка  $3\%$ .

Однако местные характеристики течения — коэффициенты трения (а следовательно, и теплопередачи) — могут при этом быть как угодно большими по сравнению с их значениями на пластине бесконечной длины.

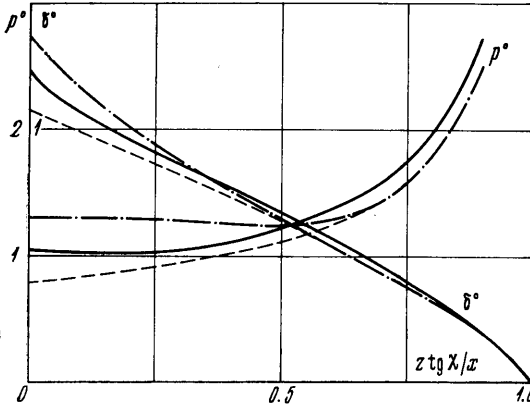
4. Влияние возмущений, возникающих внутри пограничного слоя при пространственном обтекании, оценим на примере течения на треугольной пластине бесконечной длины.

В этом случае вблизи оси симметрии пластины должна существовать область повышенного давления (по сравнению с давлением на скользящей пластине). Повышение давления должно погасить импульс газа, текущего от кромок к оси.

Нетрудно видеть, что в этом случае уже нельзя обойтись без решения краевой задачи, так как необходимо удовлетворить условию непротекания  $t \equiv 0$  при строго определенном значении  $\xi$ , равном 1 ( $z = 0$ ).

Из системы (1.1) следует, что условие непротекания может быть выполнено только в том случае, если  $L_\xi / L = 1/4$  при  $\xi = 1$ . Таким образом, выбранное значение  $L_1 / L_0$  должно обеспечить удовлетворение указанному соотношению на оси симметрии (после чего необходимо проверить выполнение условия  $t \equiv 0$ ).

Расчет течения на треугольной пластине проводился интегральным методом. Для этого профили составляющих скорости  $u$  и  $t$  аппроксимировались двухпараметрическими семействами кривых согласно соотношениям



Фиг. 4

определялись из полученной системы уравнений. Значение  $L_1 / L_0$  подбиралось таким образом, чтобы  $L_\xi / L = 1/4$  при  $\xi = 1$ . Выполнение последнего соотношения обеспечило при численном расчете равенство нулю поперечной составляющей скорости на плоскости  $z = 0$  ( $\xi = 1$ ). Исследование особенности при  $\xi = 1$  показало, что в этой точке производная от давления по  $\xi$  равна нулю, а производная от толщины вытеснения обращается в бесконечность как  $(1 - \xi)^{-1/4}$ .

Однако область неприменимости уравнений пограничного слоя, в которой наклон толщины вытеснения равен или больше по порядку величины единицы, имеют относительную величину  $R_x^{-1}$ , т. е. пренебрежимо мала при указанной постановке задачи.

Погрешность использованного метода расчета, можно оценить из табл. 1, где даны значения параметра  $L_0$  и собственного числа  $\lambda$ , подсчитанных с помощью точного (отмечены значком  $e$ ) и приближенного (значок  $a$ ) методов.

На фиг. 4, 5 приведены результаты расчета параметров  $\delta^\circ$ ,  $\rho^\circ$ ,  $c_u$  и  $c_w$ . Соответствующие параметры для скользящей пластины с  $\chi = 60^\circ$  нанесены пунктиром, для треугольных крыльев с  $\chi = 60^\circ$  и  $30^\circ$  — соответственно штрих-пунктирной и сплошной линиями. Значение координаты  $a$  отсчитывается от вершины пластины.

Результаты, представленные на фиг. 4, 5, можно рассматривать как распределение параметров в сечениях  $x = \text{const}$ .

Из указанных фигур видно, что отличие течений на треугольной и скользящей пластине возрастает с ростом угла стреловидности. При  $\chi = 60^\circ$  давление вблизи оси треугольной пластины уже примерно на 70% превышает давление на скользящей пластине.

В табл. 2 приведены коэффициенты сопротивления ( $c_x$ ), подъемной силы ( $c_y$ ) и боковой силы ( $c_z$ ), рассчитанные для одной из поверхностей, лежащей справа или слева от оси (отмечены значком  $\Delta$ ). Для сравнения даны также результаты, получен-

$$\begin{aligned} \partial u / \partial r &= (1 - u^2) / (1 + bu)2a \\ t &= cu(1 - u^2) + su^2(1 - u) \end{aligned}$$

Для определения параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $s$  использовались интегральные уравнения сохранения импульса вдоль осей  $x$  и  $z$ , а также условия на поверхности пластины, следующие из дифференциальных уравнений сохранения импульса.

Число  $P$  было выбрано равным единице, поверхность пластины считалась теплоизолированной.

В результате задача сводилась к решению системы из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений. Значения  $\lambda$  и  $L_0$ , входящие в разложение (1.2),

Таблица 1

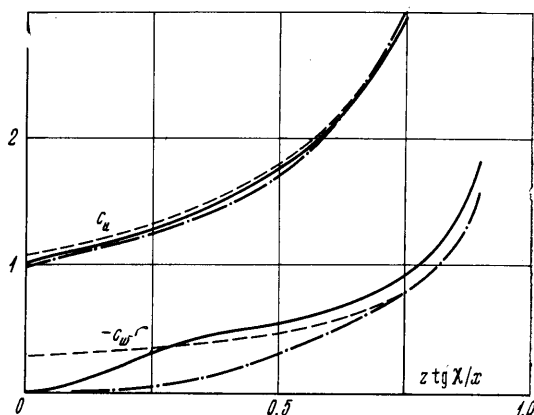
$\chi$	$L_0$		$\lambda$	
	(e)	(a)	(e)	(a)
0	0.902	0.934	24	14.4
45°	0.879	0.914	12	12.5
60°	0.848	0.885	7,7	9.8

ные тем же интегральным методом, но при помощи решений для скользящего крыла (отмечены значком  $\chi$ ) и по «теории полос», т. е. из решения при  $\chi = 0$  (значок  $s$ ).

Из табл. 2 следует, что при расчете подъемной силы и сопротивления крыла решение, полученное при помощи теории полос, дает более точный результат по сравнению с решением, основанным на теории скользящего крыла. Напротив, применение последней теории более предпочтительно при расчете поперечной составляющей силы, действующей на половину пластины.

5. На основании полученных результатов становится ясным важность учета влияния возмущений пограничного слоя на течения с сильным или умеренным вязким взаимодействием. Понижение местного давления в таких течениях приводит к увеличению коэффициентов трения и теплопередачи, а повышение — вызывает уменьшение этих коэффициентов. При этом возмущения, вызванные повышением давления, распространяются на относительно большие расстояния.

Влияние возмущений пограничного слоя на интегральные характеристики обтекания возрастает с ростом угла стреловидности (порядок изме-



Фиг. 5

нения этих характеристик возрастает с ростом угла стреловидности (порядок изме-

Таблица 2

$\alpha$	$c_x R_x^{3/4}$			$c_y R_x^{1/2}$			$\text{ctg } \alpha c_z R_x^{3/4}$		
	( $\Delta$ )	( $\chi$ )	( $s$ )	( $\Delta$ )	( $\chi$ )	( $s$ )	( $\Delta$ )	( $\chi$ )	( $s$ )
30°	13.5	13.5	13.5	4.66	4.58	4.66	3.96	4.16	4.27
45°	13.5	13.5		4.66	4.46		3.64	3.98	
60°	13.5	13.7		4.68	4.18		3.09	3.59	

нения этих характеристик может возрасти от 3 до 15% при изменении угла стреловидности от 0 до 60°).

Излом передней кромки крыла может привести к существенному изменению параметров потока на его поверхности.

Поступило 22 XII 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Козлова И. Г., Михайлов В. В. О сильном вязком взаимодействии на треугольном и скользящем крыльях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
2. Нейланд В. Я. Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 4.
3. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. Сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы», М., «Наука», 1964.