УДК 533.6.011.8:621.41.6

О ГАЗОВЫХ СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ВРАЩАЮЩИЕСЯ В ВАКУУМИРОВАННЫХ ПОЛОСТЯХ ШАРОВЫЕ И ДИСКОВЫЕ РОТОРЫ

В. П. ИВАНОВ, Н. К. ШАВИНА

(*Горький*)

Из соображений подобия и симметрии получены формулы для расчета газовых сил и их моментов, действующих на шаровой и дисковый роторы, вращающиеся в сильно разреженной газовой среде в шаровой и цилиндрической полостях соответственно. Коэффициенты этих формул вычислены на ЭВМ; способ расчета основан на математическом моделировании случайного движения молекул газа [1]. Шаровой ротор неустойчив по отношению к смещениям вдоль оси вращения: при «поперечных» отклонениях возникает восстанавливающая сила с противоположной отклонению составляющей. В цилиндрических полостях малой высоты газовые силы стремятся совместить ось диска с осью полости; этот эффект уменьшается при увеличении высоты полости.

1. О подобии свободно-молекулярных течений газа. Свободно-молекулярное течение газа описывается уравнением Больцмана и соответствующими начальными и граничными условиями. Уравнение Больцмана принимает в этом случае вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{X_i}{m}\frac{\partial f}{\partial \xi_i}=0 \qquad (1.1)$$

Здесь $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ — функция распределения молекул газа по скоростям, зависящая от времени, координат и скоростей молекул, $\mathbf{X}$ — сила, действующая на молекулу, m — масса молекулы. На стенках задается функция $W(t, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}')$ плотности распределения вероятностей скоростей $\boldsymbol{\nu}'=\boldsymbol{\xi}'-\mathbf{v}$ молекул, отраженных стенкой, причем до соударения молекулы двигались со скоростью $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\xi}-\mathbf{v}$ относительно стенки, где $\mathbf{v}$ — скорость стенки. В единицу времени на единицу площади стенки со скоростью $\boldsymbol{\xi}\div\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi}$ приходит поток молекул, равный $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{v})\mathbf{n}d\boldsymbol{\xi}$. Тогда

$$f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}')=-\int\limits_{(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{v})\mathbf{n}<0} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\,W(t, \boldsymbol{\xi}-\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}'-\mathbf{v})\,\frac{(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{v})\,\mathbf{n}}{(\boldsymbol{\xi}'-\mathbf{v})\,\mathbf{n}}\,d\boldsymbol{\xi} \qquad (1.2)$$

где n — нормаль к стенке. В стенках могут быть отверстия, соединяющие рассматриваемый объем с соседними, на поверхности которых задается поток молекул, входящих в рассматриваемый объем

$$f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\,(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n})=f_1(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \qquad (1.3)$$

Начальные условия запишутся в виде

$$f(t_0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})=f_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \qquad (1.4)$$

Функции f_1 и f_2 заданы.

Для полного описания системы достаточно задать характерные величины размеров L и скорости V стенок, концентрации N и скорости U молекул газа, времени θ.

Следуя [2], перейдем в формулах (1.1) — (1.4) к безразмерным переменным

$$\langle t\rangle=t/\theta,\quad \langle x_i\rangle=x_i/L,\quad \langle v_i\rangle=v_i/V,\quad \langle\xi_i\rangle=\xi_i/U,\quad \langle X_i\rangle=X_i/X$$

С учетом соотношений $\langle W\rangle = WU^3$ и $\langle f\rangle = f/\Phi$, где $\Phi = Nu^3$, получаемых соответственно из условий нормировки

$$\int W(\mathbf{v}, \mathbf{v}')d\mathbf{v}' = 1, \qquad \int f\,dx\,d\xi \sim NL^3$$

соотношения (1.1) — (1.4) запишутся в виде (скобки у безразмерных величин опущены)

$$\frac{L}{U\theta}\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{XL}{mU^2}X_i\frac{\partial f}{\partial \xi_i} = 0 \tag{1.5}$$

$$f(t, \mathbf{x}, \xi') = -\int\limits_{(\xi-\mathbf{v})\,\mathbf{n}>0} f(t, \mathbf{x}, \xi)\,W\left(t, \frac{U}{V}\xi - \mathbf{v}, \frac{U}{V}\xi' - \mathbf{v}\right) \times$$
$$\times\left(\frac{U}{V}\xi - \mathbf{v}\right)\mathbf{n}\left[\left(\frac{U}{V}\xi' - \mathbf{v}\right)\mathbf{n}\right]^{-1}d\xi \tag{1.6}$$

$$f(t, \mathbf{x}, \xi)(\xi\cdot n) = \frac{f_1}{\Phi U} \tag{1.7}$$

$$f(t_0, \mathbf{x}, \xi) = \frac{f_2}{\Phi} \tag{1.8}$$

Уравнения (1.5) — (1.8) одинаковы для различных газовых систем, если одинакова геометрия этих систем, равны начальные функции распределения молекул газа по скоростям и координатам, а также одинаковы числа Струхаля $\mathrm{Sh} = L/U\theta$ и Фруда $\mathrm{Fr} = mU^2/XL$, отношения U/V и относительные потоки газа, поступающего в систему.

Для подобия стационарных свободномолекулярных потоков в отсутствие массовых сил необходимо подобие условий на границах потока и постоянство отношения U/V. Это утверждение справедливо и для периодических потоков, если для задания периодичности достаточно задания характерных размера и скорости стенок (например, в случае вакуумных механических турбомолекулярных насосов).

Главный вектор $\mathbf{F}$ газовых сил, действующих на стенку, равен импульсу, переносимому молекулами газа на поверхность σ стенки в единицу времени

$$\mathbf{F} = m\int\limits_{\sigma}\left\{\int \xi(\xi n)f(\mathbf{x}, \xi)d\xi - \xi'(\xi' n)f(\mathbf{x}, \xi')d\xi'\right\}d\sigma \tag{1.9}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к $d\sigma$ (формула записана для стационарного режима).

Пусть величина $F = F_0$ вычислена для подобной газовой системы, описываемой характерными параметрами L_0, V_0, N_0, m_0. Переходя в формуле (1.9) к безразмерным переменным, подставляя

$$L = lh_0, \qquad V = vV_0, \qquad N = nN_0, \qquad m = \mu m_0 \tag{1.10}$$

можно получить с учетом соотношения $f = nv^{-3}f_0$ формулу подобия для вектора газовых сил

$$\mathbf{F} = \mu n v^2 l^2 \mathbf{F}_0 \tag{1.11}$$

Аналогичную формулу можно получить для момента сил

$$M = \mu n v^2 l^3 M_0 \tag{1.12}$$

2. Исходные соотношения. При медленных перемещениях ротора в полости, когда характерное время изменения положения и скорости вращения ротора намного превышает время $\tau \sim L/U_0$ релаксации сильно разреженного газа, поток газа квазистационарен, газовые силы определяются положением и скоростью ротора в тот же момент времени, и движение ротора описывается уравнениями механики, например, уравнениями Эйлера [3].

В случае малых линейных и угловых отклонений ротора от состояния равномерного вращения в центре полости выражения газовых сил и их моментов можно представить в виде ряда и ограничиться линейными членами

$$F_\alpha = F_{0\alpha} + \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_k}\right)_0 x_k + \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{x}_k}\right)_0 \dot{x}_k \tag{2.1}$$

$$M_\alpha = M_{0\alpha} + \left(\frac{\partial M_\alpha}{\partial x_k}\right)_0 x_k + \left(\frac{\partial M_\alpha}{\partial \dot{x}_k}\right)_0 \dot{x}_k$$

где F_α, M_α — проекции главного вектора и главного момента газовых сил на координатные оси, x_k — составляющие линейного и углового смещений ротора относительно полости.

Ниже исследована зависимость сил и их моментов только от величин смещений. Коэффициенты $(\partial F/\partial x_k)_0$ выражений (2.1) вычислялись на ЭВМ, методика вычислений описана в работе [1] и основана на моделировании случайного движения молекул газа, в процессе которого определяется среднее воздействие молекул газа на ротор [1]. Для вычисления коэффициентов $(\partial F_\alpha/\partial x_k)_0$, $\alpha = 1, 2, 3$ при определенном $k = k_0$ движение молекул моделировалось в системе, в которой ротор, вращающийся с постоянной угловой скоростью, смещен относительно полости на малую величину x_{k_0}, а все остальные смещения равны нулю.

Аналогично коэффициенты $(\partial F_\alpha / \partial \dot{x}_k)_0$ можно вычислить при моделировании движения молекул в системе, где ротор вращается в центре полости и обладает дополнительной скоростью, равной $\dot{x}_k$.

С использованием соображений симметрии выражения для газовых сил и их моментов, действующих на шаровой ротор, можно записать в виде (ось z направлена вдоль оси вращения ротора)

$$F_x = \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_0 y, \qquad F_y = \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_0 y, \qquad F_z = \left(\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)_0 z$$

$$M_x = M_y = 0, \qquad M_z = M_{z0} \tag{2.2}$$

Например, в выражениях для F_x и M_x постоянные слагаемые $F_{x0} = M_{x0} \equiv 0$, так как в неотклоненном положении газовые силы вызывают только торможение вращения ротора. Слагаемые $(\partial F_x / \partial x)_0$, $(\partial M_x / \partial x)_0 x$ отсутствуют в силу выбора системы отсчета, в которой $x \equiv 0$. При смещении центра полости вдоль оси y газовые потоки (и газовые силы, действующие на поверхность ротора) симметричны относительно плоскости xy, следовательно, $F_z \equiv 0$, $(\partial M_x / \partial y)_0 = 0$, так как $M_x = yF_z = 0$. При смещении центра полости вдоль оси z из соображений симметрии $F_x = F_y \equiv 0$, так что $(\partial F_x / \partial z)_0 \equiv 0$; коэффициент $(\partial M_x / \partial z)_0 = 0$ в силу $M_x = zF_y \equiv 0$.

Воздействие газа на дисковый ротор рассчитывалось в случае, когда центры диска и цилиндрической полости совпадают. Из соображений симметрии можно получить

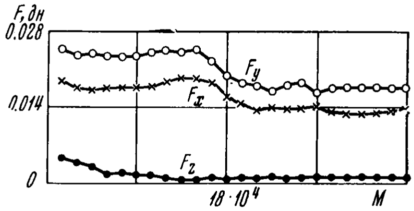
$$F_x = F_y = F_z = 0$$

$$M_x = \left(\frac{\partial M_x}{\partial \theta}\right)_0 \theta, \qquad M_y = \left(\frac{\partial M_y}{\partial \theta}\right)_0 \theta, \qquad M_z = M_{z0} \tag{2.3}$$

[1] Описание методики моделирования для сильно разреженного газа приведено также в работах [4–9].

Здесь ось x совпадает с линией узлов, θ — угол между осью цилиндра и осью ротора z.

3. Результаты расчета и обсуждение. Расчет выполнен для случая диффузного по закону косинусов отражения молекул стенками, нагретыми до одинаковой температуры. При диффузном отражении случайные скорости молекул после соударения распределены по максвелловскому закону и не зависят от скоростей молекул до соударения. Молекулы, рассеянные ротором, в дополнение к случайной тепловой скорости приобретают упорядоченную скорость, равную линейной скорости ротора в точке соударения. Время соударения молекул о стенки считалось пренебрежимо малым [10].



Фиг. 1

Коэффициенты выражений (2.2), (2.3) газовых сил и их моментов вычислены для различных относительных размеров полостей и скоростей роторов при определенных значениях характерных параметров, результаты вычислений приведены в таблицах. Методом интерполяции табличных значений можно определить значения коэффициентов для заданных относительных размеров полости и скорости ротора, после чего по формулам подобия (1.11) и (1.12) можно получить значения сил для заданной конкретной системы.

В табл. 1 приведены коэффициенты $\partial F_x / \partial y$, $\partial F_y / \partial y$, $\partial F_z / \partial z$, *дн/см*, а также M_{z0} в *дн·см* выражений (2.2) для газовых сил, действующих на шаровой ротор. Эти коэффициенты вычислены при различных относительных размерах R / r и скоростях v / ν ротора, где r, R — радиусы ротора и полости соответственно, ν — средняя тепловая скорость молекул газа, $v = 2\pi rf$, f — скорость вращения шара. Вычисления проведены при значениях характерных параметров, равных $L_0 = r = 0.5$ *см*, $V_0 = \nu = 475$ *м/сек*, $N_0 = 3.24\cdot10^{12}$ *моль/см*^{3}, $m_0 = 4.65\cdot10^{-23}$ *г* (полость заполнения азотом под давлением 10^{-4} *мм* рт. ст., температура стенок равна комнатной). В табл. 1 приведено также число M ударов молекул о поверхность ротора, которое было зафиксировано в процессе моделирования и характеризует точность вычислений. На фиг. 1 приведена типичная зависимость случайных значений F_x, F_y, F_z от времени моделирования, полученная в процессе вычислений при $R = 1$, $r = 0.5$, $v / \nu = 1.98$, $x = 0.3$, $y = 0.3$, $z = 0.2$.

Значения коэффициентов, приведенные в табл. 1, вычислены при смещениях центра полости, равных $\delta_0 = {}^1/_4(R - r)$. На фиг. 2 приведена зависимость сил от величины смещения δ, вычисленная для параметров шестого варианта табл. 1 при $\delta = \sqrt{y^2 + z^2}$, $y = z$. Эта зависимость мало отличается от линейной при любых смещениях ротора.

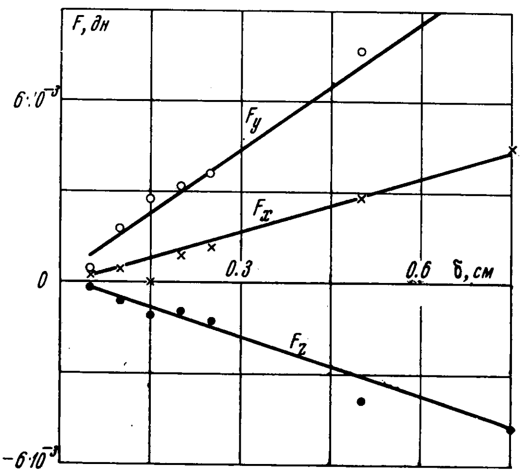
На фиг. 3 представлена зависимость случайных значений проекций M_x, M_y главного момента газовых сил от времени вычислений, полученная в процессе расчета второго варианта табл. 1 при $y = 0.0354$, $z = 0.0353$. Результаты расчета показывают, что для нахождения нелинейных коэффициентов выражений M_x, M_y, которые равны нулю в линейном приближении, требуется значительно повысить точность вычислений (ценой увеличения затрат машинного времени).

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6
R / r	1.4	1.4	1.4	2.0	2.0	2.0
v / ν	0.66	1.32	1.98	0.66	1.32	1.98
$\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_0$	0.10	0.07	—0.06	0.02	0.03	0.02
$\left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_0$	0.14	0.030	0.37	0.00	0.02	0.03
$\left(\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)_0$	—0.08	—0.10	—0.03	—0.02	—0.01	—0.0
M_{z_0}	—0.070	—0.150	—0.230	—0.064	—0.130	—0.200
M	$0.34\cdot10^6$	$0.34\cdot10^6$	$0.34\cdot10^6$	$0.34\cdot10^6$	$0.34\cdot10^6$	$0.34\cdot10^6$

В табл. 2 приведены значения коэффициентов $(\partial M_x / \partial\theta)_0$, $(\partial M_y / \partial\theta)_0$, в *дн·см*/*град*, M_{z0} в *дн·см* выражений (2.3) момента газовых сил, действующих на дисковый ротор. Коэффициенты вычислены для различных относительных размеров R/r, H/r и скоростей v/ν диска (r, R — радиусы диска и полости соответственно, H — высота полости, $v = 2\pi rf$) при значениях характерных параметров, равных $L_0 = r = 3.5$ *см*, $V_0 = \nu = 475$ *м/сек*, $N_0 = 3.24 \cdot 10^{12}$ *моль/см*^{3}, $m_0 = 4.65 \cdot 10^{-23}$ *г*, $\theta = 5°$.

Результаты расчета показали, что при уменьшении относительных размеров полости увеличиваются газовые силы, тормозящие вращение ротора. Это объясняется разбросом молекул по краям полости, где они наиболее интенсивно тормозят вращение ротора. С увеличением размеров полости возрастает длина пробега молекул газа от стенки к стенке, концентрация газа в полости выравнивается. Концентрация выравнивается еще и потому, что молекулы относительно реже сталкиваются с поверхностью ротора.



Фиг. 2

Когда размеры полости намного превышают размеры ротора, возмущающим действием ротора можно пренебречь и считать, что молекулы газа приходят на поверхность ротора с равномерной плотностью и обладают максвелловским распределением скоростей. В этом случае воздействие газа на ротор сводится только к торможению его вращения. Величину соответствующего момента M_z можно подсчитать путем суммирования воздействий молекул по поверхности ротора (при отражении от поверхности ротора каждая молекула получает средний импульс, равный mv, где v — линейная скорость ротора в точке соударения). Имеем

Таблица 2

	1	2	3	4	5	6	7
R/r	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43
H/r	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46
v/ν	0.046	0.093	0.14	0.19	0.23	0.28	0.37
$\left(\frac{\partial M_x}{\partial\theta}\right)_0$	−0.0098	−0.0080	−0.013	−0.011	−0.011	−0.030	−0.032
$\left(\frac{\partial M_y}{\partial\theta}\right)_0$	0.015	0.024	0.024	0.026	0.028	0.048	0.060
M_{z_0}	−0.55	−1.16	−2.06	−2.22	−2.82	−3.38	−4.44
M	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$

	8	9	10	11	12	13	14
R/r	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43
H/r	0.46	2.86	2.86	2.86	8.57	8.57	0.46
v/ν	0.46	0.14	0.28	0.46	0.14	0.28	1.99
$\left(\frac{\partial M_x}{\partial\theta}\right)_0$	−0.032	0.068	0.090	0.12	0.17	0.22	−0.04
$\left(\frac{\partial M_y}{\partial\theta}\right)_0$	0.096						0.10
M_{z_0}	−5.60	−1.74	−3.38	−5.80	−1.66	−3.21	−22.60
M	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$1.5 \cdot 10^5$

для шарового ротора

$$M_z = -{}^{16}/_3\pi^2 mnfr^4 \tag{3.1}$$

для дискового ротора

$$M_z = -2\pi^2 mnfr^4 \tag{3.2}$$

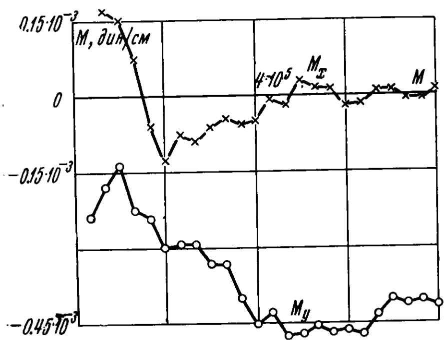
для цилиндрического ротора

$$M_z = -2\pi^2 mnfr^3(r+2h) \tag{3.3}$$

Здесь $n = {}^1/_4\nu_0 N_0 = 4.19\cdot 10^{16}$ — число ударов молекул о единицу поверхности стенки в единицу времени. Подставляя в формулу (3.1) параметры третьего варианта табл. 1, в формулу (3.2) — третьего варианта табл. 2, в формулу (3.3) — параметры системы, описанной в примере № 3 работы [1] ($f = 600$ *об/сек*), получаем величины момента торможения соответственно для шарового, дискового и цилиндрического роторов, вращающихся в неограниченном пространстве (в *дн·см*)

$$M_z = -0.195, \qquad M_z = -5.72,$$

$$M_z = -1520$$

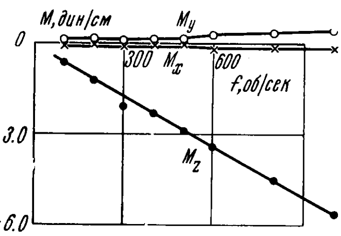


Фиг. 3

Положение шарового ротора в центре полости неустойчиво: при смещении центра ротора от центра полости вдоль оси вращения газовые силы стремятся увеличить это отклонение (знаки z и F_z противоположны). Это объясняется тем, что концентрация (и давление) газа меньше с той стороны, где меньше зазор между поверхностями ротора и полости.

При отклонении шарового ротора от центра полости в направлении, перпендикулярном оси вращения ротора, газовые силы стремятся уменьшить величину отклонения (y и F_y имеют одинаковые знаки). При этом появляется составляющая силы вдоль оси $x\,((\partial F_x / \partial y)_0 \neq 0)$.

В цилиндрических полостях малой высоты дисковый ротор устойчив по отношению к отклонению оси диска от оси полости, так как α и $M_\theta \approx M_y$ имеют одинаковые знаки (варианты 1—8, 14 табл. 2). Одновременно появляются силы, стремящиеся отклонить ось диска в перпендикулярном к смещению направлении ($M_x \approx -{}^1/_2 M_y$) и возбудить движение оси диска вокруг оси полости в направлении, противоположном вращению диска.



Фиг. 4

В цилиндрических полостях большой высоты уменьшается момент сил, стремящийся совместить ось ротора с осью полости (в табл. 2 значения $(\partial M_y / \partial\theta)_0$ не приведены для вариантов 9—13, так как точность вычислений, ограниченная затратами машинного времени, оказалась недостаточной даже для определения знака этой производной). Момент $M_x = (\partial M_x / \partial\theta)_0\theta$ способствует возбуждению кругового движения оси диска типа прямой прецессии.

Авторы благодарят Ю. И. Неймарка и Г. Г. Денисова за полезные советы и обсуждение.

Поступило 7 VIII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарбуз Г. А., Иванов В. П. Применение метода Монте-Карло к расчету течения сильно разреженного газа в системах с произвольной конфигурацией стенок. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
2. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 1. Механика. М., «Наука», 1965.
4. Davis D. N. Monte-Carlo calculation of molecular flow rates through a cylindrical elbow and pipes of other shapes. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, No. 7, p. 1169.
5. Chubb J. N. Monte-Carlo calculation of molecular gas flow. Trans. 3rd Internat. Vacuum Congr., Stuttgart, 1965, vol. 2, pt 1; Oxford — London — Pergamon Press., 1967, pp. 97—103.
6. Иванов В. П., Неймарк Ю. И. Некоторые методы расчета стационарного движения разреженного газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.
7. Калашник Л. И., Кислов А. М., Лившиц Э. М. Расчет параметров криогенных вакуумных камер методом Монте-Карло. Инж.-физ. ж., 1967, т. 13, № 6.
8. Иванов В. П., Неймарк Ю. И. Расчет молекулярных насосов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
9. Богачева А. А., Перепухов В. А., Рухман Э. Е. Применение метода Монте-Карло к расчету аэродинамических характеристик тел сложной формы в свободно-молекулярном потоке. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 6.
10. Де Бур Я. Х. Динамический характер адсорбции. М., Изд-во иностр. лит., 1962.