

УДК 532.526.5

## К АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

В. Я. НЕЙЛАНД

(Москва)

Исследуется распространение возмущений вверх по потоку для сверхзвуковых и гиперзвуковых течений вязкого газа. Найдены решения для области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем, окрестности угловой точки тела в сверхзвуковом потоке и для течения с сильным взаимодействием пограничного слоя с гиперзвуковым потоком.

1. Рассматриваются течения, в которых градиент давления, индуцируемый пограничным слоем, влияет на решение для пограничного слоя уже в первом приближении. Обзор ранних исследований по гиперзвуковой теории взаимодействия приведен в работе [1]. В работе [2] получено асимптотическое решение уравнений Навье — Стокса для течения около точки отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке<sup>1</sup>. Показано, что краевая задача для уравнений Прандтля, отражающая связь между возмущениями давления и толщины вытеснения пограничного слоя, описывает распространение возмущений вверх по потоку и приводит к необходимости задания дополнительного краевого условия. Подобные результаты найдены в работе [3] для задачи о сверхзвуковом течении с поворотом около угловой точки тела на конечный угол и в работе [4] для течения в области присоединения развитой зоны отрыва. В работе [5] для гиперзвуковых течений показано, что при слабом взаимодействии пограничного слоя с вязким потоком области с распространением возмущений вверх по потоку носят локальный характер, как для сверхзвуковых течений. Аналогичный результат получен для режимов умеренного и сильного взаимодействия, хотя в этих случаях размер области распространения возмущений имеет порядок длины тела. (Такой же результат получен для течений с сильным распределенным вдувом газа через поверхность тела [6].)

Появление областей с распространением возмущений вверх по потоку в задачах, описываемых параболическими (при заданном распределении давления) уравнениями Прандтля даже при отсутствии возвратных течений, вызывается интегро-дифференциальным условием, связывающим изменение толщины вытеснения  $d\delta/dx$  с градиентом давления  $dp/dx$ , который теперь вычисляется в процессе решения задачи. Так как  $dp/dx$  зависит от  $d^2\delta/dx^2$ , где  $\delta$  — интеграл по поперечной переменной  $y$  от функции, определяемой распределением скорости и плотности в пограничном слое, то в уравнениях пограничного слоя при подстановке выражения для  $dp/dx$  появляется под знаком интеграла по  $y$  производная  $\partial^2 u/\partial x^2$ , где  $u$  — продольный компонент скорости. Не повторяя аргументов и результатов названных выше работ, поясним ситуацию на простых модельных примерах

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

$$u(0, y) = u(x, 1) = 1, \quad u(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x, y \leq 1) \quad (1.2)$$

<sup>1</sup> См. также доклад В. Я. Нейланда «Сверхзвуковое течение вязкого газа вблизи точки отрыва». Сб. «Аннот. докл. III Всес. съезда по теор. и прикл. механ.», М., АН СССР, 1968.

Первое из уравнений (1.1) эллиптического типа. Как известно, решение его будет определено однозначно, если задать еще  $u(1, y) = \varphi(y)$ . Пусть  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $(x, y) \sim O(1)$ . Задача становится параболической

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u(0, y) = u(x, 1) = 1, \quad u(x, 0) = 0 \quad (1.3)$$

Краевым условиям при  $x = 1$  нельзя удовлетворить, так как потеряна старшая производная по  $x$ . Следуя обычной процедуре метода сращиваемых асимптотических разложений, рассмотрим область около  $x = 1$

$$x_1 = (x - 1) / \varepsilon, \quad y_1 = y, \quad u(x, y, \varepsilon) = u_1(x_1, y_1) + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \quad u_1(x_1, y_1) = u(1, y) + [\varphi(y_1) - u(1, y)] e^{x_1}$$

Решение (1.4) при  $x_1 \rightarrow -\infty$  переходит в решение (1.3), при  $x = 1$  равно  $\varphi(y)$ .

Заметим, что в области  $x_1 \sim 1$  остаются неудовлетворенными краевые условия при  $y = 0$  и  $1$ . Это обстоятельство можно было бы устранить, введя в рассмотрение пограничные слои около  $y \simeq 0$  и  $1$ . Но решение для этих пограничных слоев не влияет на решение в основной области в первом приближении и для целей данной работы несущественно.

Таким образом, первое из уравнений (1.1) при краевых условиях (1.2) допускает задание еще одной произвольной функции. Внешнее решение для второго уравнения (1.1), очевидно, совпадает с (1.3). Это аналог невозмущенного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке до области свободного взаимодействия. Вводя переменные (1.4), получим задачу

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \int_0^1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} du_1 \quad (1.5)$$

Правая часть (1.5) зависит только от  $x_1$ , поэтому равна  $F'(x_1)$ , где  $F(x_1)$  — произвольная пока функция от  $x_1$ . Тогда  $u_1(x_1, y_1) = F(x_1) + C_1(y_1)$ , где  $C_1(y_1)$  — произвольная функция от  $y_1$ . Подстановка этого выражения в (1.5) позволяет найти  $F(x_1) = A + B e^{x_1}$ , где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Тогда общее решение (1.5)

$$u_1(x_1, y_1) = B e^{x_1} + C(y_1)$$

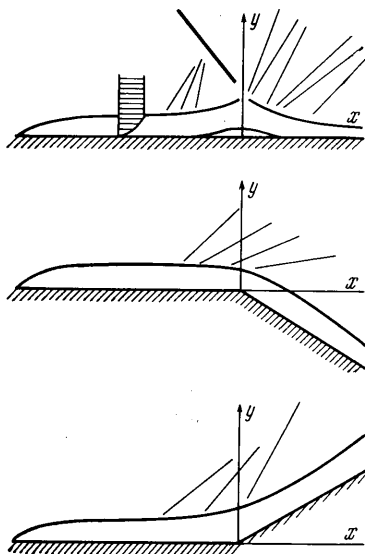
Применение принципа сращивания решений в областях  $x \sim 1$  и  $x_1 \sim 1$  позволяет найти

$$C(y) = u(1, y)$$

Постоянная  $B$  остается неопределенной. Для ее нахождения необходимо задавать еще одно условие вместо  $\varphi(y)$  в задаче (1.4). Таким же образом появление второй производной по  $x$  от  $u$  в уравнениях пограничного слоя приводит к появлению семейств решений, зависящих от одного параметра, а не от произвольной функции, так как старшая производная по  $x$  стоит под знаком интеграла по  $y$ . Модель описывает ситуацию, возникающую при  $M \sim 1$  или в гиперзвуковом течении при слабом взаимодействии, когда область влияния локализована около  $x = 1$ . Если же  $\varepsilon = 1$ , то получится модель гиперзвукового течения с неслабым взаимодействием и влиянием заднего краевого условия на всю область течения.

2. Рассмотрим в рамках теории, развитой в работах [2, 3], пограничный слой на плоской пластине в сверхзвуковом потоке газа. Пусть на расстоянии  $l$  от передней кромки на пограничный слой падает извне ударная волна с амплитудой порядка  $\varepsilon^{1/2} = R^{-1/4}$ . Число  $R$  определено по параметрам невозмущенного набегающего потока и длине  $l$ . Из дальнейшего будет видно, что те же самые решения для безразмерных функций течения описывают течения около угловой точки тела с положительным и отрицательным углом поворота порядка  $R^{-1/4}$ . Поэтому рассматриваются  $\Delta p \geq 0$  (фиг. 1). Следуя [2, 3], заметим, что в основной части пограничного слоя, где  $u \sim O(1)$ ,  $\Delta p \sim \Delta u \sim \Delta p$ .

(Здесь и ниже все переменные отнесены к их значениям в невозмущенном набегающем потоке, длины — к  $l$ , а давление — к удвоенному скоростному напору.) Поэтому изменение толщины струек тока  $\sim \varepsilon O(\Delta p) \sim \varepsilon^{3/2}$ . Однако около поверхности тела, где  $u \sim \Delta u$ , в силу продольного уравнения импульсов  $u \sim \Delta u \sim \Delta p^{1/2} \sim \varepsilon^{1/4}$ . Поэтому толщина струек тока меняется на основной порядок по величине. Толщина этого слоя в силу решения задачи для невозмущенного пограничного слоя имеет порядок  $\varepsilon^{3/4}$ , а  $u \sim \varepsilon^{1/4}$ . Изменение толщины этого тонкого подслоя создает в первом приближении изменение толщины вытеснения всего пограничного слоя в возмущенной части течения. Но согласно внешнему краевому условию  $\Delta p \sim \Delta \delta / \Delta x$ , поэтому  $\Delta x \sim \varepsilon^{3/4}$ . Используя полученные оценки и принцип сращения решений в сверхзвуковом потоке, основной части пограничного слоя и подслоя, можно получить следующую краевую задачу для области с длиной  $x \sim R^{-3/8}$  около места падения скачка уплотнения. (Подробный вывод уравнений приведен в [2, 3].)



Фиг. 1

$$f''' = \beta [\pm 1 + (1/2)f'' - ff'''] + \beta \xi (f'f'' - f'f''')$$

$$\beta = \pm \xi^{1/2} (\xi - |\theta|) \left( \frac{d}{d\xi} \{2\xi^{1/2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - (2f)^{1/2}]\} \right)^{-1}, \quad \beta = \xi^{1/2} \frac{d\xi}{dX}$$

$$f(\xi, 0) = f'(\xi, 0) = 0, \quad g(\xi, 0) = 0, \quad f''(\xi, \infty) = g'(\xi, \infty) = 1,$$

$$f(0, \eta) = (1/2)\eta^2$$

$$p - p(-\infty) = \pm \varepsilon^{1/2} [\mu a / 2B]^{1/2} \xi, \quad \psi = \varepsilon^{1/2} (\mu / 2Ba)^{1/2} \xi f \quad (2.1)$$

$$n = \varepsilon^{5/4} (\mu / 2B\rho^2 a^3)^{1/4} \xi^{1/2} \eta, \quad x = \varepsilon^{3/4} X / (8B^3 \rho^2 a^5 \mu)^{1/4}, \quad y_2 = \varepsilon^{5/4} (\mu / 32B\rho^2 a^3)^{1/4} Y_2$$

$$dy_2 / dx = \varepsilon^{1/2} (\mu Ba / 2) \theta$$

Здесь  $\mu$ ,  $\rho$  вычисляются при температуре поверхности тела,  $a = (\partial u / \partial y)_{z=0}$  для невозмущенного пограничного слоя,  $B = (M^2 - 1)^{1/2}$  в невозмущенном сверхзвуковом потоке, индексом 2 отмечены значения переменных на поверхности тела,  $n$  — отсчитывается по нормали к поверхности тела, а  $y_2$  — расстояние от горизонтальной оси  $x$  (фиг. 1) до поверхности тела; знаки  $\pm$  соответствуют течениям сжатия и разрежения, тог-

да как всегда  $\xi > 0$ . Первое уравнение совпадает с уравнением импульса несжимаемого пограничного слоя, а третье есть формула Аккерата, связывающая величину возмущения давления с эффективным углом наклона толщины вытеснения пограничного слоя.

Заметим, что при полном решении задачи необходимо рассмотреть еще окрестность начала координат с масштабом  $x \sim \varepsilon$ . В самом деле при  $M \sim 1$  угол наклона скачка уплотнения  $\sim O(1)$ . Поэтому длина области прохождения скачка уплотнения через завихренную часть течения, образованного исходным пограничным слоем, который имеет толщину  $\sim \varepsilon$ , также должна иметь порядок  $\sim \varepsilon$ . В области с  $x \sim \varepsilon$ ,  $y \sim \varepsilon$ ,  $\Delta u \sim v \sim \varepsilon^{1/2} \sim \Delta r$ . Легко видеть, что в такой области вязкие члены уравнений пренебрежимо малы, и течение может быть рассмотрено как локально-невязкое. Такая задача для невязкого течения решена в работе [7]. Оказалось, что давление на теле остается постоянным (в главном члене). Это верно и в общем случае.

Докажем, что это верно для всех трех задач, показанных на фиг. 1. Предположим, что в главном члене в области  $x \sim \varepsilon$ ,  $\Delta r \sim \varepsilon^{1/2}$  на поверхности тела. Но тогда подслоем с толщиной  $\varepsilon^{3/4}$ , в котором  $u \sim \Delta u$ , изменит свою толщину на основной порядок по величине на длине  $x \sim \varepsilon$ , а это невозможно, так как в силу внешнего краевого условия привело бы к появлению  $\Delta p \sim \Delta y / \Delta x \sim \varepsilon^{1/4} \gg \varepsilon^{1/2}$ .

Таким образом, область с  $x \sim \varepsilon$  используется при решении задачи (2.1) для основной области с длиной  $x \sim \varepsilon^{3/4}$  лишь как точка, в которой происходит разрыв константы  $\theta$  во внешнем краевом условии. Если рассматривается обтекание угловой точки тела, то  $|\theta|$  во втором уравнении (2.1) при  $X = 0$  меняется скачком от 0 до  $|dY_2/dX|$  за поворотом. В задаче о падении скачка на пограничный слой для  $X < 0$   $\theta = 0$ , а для  $X > 0$   $\theta$  равно углу поворота, при обтекании которого в рамках линейной теории сверхзвуковых течений коэффициент давления в два раза был бы больше, чем для падающего скачка уплотнения. (Первое асимптотическое приближение соответствует для сверхзвукового потока формуле Аккерата.)

Метод численного решения (2.1) подробно описан в [2]. В уравнениях частные производные после преобразований, обеспечивающих повышение точности интегрирования около внешней границы

$$f = \varphi + \eta^2 / 2, \quad g = G + \eta$$

заменялись конечными разностями согласно методу работы [8]. На каждой характеристической полосе при помощи выражения для  $\beta$  производилась пристрелка величины этого параметра. При некотором значении  $\xi$  значение  $|\theta|$  полагалось не равным 0 и численное решение продолжалось до точки, в которой или  $\xi$  достигало  $|\theta|$ , если принятое значение  $|\theta|$  было недостаточно большим, или исчезала возможность удовлетворить условию для  $\beta$ . Таким образом, при каждом значении  $\xi$  в точке падения скачка уплотнения (или поворота контура тела) пристрелкой удавалось найти соответствующую величину амплитуды возмущения  $|\theta|$ , которая соответствовала выходу на невозмущенное решение при  $\xi \rightarrow |\theta|$  и  $X \rightarrow +\infty$ .

На фиг. 2 приведены результаты расчета распределения давления. Сплошными кривыми показаны результаты для течений с повышением давления, пунктиром — течения разрежения. На них кружками отмечено положение точек отрыва и квадратами — точек присоединения. Расчеты позволили определить минимальную амплитуду, величину коэффициента давления падающего скачка уплотнения, вызывающего отрыв (обращение в нуль трения в одной точке)

$$C_p = (1/2)\theta [C_f / B]^{1/2}$$

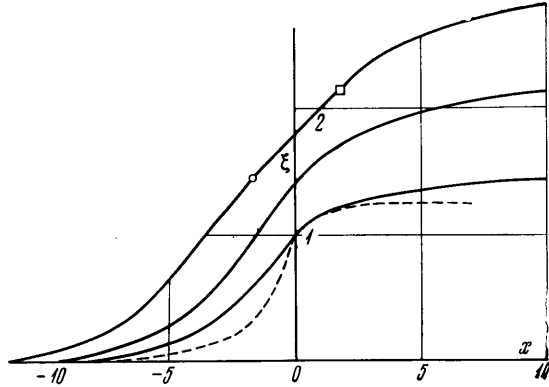
где  $\theta = 2,3$ , а  $C_f$  — местное значение коэффициента сопротивления трения пограничного слоя непосредственно перед областью возмущенного течения.

Соответствующий минимальный угол поворота, вызывающий отрыв потока в безразмерных переменных, равен также  $\theta = 2,3$ . Приведенное значение численного коэффициента существенно превышает то, которое получено в работе [9] для линеаризованной задачи о течениях около угловой точки ( $\theta \approx 1,86$ ). В работе [9] помимо этого результата частично получены некоторые результаты работы [3]. Наряду с этим высказывается гипотеза о том, что в течениях разрежения этого типа может быть получено перерасширение и последующий отрыв потока.

Такая гипотеза рассматривалась ранее в работе [10] для течений разрежения около тел с конечной амплитудой углов поворота контуров. Теория таких течений включает в себя рассмотрение локально-невязких областей, в которых поперечные и продольные градиенты давления имеют одинаковый порядок. За счет действия центробежных сил давление около поверхности тела падает ниже величины, соответствующей величине давления за областью поворота, и при восстановлении давления может появиться отрыв потока.

3. Рассмотрим теперь обтекание гиперзвуковым потоком плоской пластинки длиной  $l$ . Обозначим через  $R_2$  число Рейнольдса, при определении которого использован коэффициент вязкости, вычисленный при температуре торможения потока, и параметры невозмущенного потока. Пусть  $\chi = M^2 R_2^{-1/2} \geq O(1)$  при  $M \rightarrow \infty$  и  $R_2 \rightarrow \infty$ . Такой режим течения соответствует умеренному или сильному (при  $\chi \rightarrow \infty$ ) взаимодействию внешнего невязкого потока с пограничным слоем [1]. Это значит, что градиент давления, индуцируемый толщиной вытеснения пограничного слоя, влияет на течение в пограничном слое уже в первом приближении.

Для простоты выпишем переменные и уравнения пограничного слоя, полагая пластину теплоизолированной, число Прандтля равным единице, а зависимость коэффициента вязкости  $\mu$  от энтальпии  $h$  линейной



Фиг. 2

$$x = X, \quad y = \tau Y, \quad \tau = R_2^{-1/4} \tag{3.1}$$

$$u = U, \quad v = \tau V, \quad p = \tau^2 P, \quad \rho = \tau^2 R$$

В отличие от предыдущих разделов статьи  $\mu$  отнесено к его значению на теле, а  $h$  — к квадрату скорости в невозмущенном потоке

$$f''' + ff'' - \beta(\xi)(1 - f^2) = 2\xi(f'f'' - f''f') \tag{3.2}$$

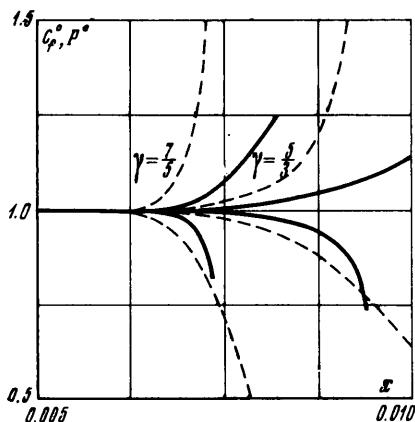
$$\beta(\xi) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{d \ln P}{d \ln \xi}, \quad f(\xi, 0) = f_2, \quad f'(\xi, 0) = 0, \quad f'(\xi, \infty) = 1$$

$$\xi = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \int_0^x P dX, \quad \eta = (2\xi)^{-1/2} \int_0^y R dY, \quad U = f'$$

Штрихами и точками обозначено дифференцирование по  $\eta$  и  $\xi$  соответственно (при отсутствии вдува  $f_2 = 0$ ). Для установления связи между наклоном внешней границы пограничного слоя и распределением давления в этой статье используется метод касательных клиньев при  $\chi \rightarrow \infty$

$$P = \frac{\gamma + 1}{2} \left( \frac{d\delta}{dX} \right)^2, \quad \delta = (2\xi)^{1/2} \int_0^\infty \frac{d\eta}{R} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{(2\xi)^{1/2}}{P} \int_0^\infty (1 - f'^2) d\eta \tag{3.3}$$

В работе [5] в более общих предположениях было показано, что нигде в пограничном слое при  $\chi \geq O(1)$  не может существовать локальных участков течения, в которых градиент давления на теле по порядку величины больше, чем  $\tau^2$ , индуцируемый пограничным слоем в основной области. Это существенно отличает режим  $\chi \geq O(1)$  от режима слабого взаимодействия  $\chi \rightarrow 0$  или сверхзвукового течения, для которых имеет место как раз локализация возмущений вблизи донного среза, угловых точек, мест



Фиг. 3

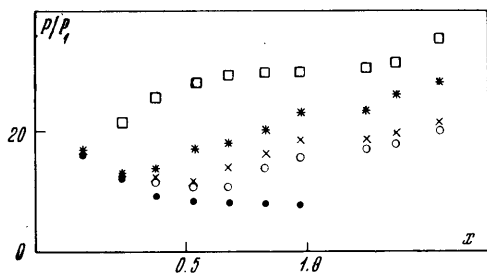
падения ударных волн [2-5]. Из этого общего принципа был сделан вывод, что изменение условий на заднем конце тела (например, изменение донного давления, отклонение щитка и т. п.) должно приводить к такой перестройке всего течения вплоть до передней кромки тела, которая обеспечивает сопряжение величины давления с новым краевым условием. Но тогда краевая задача (3.2), (3.3) должна иметь целое семейство решений, а не единственное автомодельное решение, которое рассматривалось ранее [1]. В соответствии с результатами работы [5] и приведенными выше соображениями многообразие решений представляет собой однопараметрическое семейство. Разложение этих решений около  $\xi = 0$  имеет вид

$$f(\xi, \eta) \sim f_0(\eta) + \xi^{1+a} \frac{A_1}{A_0} f_1(\eta) + \sum_{v=2}^{\infty} f_v(\eta) \xi^{v(1+a)} \quad (3.4)$$

$$P(\xi) \sim \frac{A_0}{\xi} \left[ 1 + \frac{A_1}{A_0} \xi^{a+1} + \sum_{v=2}^{\infty} \frac{A_v}{A_0} \xi^{v(1+a)} \right]$$

Подстановка (3.4) в (3.2) и (3.3) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $\xi$  позволяет показать, что первые члены разложения приводят к известному автомодельному решению для сильного взаимодействия. Нетривиальное решение для следующего члена существуют лишь при определенном значении  $a$ . Коэффициент  $A_1$  остается при этом неопределенным, что и приводит к появлению однопараметрического семейства решений (как это бывает обычно в задачах о нахождении собственных решений). При заданном значении  $A_1$  все следующие члены разложений (3.4) определены однозначно.

На фиг. 3 представлены некоторые результаты численного интегрирования задачи (3.2) и (3.3) при  $|A_1/A_0| = 1$  для  $\gamma = 7/5$  (левая группа кривых) и  $\gamma = 5/3$  (правая группа кривых). Пунктиром показаны результаты для  $C_f^0$ , сплошными кривыми — для  $P^0$ . Давление  $P^0$  и коэффициент сопротивления трения  $C_f^0$  отнесены к их значениям для соответствующих автомодельных решений. Переход от  $\gamma = 7/5$  к  $5/3$  сопровождается увеличением области, в которой влияние хвостовой части является сильным. На это указывает и уменьшение показателя степени  $a$  от 49.6 до  $\sim 23.76$ .

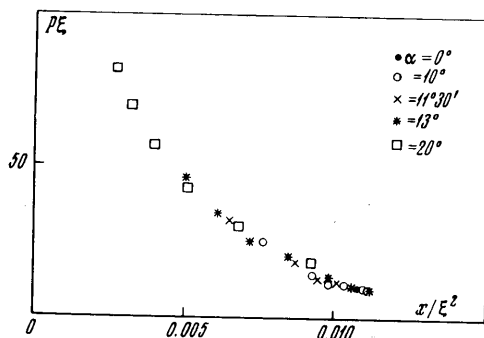


Фиг. 4

При вдуве через поверхность тела ( $f_2 < 0$ ) область влияния также увеличивается, а при  $f_2 = -10$  значение  $a$  падает до 1.16. Можно видеть, что при отсутствии вдува область сильного изменения  $P$  и  $C_f$  для течений «разрежения» мала — от 10 до 20%  $l$ . Повышение давления на конце тела выше соответствующего автомодельному решению вызывает появление более протяженной области сильных изменений параметров течения, что может приводить к изменению интегральных аэродинамических характеристик. Заметим, что появление относительно небольших областей для течений разрежения также может оказаться существенным из-за резкого изменения локальных характеристик, например повышения местных тепловых потоков, а также влиять на положение центра давления.

В заключение, напомним, что в работе [5] была найдена группа преобразований

$$\begin{aligned} \xi &= b\xi_4, & \eta &= \eta_4, & P &= P_4/b, \\ R &= R_4/b, & U &= U_4, & h &= h_4, \\ Y &= b^{3/2}Y_4, & X &= b^2X_4, & f &= f_4 \end{aligned} \quad (3.5)$$



Фиг. 5

относительно которой инвариантна краевая задача. Она позволяет свести семейство решений к одному «стандартному» решению. Вместе с тем она определяет закон подобия, проверка которого проведена на фиг. 4, 5, где приведены экспериментальные данные, полученные В. С. Гориславским и Э. А. Степченковой на пластине с отклонением щитка на угол  $\alpha$  при  $M = 23.3$  и  $R_2 = 1.9 \cdot 10^4$  для потока гелия. Можно видеть, что закон подобия позволяет получить хорошую корреляцию экспериментальных данных, включая и течения, которые имели области отрыва, не начинавшиеся с передней кромки тела, которые согласно [5] также описываются уравнениями пограничного слоя.

Поступило 11 II 1971

## ЛИТЕРАТУРА

- Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
- Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
- Нейланд В. Я. К асимптотической теории расчета тепловых потоков около угловой точки тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
- Нейланд В. Я. К асимптотической теории плоских стационарных течений со срывными зонами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
- Нейланд В. Я. Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 4.
- Матвеева Н. С., Нейланд В. Я. Сильный вдув на телах конечной длины в сверхзвуковом потоке. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, вып. 5.
- Lighthill M. J. Reflection at a laminar boundary layer a weak steady disturbance to a supersonic stream, neglecting viscosity and heat conduction. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1950, vol. 3, p. 3.
- Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. Сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы», М., «Наука», 1964.
- Stewartson K. On laminar boundary layers near corners. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1970, vol. 23, No. 2.
- Нейланд В. Я., Сычев В. В. Асимптотические решения уравнений Навье — Стокса в областях с большими локальными возмущениями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.