

УДК 533.6.011+533.6.013.2.011

## РАСЧЕТ ДИФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ПРОФИЛЕ С ПОСЛЕДУЮЩИМ УСТАНОВЛЕНИЕМ СТАЦИОНАРНОГО СВЕРХЗВУКОВОГО И ТРАНЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ

А. С. ФОНАРЕВ

(Москва)

Задача о набегании ударной волны на неподвижный симметричный профиль крыла решена при помощи метода С. К. Годунова [1, 2]. Рассматривается как стадия дифракции ударной волны, так и последующее установление обтекания профиля стационарным потоком газа (сверхзвуковым и околозвуковым).

Отметим, что численные решения некоторых задач дифракции уже проводились ранее (например, [3, 4]) с использованием других разностных методов.

1. Рассмотрим задачу о нестационарном обтекании симметричного профиля в некоторой «математической» ударной трубе, в которой создана достаточно длинная пробка сжатого в ударной волне газа и пусть в начальный момент  $t = 0$  ударная волна подошла к носу профиля. Совместим начало координат с носиком тела; при этом ось  $x$  направим вдоль линии симметрии тела, ось  $y$  — перпендикулярно ей. Обозначив параметры газа перед ударной волной (в неподвижном газе) индексом 1, и за ударной волной — индексом 2, зададим начальные данные в виде

$$x > 0: \quad p = p_1, \quad \rho = \rho_1, \quad u = u_1 = 0; \quad v = v_1 = 0, \quad M_1 = 0 \quad (1.1)$$

$$x \leq 0: \quad p = p_2, \quad \rho = \rho_2, \quad u = u_2, \quad v = v_2 = 0, \quad M_2 = M_\infty$$

(Параметры газа с индексами 1 и 2 удовлетворяют соотношениям на ударной волне.)

Систему дифференциальных уравнений газовой динамики при обычных предположениях об отсутствии вязкости и теплопроводности запишем в дивергентной форме, используя векторные обозначения

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

где

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho \left( e + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \end{array} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{array}{l} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u v \\ \rho u \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \end{array} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} \rho v \\ \rho u v \\ p + \rho v^2 \\ \rho v \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

В качестве уравнения состояния примем уравнение состояния идеального газа

$$p = \rho e(\gamma - 1) \quad (1.4)$$

В соотношениях (1.1) — (1.4) приняты обозначения:  $p$  — давление газа,  $\rho$  — плотность,  $u, v$  — составляющие скорости газа соответственно по  $x$ - и  $y$ -координате,  $e$  — удельная энергия на единицу массы,  $\gamma$  — показатель адиабаты. Во всех приводимых ниже расчетах полагалось  $\gamma = 1.4$ .

Зададим на профиле обычные условия непротекания:

$V_n = 0$  при  $y = y_T(x)$  (нормальная составляющая скорости равна нулю).

При численном решении задачи нужно задать еще дополнительные условия на внешних границах (стенках, ударных волнах, свободной поверхности и т. д.) или на бесконечности. При этом условиям на бесконечности можно удовлетворить лишь приближенно, либо перенося их из бесконечности на некоторые, достаточно удаленные границы, сохраняя конечным максимальный шаг по координатам, либо увеличивая координатный шаг до бесконечности (это делается обычно путем введения преобразования координат). С точки зрения погрешностей оба способа, по-видимому, эквивалентны, и, как показывает опыт расчета такого рода задач, обычно вносят весьма небольшие ошибки в расчет. Будем придерживаться первого способа приближенного задания граничных условий на бесконечности. На некоторой линии перед телом  $x = x_{-1} = \text{const}$  зададим граничные условия одним из двух способов

$$p = p_\infty = p_2, \quad \rho = \rho_\infty = \rho_2, \quad u = u_\infty = u_2, \quad v = v_\infty = 0 \quad (1.5)$$

либо

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Позади профиля на линии  $x = x_1 = \text{const}$  зададим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.6)$$

Границы области (величины  $X_{-1}, X_1$ ) следует выбирать достаточно далеко от профиля — в области уже практически невозмущенного потока. При численном решении задачи они выбираются «экспериментально». Естественно, в этом случае оба условия (1.5) равнозначны. При этом второе условие предпочтительнее, так как не требует корректировки граничного условия в момент подхода ударной волны к правой границе  $x = X_1$ . Оно «пропускает» ударную волну вперед и устанавливает на ней значения параметров за ударной волной.

На верхней границе — стенке математической трубы — будем задавать, как правило, граничное условие второго типа (производные по  $y$ ), считая, что стенка расположена достаточно далеко и взаимное влияние тела и стенки практически отсутствует. Только в одном случае — случае околосзвукового обтекания профиля — будет рассмотрено также условие типа свободной поверхности, чтобы подчеркнуть заметное влияние стенок «трубы» при трансзвуковом режиме обтекания тел.

Дивергентный вид системы (1.2) позволяет представить ее в виде интегральных законов сохранения, из которых следует исходить при необходимости вести численный расчет сквозь сильные разрывы

$$\iint_s A dx dy + B dy dt + C dx dt = 0 \quad (1.7)$$

В соотношении (1.7)  $S$  — произвольная замкнутая кусочно-гладкая поверхность в пространстве  $(x, y, t)$ .

В качестве характерных размерных величин примем

$$\begin{aligned} p_0 = p_2, \quad \rho_0 = \rho_2, \quad u_0 = \sqrt{p_2 / \rho_2}, \quad v = \sqrt{p_2 / \rho_2} \\ x_0 = y_0 = X_0, \quad t_0 = x_0 / u_0 \end{aligned}$$

где  $X_0$  — продольный размер тела (хорда профиля).

2. Обозначим нижнюю границу (состоящую из оси  $x$  и контура тела) рассматриваемой области расчета через  $y_n = Y_0(x)$ . Разобьем нижнюю границу на  $m_{-1} + m_0 + m_1$  частей, причем индекс  $-1$  соответствует области перед телом, индекс  $0$  — телу, индекс  $1$  — области за телом с шагом, равномерным на теле и переменным (увеличивающимся по геометрической прогрессии по мере удаления от тела) в областях  $-1$  и  $1$ .

Проведем семейство вертикальных линий  $x_m = \text{const}$ . Второе семейство зададим путем разбиения  $y$ -координаты на  $K$  частей следующими кривыми:

$$y_0(x) = Y_0(x), \quad y_i = Y_0(x) + \Delta y_0 q^{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, K \quad (2.1)$$

где  $\Delta y_0$  и  $q$  удовлетворяют условию для суммы геометрической прогрессии

$$\frac{\Delta y_0 (q^K - 1)}{q - 1} = H \quad (2.2)$$

В соотношении (2.2) величина  $H$  соответствует вертикальному размеру области течения в невозмущенной части потока перед телом (т. е. на линии  $x = X_{-1}$ ). При  $q = 1$  получается равномерное разбиение по  $y$ . Выбранное разбиение удобно для рассматриваемой задачи, так как составление алгоритма расчетной схемы является достаточно простым.

Конечно-разностная схема построена аналогично [2] с той лишь разницей, что при расчете распада разрыва расчет параметров проводился не по линеаризованным, а по точным соотношениям во всем потоке, так как для рассматриваемой задачи характерно наличие сильных ударных волн.

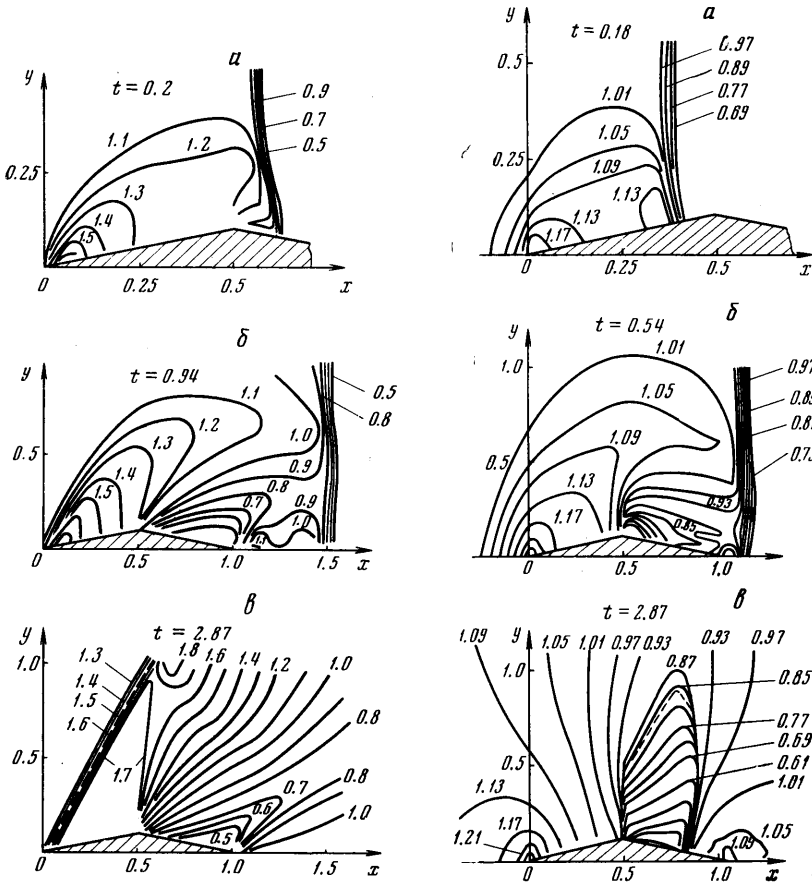
В приводимых ниже расчетных случаях использовалась сетка со следующими параметрами. В трансзвуковом случае  $(m_{-1} + m_0 + m_1)K = (32 + 64 + 32) \times 32$ , в сверхзвуковом —  $(8 + 64 + 32) \times 32$ . Координатные шаги вблизи тела (первые члены геометрической прогрессии) как по оси  $x$ , так и по оси  $y$  выбирались равными  $1/32$ ,  $X_{-1} = -1 \div -2$ ,  $X_1 = 2 \div 3$ ,  $H = 1-3$  (в сверхзвуковом случае величина  $X_{-1}$  полагалась равной 0.25); при выборе этих величин в указанных пределах обеспечивалось практически полное отсутствие влияния расположения границ на параметры потока вблизи тела.

3. Приведем некоторые численные результаты. Численные расчеты были проведены для двух типов профилей — ромбовидного и чечевицеобразного. Выбор этих профилей связан с наличием теоретических и экспериментальных результатов стационарной стадии обтекания.

Рассмотрим сначала случай обтекания профиля сверхзвуковым потоком газа, начиная с момента, когда ударная волна со сверхзвуковым потоком за ней находится у носика профиля. На фиг. 1, а, б, в показано движение ударной волны по ромбовидному профилю, за фронтом волны скорость соответствует числу Маха  $M_\infty = 1.5$ . Толщина профиля  $s = 20\%$ . Линии равных давлений, превышающих значения  $p = 1$ , выделяют область возмущенного движения. Фронт головной волны определяется по резкому сгущению линий давления. В начальные моменты отраженная волна сильно размазана, так как количество расчетных точек по вертикали в области возмущенного движения газа еще невелико и сравнимо с числом точек ( $\sim 4 \div 5$ ), обычно за-

нимаемых ударной волной в численных расчетах. Из представленных на фиг. 1, а, б изобар видно, что реализуется нерегулярное отражение ударной волны. С течением времени ударная волна продвигается вперед; при этом начинают формироваться основные элементы стационарного обтекания — скачки уплотнения на передней и задней кромке и веер расширения в средней угловой точке профиля.

Наконец, при достаточно большом значении времени ( $t \approx 3$ ) устанавливается стационарное обтекание ромбовидного профиля потоком газа с числом  $M_\infty = 1.5$  (фиг. 1, в). На фиг. 1, в хорошо видны скачки уплотнения, волна расширения Прандтля — Майера и взаимодействие скачка уплотнения с веером расширения (искривле-



Фиг. 1

Фиг. 2

ние линий веера). Пунктирной линией показано точное положение скачка уплотнения, рассчитанное по газодинамическим таблицам; линии равных давлений, образующие скачок, практически параллельны ему. Из этого же графика можно судить о «толщине» численно полученного скачка уплотнения. Она, естественно, может быть уменьшена путем уменьшения шага по координатам.

Следует также отметить, что размывание скачка по координате неизбежно влечет за собой размывание по времени картины течения, определяя тем самым некоторое характерное собственное время установления. Поэтому даже в окрестности носика профиля, где давление должно устанавливаться практически мгновенно, в численном расчете оно устанавливается в течение некоторого конечного промежутка времени. Характерное время установления в основном определяется величиной координатного шага и уменьшается вместе с уменьшением последнего.

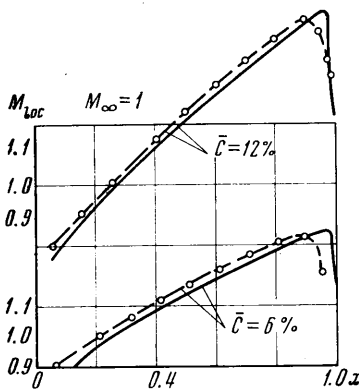
Было проведено сравнение полученных численно результатов стационарного обтекания ромбовидного 20% профиля потоком газа с числом  $M_\infty = 1.5$  с точными, рассчитанными по газодинамическим таблицам. Результаты сравнения сведены в таблицу.

	Сжатие потока $0 \leq x \leq 0.5$			Разрежение потока $0.5 < x \leq 1$		
	теоретическое значение	численный расчет	погрешность	теоретическое значение	численный расчет	погрешность
$p_T$	1.835	$1.83 \div 1.80$	$0.1 \div 1.9\%$	0.556	0.560	0.8%
$\rho_T$	1.532	$1.52 \div 1.50$	$0.06 \div 2.1\%$	0.635	0.61	4%

Величины  $p_T$  и  $\rho_T$  означают соответственно давление и плотность на поверхности профиля.

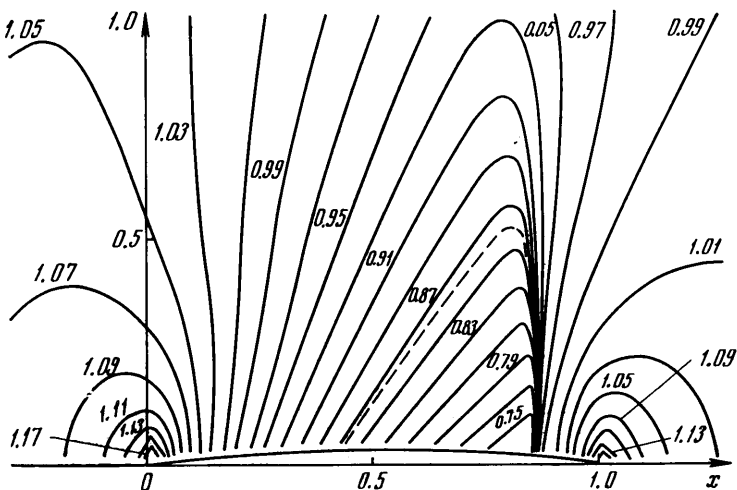
Из таблицы видно, что численные значения давления на поверхности отличаются на  $0.1 \div 2\%$ ; ошибка в значении плотности несколько больше и в некоторых точках профиля может достигать  $2 \div 4\%$ . Отметим, что максимальные погрешности, приведенные в таблице, соответствуют угловым точкам профиля  $x = 0.5$  и  $x = 1$ .

В случае обтекания гладкого профиля (рассматривался симметричный чечевицеобразный профиль) сверхзвуковым потоком газа погрешности еще меньше ( $\approx 1\%$ ).



Фиг. 3

Устранить эти трудности можно, переходя к нестационарной задаче. Именно так задача об обтекании гладкого профиля трансзвуковым потоком газа была решена в [5] конечно-разностным методом, близким к рассмотренному в [8]. Численное решение задачи о трансзвуковом обтекании несимметричного гладкого профиля рассмотрено в [7]. Для применяемых в [5] и [7] численных методов расчета весьма существенно условие гладкости профилей. Используемый в данной работе метод С. К. Годунова, как показали расчеты, применим для решения задачи трансзвукового обтекания как гладких профилей, так и с угловыми точками. Проиллюстрируем это на примере ромбовидного профиля с



Фиг. 4

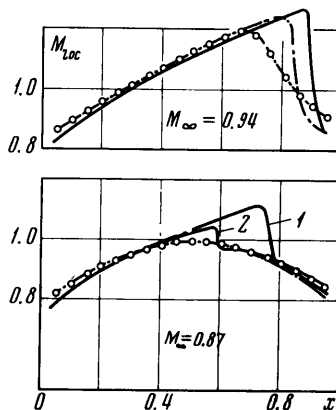
толщиной  $\bar{c} = 20\%$ . Стационарное решение будем получать из нестационарной задачи дифракции ударной волны на профиле; рассмотрим поток за ударной волной с числом Маха  $M_\infty = 0.8$ . На фиг. 2, а, б, в приведены линии равных давлений в поле потока около тела в различные моменты времени. Видно, как после прохождения по телу головной волны возникают области с дозвуковым и сверхзвуковым потоком; пунктирная кривая соответствует звуковой линии. Видно также, как возникает скачок уплотнения, замыкающий сверхзвуковую зону. Процесс дифракции заканчивается установлением обтекания профиля трансзвуковым потоком газа (фиг. 2, в).

Обтекание гладкого профиля трансзвуковым потоком газа целесообразно рассмотреть на примере чечевицеобразного профиля с целью сравнения полученных численных решений с известными экспериментальными [8] и численными [5] результатами.

Рассмотрим случай обтекания чечевицеобразного профиля звуковым потоком газа  $M_\infty = 1$ . На фиг. 3 приведено распределение местного числа Маха  $M_{loc}$  на поверхности профиля с толщиной соответственно  $\bar{c} = 6\%$  и  $\bar{c} = 12\%$ . Здесь же для сравнения нанесены экспериментальные результаты [8]. Совпадение численных результатов с экспериментальными достаточно хорошее, в пределах  $2 \div 3\%$ . Следует отметить некоторое расхождение в положении скачка уплотнения — он находится в численном решении практически на задней кромке, а по экспериментальным данным — немного смещен вперед.

Рассмотрим теперь случай дозвукового обтекания чечевицеобразного профиля с образованием местных сверхзвуковых зон. На фиг. 4 приведено поле давлений около профиля при  $M_\infty = 0.88$  и  $\bar{c} = 6\%$ . Пунктирная линия соответствует условию  $M_{loc} = 1$  и разграничивает области дозвукового и сверхзвукового потока. Сверхзвуковая зона заканчивается скачком уплотнения, получающегося в численном решении в виде резкого сгущения изобар.

На фиг. 5 приведено распределение местного числа Маха для двух значений  $M_\infty = 0.94$  и  $0.87$  при относительной толщине чечевицеобразного профиля  $\bar{c} = 6\%$ . В работе [8] экспериментально было найдено, что для этого профиля число Маха  $M_\infty = 0.87$  является критическим. При численном расчете обтекания профиля с числом  $M_\infty$ , близким к критическому числу Маха, было обнаружено заметное влияние верхнего граничного условия рассчитываемой области (стенки математической трубы) на положение и интенсивность скачка уплотнения. Сплошная кривая 1 на фиг. 5 соответствует граничному условию второго типа, кривая 2 — граничному условию, приближенно соответствующему условию на свободной поверхности ( $p = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $u = u_\infty$ ,  $v = 0$  при  $H = 1$ ). На фиг. 5 штрихпунктирной кривой нанесены численные результаты работы [5] (профиль в спутной струе), а также экспериментальные результаты [8]. Из сравнения приведенных кривых видно, что в дозвуковой части течения совпадение результатов достаточно хорошее. Местоположение скачка и его интенсивность оказываются заметно различными при различных граничных условиях и при расчете разными методами, что свидетельствует о более сильном влиянии граничных условий на поле потока вблизи тела при трансзвуковом режиме обтекания. Наблюдается также некоторое различие в экспериментальных и численных результатах в сверхзвуковой части течения в области скачка уплотнения, где, по-видимому, существенную роль играют диссипативные процессы, связанные с вязкостью.



Фиг. 5

## ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. сб., 1959, т. 47, вып. 3, стр. 271—306.
  2. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отходящей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
  3. Русанов В. В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 2.
  4. Butler T. D. Numerical calculations of the transient loading of blunt obstacles by shocks in air. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 3.
  5. Лифшиц Ю. Б. О расчете трансзвукового обтекания симметричного профиля в свободной струе. Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 1, стр. 52—56.
  6. Русанов В. В. Расчет и исследование многомерных течений газа методом конечных разностей. Докторская диссертация, М., 1968.
  7. Magnus R., Yoshihara H. Inviscid transonic flow over airfoils. AIAA paper, 1970, No. 47.
  8. Michel R., Marchaud F., Le Gallo J. Etude des écoulements transsoniques autour des profils écuticulaires à incidence nulle. ONERA Publ., 1953, No. 65.
-