

УДК 538.4:532.516

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

А. М. САГАЛАКОВ, В. Н. ШТЕРН

(Новосибирск)

Формулируется аналог задачи Орра для магнитогиродинамических течений. Рассматриваются произвольные трехмерные возмущения, удовлетворяющие уравнениям неразрывности. Установлено, что непосредственное взаимодействие возмущений магнитного поля и поля скоростей не может увеличить энергетическую оценку критического числа Рейнольдса. В частном случае малых магнитных чисел Рейнольдса проведены численные расчеты для течения Гартмана и модифицированных течений Куэтта. Минимальное значение  $R$  достигается на возмущениях с волновым вектором, перпендикулярным вектору скорости основного потока.

В последнее время в связи с работами Серрина [1] и других исследователей возродился интерес к энергетической оценке устойчивости ламинарных течений. Впервые такие оценки для простейших течений были проделаны Орром [2], который, однако, ограничился рассмотрением возмущений специального вида. Как было отмечено Тейлором [3], это обстоятельство делало оценки нестрогими. Энергетический метод в постановке Серрина позволяет получить точную нижнюю границу чисел Рейнольдса, вплоть до которой энергия произвольного возмущения, внесенного в ламинарный поток, монотонно убывает со временем. Такого рода исследования представляют интерес, хотя и дают в большинстве случаев оценки критических чисел Рейнольдса значительно ниже экспериментальных.

1. Уравнение для энергии произвольного возмущения, внесенного в ламинарный магнитогиродинамический поток, имеет вид (см., например, [4]).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (v_i v_i + A h_i h_i) d\Omega = \int (A h_i h_j - v_i v_j) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} d\Omega - \frac{1}{R} \int \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega + \\ + A \int h_i v_j \left( \frac{\partial H_j}{\partial x_i} - \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \right) d\Omega - \frac{A}{R_m} \int \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} d\Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$R = \frac{L_0 V_0}{\nu}, \quad R_m = \frac{4\pi\sigma L_0 V_0}{c^2}, \quad A = \frac{H_0^2}{4\pi\rho V_0^2}$$

Здесь все переменные даны в безразмерной форме;  $V_i$ ,  $H_i$  — компоненты векторов скорости и напряженности магнитного поля в основном потоке;  $v_i$ ,  $h_i$  — компоненты конечных возмущений соответствующих векторов;  $R$  — число Рейнольдса,  $R_m$  — магнитное число Рейнольдса;  $A$  — число Альфвена;  $V_0$  и  $H_0$  — характерные значения основной скорости и магнитного поля;  $L_0$  — характерный размер области течения;  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $\delta$  — соответственно плотность, кинематическая вязкость, проводимость. Интегрирование проводится по некоторому характерному объему, на поверхности которого возмущения обращаются в нуль. Если для заданного возмущения правая часть уравнения (1.1) меньше нуля, то его энергия монотонно убывает со временем. Вследствие присутствия диссипативных членов очевидно, что при достаточно малых  $R$  и  $R_m$  поток будет устойчив по отношению к любому возмущению.

Вариационную задачу можно сформулировать, например, так: при заданных  $A$  и  $R_m$  требуется найти минимальное число Рейнольдса, при ко-

тором правая часть (1.1) обращается в нуль для какого-нибудь возмущения. В этом случае имеем

$$R = \left\{ \int \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega \right\} \left\{ \int (Ah_i h_j - v_i v_j) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} d\Omega + \right. \quad (1.2)$$

$$\left. + A \int h_i v_j \left( \frac{\partial H_j}{\partial x_i} - \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \right) d\Omega - \frac{A}{R_m} \int \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} d\Omega \right\}^{-1}$$

Приведенное выражение для функционала  $R$  минимизируется на произвольных возмущениях  $v_i$ ,  $h_i$ , удовлетворяющих уравнениям неразрывности  $\partial v_i / \partial x_i = 0$ ,  $\partial h_i / \partial x_i = 0$  и граничным условиям.

Уравнения Эйлера — Лагранжа для этой вариационной задачи имеют вид

$$\frac{2}{R} \Delta v_i = v_j \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - Ah_j \left( \frac{\partial H_i}{\partial x_j} - \frac{\partial H_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{2}{R_m} \Delta h_i = -h_j \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) + v_j \left( \frac{\partial H_i}{\partial x_j} - \frac{\partial H_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа, а  $\lambda$  и  $\varphi$  — множители Лагранжа. Нетрудно убедиться в том, что уравнения Эйлера — Лагранжа сохраняют вид, если минимизировать  $R_m$  при заданных  $R$  и  $A$  или максимизировать  $A$  при заданных  $R$  и  $R_m$ . Поскольку  $v_i$  и  $h_i$  должны удовлетворять однородным граничным условиям, получаем задачу на собственные значения для параметра, экстремум которого ищется.

Частный случай возмущений с  $h_i \equiv 0$  приводит к классической задаче Орра и, таким образом, присутствие возмущений магнитного поля не может увеличить значение  $R_*$  =  $\min R$  по  $v_i$  и  $h_i$ . Увеличение  $R_*$  может быть достигнуто только за счет деформации основного профиля скорости стационарным магнитным полем. Аналогично в случае экстремальной задачи на  $R_m$  существует частное решение с  $v_i \equiv 0$ . Поэтому присутствие возмущений скорости не может увеличить  $R_{m*}$ . При  $v_i \equiv 0$  уравнения (1.3) примут вид

$$\frac{2}{R_m} \Delta h_i = -h_j \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.4)$$

Если течение таково, что  $V_i(x_j) = V_i(-x_j)$  и граничные условия для  $h_i(-x_j)$  совпадают с граничными условиями для возмущений скорости  $v_i(x_j)$ , то задача (1.4) вполне аналогична задаче Орра. Таким образом, в этом случае  $R_{m*} = R_*$ .

Если формулируется экстремальная задача на величину числа Альфвена, то как  $h_i$ , так и  $v_i$  должны быть отличны от нуля для существования нетривиального решения.

В случае

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j} - \frac{\partial H_j}{\partial x_i} \equiv 0$$

система (1.3) расщепляется на две независимых системы для возмущений скорости  $v_i$  и поля  $h_i$ . Когда задача для  $h_i$  инвариантна относительно преобразования  $x_i \rightarrow -x_i$ , то она совпадает с задачей для  $v_i$ .

2. Далее будут рассматриваться плоскопараллельные основные течения:

$$V_x = U(y), \quad V_y = V_z = 0, \quad H_x = P(y), \quad H_y = H_0 = \text{const}, \quad H_z = F(y)$$

После фурье-преобразования по  $x$  и  $z$ -координатам уравнения Эйлера—Лагранжа примут вид

$$\begin{aligned} \frac{2}{R}(u'' - k^2u) &= vU' - AhP' + iw\lambda, & \frac{2}{R}(w'' - k^2w) &= -AhF' + i\beta\lambda \\ \frac{2}{R}(v'' - k^2v) &= uU' + ApP' + AfF' + \lambda' & i\alpha u + i\beta w + v' &= 0 \\ \frac{2}{R_m}(p'' - k^2p) &= -hU' + vP' + i\alpha\varphi, & \frac{2}{R_m}(f'' - k^2f) &= vF' + i\beta\varphi \\ \frac{2}{R_m}(h'' - k^2h) &= -pU' - uP' - wF' + \varphi', & i\alpha p + i\beta f + h' &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $u, v, w, p, h, f$  — фурье-образы соответствующих компонент вектора скорости и вектора напряженности магнитного поля,  $\lambda$  и  $\varphi$  — фурье-образы лагранжевых множителей,  $\alpha = k_x$ ,  $\beta = k_y$  — волновые числа,  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ . Штрих означает дифференцирование по  $y$ . Заметим, что хотя формально сумма порядков в системе (2.1) равна четырнадцати, (2.1) легко приводится к системе уравнений двенадцатого порядка.

Задача на собственные значения, которая формулируется после добавления к (2.1) граничных условий для  $u, \dots, f$  имеет чисто вещественный спектр. Действительно, умножая первые шесть уравнений последовательно на  $u^*, \dots, f^*$  (звездочка означает комплексное сопряжение), суммируя их и интегрируя по  $y$ , получаем с учетом уравнений неразрывности и граничных условий

$$\begin{aligned} &\frac{1}{R} \int [ |u'|^2 + |v'|^2 + |w'|^2 + k^2(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2) ] dy + \\ &+ \frac{A}{R_m} \int [ |p'|^2 + |h'|^2 + |f'|^2 + k^2(|p|^2 + |h|^2 + |f|^2) ] dy = \\ &= \text{Re} \int (Aph^* - uv^*)U'dy + A \text{Re} \int [(uh^* - vp^*)P' + (wh^* - vf^*)F'] dy \end{aligned} \quad (2.2)$$

В (2.2) все коэффициенты при  $R, R_m$  и  $A$  вещественны, следовательно, спектр собственных значений для всех трех рассматриваемых экстремальных задач будет чисто вещественным.

Из (2.1) видно, что если задача на собственные значения имеет решение при некоторых  $\alpha, \beta, u, \dots, f$ , то существует решение для  $-\alpha, -\beta, u^*, \dots, f^*$  с тем же собственным значением, если граничные условия инвариантны относительно этого преобразования. Когда  $F' \equiv 0$ , дополнительно наряду с решением  $\alpha, \beta, u, \dots, f$  существует решение  $-\alpha, \beta, u^*, v^*, -w^*, p^*, h^*, -f^*$  с тем же собственным значением. В последнем случае достаточно ограничиться исследованием первого квадранта плоскости  $(\alpha, \beta)$ .

3. Непосредственное взаимодействие возмущений магнитного поля и поля скоростей не может увеличить энергетическую оценку  $R_*$ . Она может возрасти только за счет деформации стационарным магнитным полем

профиля скорости основного потока. В этом смысле наибольший интерес представляет случай поперечного магнитного поля при малых  $R_m$ . Тогда система (2.1) упрощается до системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{2}{R}(u'' - k^2u) &= vU' + i\alpha\lambda, & \frac{2}{R}(w'' - k^2w) &= i\beta\lambda \\ \frac{2}{R}(v'' - k^2v) &= uU' + \lambda' & i\alpha u + i\beta w + v' &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Таким образом приходим к задаче Орра. Влияние магнитного поля сказывается только через форму профиля  $U$ . Здесь также достаточно ограничиться исследованием первого квадранта плоскости  $(\alpha, \beta)$ . Исключая  $\lambda$  из (3.1), получаем задачу на собственные значения, которая численно исследовалась

$$\begin{aligned} v^{IV} - 2k^2v'' + k^4v + \frac{i\alpha R}{2}(U'v' + U''v) &= -\frac{k^2R}{2}uU' \\ u'' - k^2u &= \frac{R}{2}vU' + \frac{i\alpha}{k^2}(v''' - k^2v') - \frac{\alpha^2R}{2k^2}vU' \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$(-1 \leq y \leq 1)$$

$$u = v = v' = 0, \quad \text{при } y = \pm 1$$

Систему (3.2) можно свести к одному уравнению

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \left[ \frac{1}{U'} \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 v + ikR \cos \theta \left( v' + \frac{1}{2} v \frac{U''}{U'} \right) \right] + \\ + \frac{k^2 R^2 \sin^2 \theta}{4} U' v = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$v = v' = 0, \quad v^{IV} - 2k^2v'' = 0 \quad \text{при } y = \pm 1$$

Здесь введен в рассмотрение угол  $\theta$  между волновым вектором возмущения и направлением скорости основного потока. При этом  $\alpha = k \cos \theta$ ,  $\beta = k \sin \theta$ . Отметим, что наряду с каждым собственным значением  $R$  и собственной функцией  $v$  существует и собственное значение  $-R$  с собственной функцией  $v^*$ . Следовательно, экстремальная задача сводится к отысканию минимума модуля собственного значения по  $k$  и  $\theta$ .

Полезно выяснить асимптотические свойства собственных значений задачи (3.3) при больших и малых  $k$ . В случае малых  $k$ , пренебрегая членами, содержащими  $k$  и не содержащими  $R$ , получим из (3.3)

$$\left[ \frac{1}{U'} v^{IV} + ikR \cos \theta \left( v' + \frac{1}{2} \frac{U''}{U'} v \right) \right]'' + \frac{k^2 R^2 \sin^2 \theta}{4} U' v = 0 \quad (3.4)$$

$$v = v' = v^{IV} = 0 \quad \text{при } y = \pm 1$$

Легко видеть, что после замены  $R_+ = Rk$  в (3.4) задача на собственные значения для  $R_+$  не будет зависеть от  $k$ . Итак, при малых  $k$  имеет место асимптотическая зависимость

$$R = R_+(\theta)/k \quad (k \ll 1) \quad (3.5)$$

При больших  $k$  проведем преобразование  $R = R^+k$ ,  $y_+ = ky$  и затем будем считать, что  $k \rightarrow \infty$ . Тогда (3.3) запишется так:

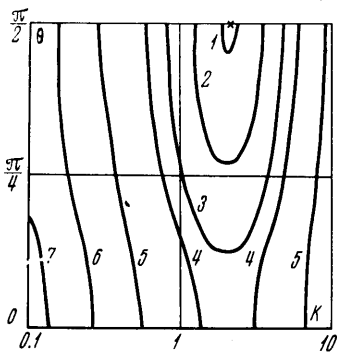
$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2}{dy_+^2} - 1 \right) \left[ \frac{1}{U'(y_+)} \left( \frac{d^2}{dy_+^2} - 1 \right)^2 v(y_+) + \right. \\ & \left. + iR^+ \cos \theta \left( v'(y_+) + \frac{1}{2} \frac{U''(y_+)}{U'(y_+)} v(y_+) \right) \right] + \\ & \quad + \frac{R^{+2} \sin^2 \theta}{4} U'(y_+) v(y_+) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$v(y_+) = v'(y_+) = 0, \quad v^{IV}(y_+) - 2v''(y_+) \\ \text{при } y_+ = \pm \infty$$

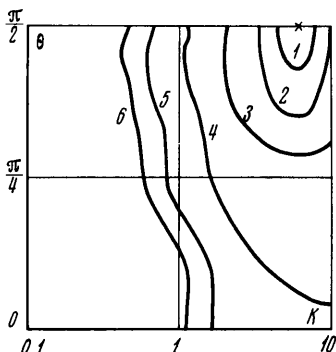
Из (3.6) ясно, что асимптотическая зависимость при больших  $k$  имеет вид

$$R = R^+(\theta)k \quad (k \gg 1) \quad (3.7)$$

При наличии поперечного магнитного поля все магнитогидродинамические профили скорости (течение Гартмана, модифицированное течение Куэтта и другие) при больших значениях числа Гартмана  $G = \sqrt{ARR_m}$  вырождаются в однородные с экспоненциальным пристенным пограничным слоем. Вводя преобразования  $k = k_1G$ ,  $R = R_1G$ ,  $y = y_1/G$  в (3.3) и устремляя величину  $G$  к бесконечности, получаем задачу на собственные



Фиг. 1



Фиг. 2

значения для  $R_1$ , решение которой зависит только от величин  $k_1$  и  $\theta$ . Отсюда ясно, что для критических параметров имеют место асимптотические зависимости

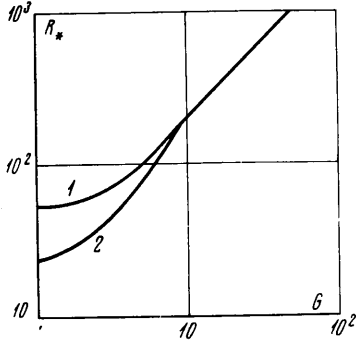
$$R_* = aG, \quad k_* = bG \quad (a, b = \text{const}) \quad (3.8)$$

Численные расчеты собственных значений проводились в диапазоне волновых чисел  $k \sim G$  между областями справедливости асимптотических зависимостей (3.5) и (3.7) и обрывались, когда расчетные данные выходили из них. Использовался метод дифференциальной прогонки [5], что позволило избежать трудностей, связанных с появлением малого параметра при старшей производной в случае больших величин  $R$ . Если  $U'$  внутри интервала интегрирования обращается в нуль, то эта точка при больших  $R$  является аналогом критической точки в линейной теории гидродинамической устойчивости (т. е. точки, где фазовая скорость возмущения совпадает с местной скоростью потока). Численные расчеты проводились на БЭСМ-6. Собственные значения находились с тремя верными значащими цифрами.

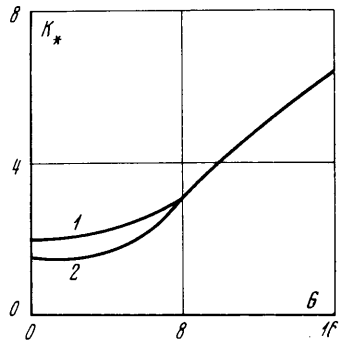
4. Был проведен энергетический анализ устойчивости течения Гартмана

$$U = \frac{\text{ch } G - \text{ch } Gy}{\text{ch } G - 1} \quad (-1 \leq y \leq 1) \quad (4.1)$$

В случае малых  $G$  профиль скорости вырождается в параболу Пуазейля. Расчет устойчивости течения Пуазейля служил контролем для используемого численного метода. На фиг. 1 представлены линии уровня первого собственного значения  $R$  для течения Пуазейля в плоскости  $k\theta$ . Кривые 1, ..., 7 соответствуют значениям  $R = 50, 60, 80, 100, 200, 400, 800$ . Минимальное  $R$  оказалось равным 49,6, что совпало с расчетами [6, 7]. Величина  $R_*$  достигается на возмущении, волновой вектор которого перпендикулярен скорости основного течения ( $\theta_* = 1/2\pi$ ). Положение минимума  $R$  на плоскости  $k\theta$  отмечено крестиком. Для двумерных возмущений ( $\theta = 0$ ) рассчитанное минимальное число Рейнольдса равно 87,6, что согласуется с результатом, полученным Орром. Асимптотические зависимости (3.5), (3.7) хорошо выполняются уже при  $k < 1$  и  $k > 5$  соответственно. Отметим, что для течения Пуазейля минимальное значение  $R$  на лучах  $\theta = \text{const}$  для всех  $\theta$  находится при одном и том же значении  $k$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

С ростом  $G$  картина линий уровня деформируется следующим образом: область минимума смещается в сторону больших  $k$  в соответствии с зависимостью (3.8), причем в области минимума образуется своеобразное плато на плоскости  $k\theta$ ; линии уровня приобретают более сложный вид по сравнению со случаем течения Пуазейля. На фиг. 2 представлены линии уровня для  $G = 15$ . При этом  $R_* = 292$ ,  $k_* = 6.01$ . Линии 1, ..., 6 соответствуют значениям  $R = 300, 320, 400, 600, 1000, 1400$ .

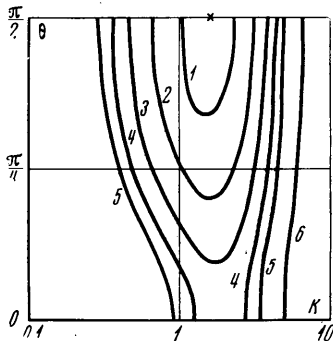
Расчеты зависимостей  $R_*(G)$  и  $k_*(G)$  были проведены в диапазоне  $0 \leq G \leq 25$ . Они представлены кривыми 1 соответственно на фиг. 3 и фиг. 4. Асимптотические зависимости (3.8) хорошо выполняются уже при  $G > 10$  и имеют вид

$$R_* = 19.5G, \quad k_* = 0.4G \quad (4.2)$$

Интересно сравнить полученный результат с данными экспериментальных исследований и линейной теории устойчивости: линейная теория [6, 9] —  $R_* = 50\,000G$ ,  $k_* = 0.16G$ ; эксперимент [10] —  $R_* = 225G$ . Как и следовало ожидать, результаты энергетического анализа занижают критические числа Рейнольдса, в то время как линейная теория завышает их. Отметим, что расхождение между энергетической оценкой и экспериментом меньше, чем между экспериментом и линейной теорией. Следует, однако, иметь в виду, что ни линейная теория, ни энергетическая оценка и не претендуют на расчет точных экспериментальных  $R_*$ , потому что первая анализирует только поведение бесконечно малых возмущений, а вторая ограничивается возмущениями с монотонным убыванием энергии во времени.

Расчеты были проведены также в случае модифицированного течения Куэтта

$$U = \text{sh } Gy / \text{sh } G \quad (-1 \leq y \leq 1) \quad (4.3)$$



Фиг. 5

При  $G \rightarrow 0$  имеем обычное плоское течение Куэтта. На фиг. 5 представлены линии уровня  $R$  при  $G = 0$ . Кривые 1, ..., 6 соответствуют значениям  $R = 23, 30, 40, 50, 60, 100$ . Найденные величины  $R_* = 20.6$  и  $k_* = 1.56$  совпадают с рассчитанными в [6]. Критические параметры для двумерных возмущений идентичны результатам Орра. С ростом числа Гартмана значение  $R_*$  монотонно возрастает.

Рассчитанные зависимости  $R_*(G)$  и  $k_*(G)$  представлены соответственно на фиг. 3 и фиг. 4 кривыми 2. Естественно, что и в этом случае асимптотическая зависимость имеет вид (4.2). Сравнивая эти данные с результатами расчетов критических чисел Рейнольдса по линейной теории [9, 11], отмечаем, что энергетический подход в отличие от линейной теории не дает эффекта дестабилизации течения магнитным полем. Экспериментальных данных по этому вопросу нет.

В магнитной гидродинамике имеется решение, соответствующее еще одной модификации Куэтта [12]. Профиль скорости при этом является асимметричной функцией  $y$  и совпадает с (4.3), если граничные условия прилипания для скорости ставятся при  $y = -1$  и  $y = 0$ . Задача устойчивости будет отличаться от рассмотренной выше постановкой дополнительного граничного условия прилипания на оси канала. Имея в виду именно такую трактовку задачи и оставляя прежними единицы измерения, найдем, что поведение зависимостей  $R_*(G)$  и  $k_*(G)$  слабо отличается от случая антисимметричного течения Куэтта, в частности в области «средних»  $G^2$  значения  $R_*$  получаются несколько более высокими (например, при  $G = 5.85$   $R_* = 136$ , в то время как для антисимметричного течения  $R_* = 101$ ). В предельных же случаях  $G \rightarrow 0$  и  $G \rightarrow \infty$  имеется полное совпадение.

Характерной особенностью всех рассмотренных задач является тот факт, что минимальное значение  $R$  достигается на возмущениях с волновым вектором, перпендикулярным вектору скорости основного потока ( $\theta = \pi/2$ ).

Поскольку при заданных  $k, \theta$  существует счетный спектр собственных значений  $R$ , то необходимо проверить, что минимальное собственное значение  $R_*$  является наименьшим и по спектральному номеру. В данных расчетах такая проверка проводилась для рассмотренных течений при различных  $G$ . Кроме того, для течения Пуазейля была рассчитана зависимость  $R_2(k, \theta)$ , для второго спектрального номера. Во всем диапазоне  $k, \theta$  оказалось, что  $R_2 > R_1$ . Для симметричных профилей скорости первый и второй спектральные номера соответствуют разным условиям симметрии собственной функции. При  $G \gg 1$ , как и в случае линейной теории, собственные значения, соответствующие симметричным и антисимметричным возмущениям, асимптотически сближаются.

В заключение отметим, что, хотя расчеты проводились для магнитогидродинамических течений, формулы (4.2) останутся справедливыми после простых преобразований и для течения в пограничном слое с отсосом.

Авторы благодарят М. А. Гольдштика за внимание к работе.

Поступило 2 XI 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Serrin J. On the stability of viscous fluid motions. Arch. Ration. Mech. Analysis, 1959, vol. 3, No. 1.
2. Orr W. McF. The stability or instability of the steady motions of liquid. Proc. Roy. Irish. Acad., Ser. A, 1907, vol. 27.
3. Taylor G. J. Stability of a viscous liquid, contained between two rotating cylinders. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 1923, vol 233.
4. Vetchov R., Crimiale W. The stability of parallel flows. New York — London. Acad. Press, 1967.
5. Сапожников В. А. Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки. Труды Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости (II), Новосибирск, «Наука», СО АН СССР, 1969.
6. Busse F. H. Bounds on the transport of mass and Momentum by Turbulent flow between parallel Plates. Z. angew. Math. Phys., 1969, vol. 20, No. 1.
7. Joseph D. D., Carmi S. Stability of Poiseuille flow in pipes, annuli und channels. Quart. Appl. Math., 1969, vol. 26, No. 4.
8. Lock R. C. The stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field. Proc. Roy. Soc., A. 1955, vol. 233, No. 1192.
9. Сагалаков А. М., Штерн В. Н. Устойчивость плоскопараллельных магнитогидродинамических течений в поперечном магнитном поле. ПМТФ, 1970, № 3.
10. Брановер Г. Г. Турбулентные магнитогидродинамические течения в трубах. Рига, «Зинатне», 1967.
11. Kakutani T. The hydrodynamic stability of the modified plane Couette flow in the presence of transverse magnetic field. J. Phys. Soc. Japan, 1964, vol. 19, № 6.
12. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.