

УДК 533.6.011.8

## О ДИФФУЗИОННОМ СКОЛЬЖЕНИИ БИНАРНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

И. Н. ИВЧЕНКО, Ю. И. ЯЛАМОВ

(Москва)

Получено выражение для скорости диффузионного скольжения бинарной смеси газов при произвольных коэффициентах аккомодации тангенциального импульса. Вычисление выполнено на основе функций распределения газовых молекул, которые получены путем решения приближенным методом полупространственных моментов линейаризованных модельных уравнений Больцмана с операторами столкновений в форме Гросса и Крука.

Путем использования элементарного кинетического анализа в работах Крамерса и Кистемакера [1], Брока [2] было получено выражение для скорости диффузионного скольжения. Полученная в [1] формула зависит только от отношения масс молекул компонентов смеси. В формуле Брока скорость диффузионного скольжения зависит от масс и диаметров газовых молекул. Однако обе эти формулы не согласуются с экспериментальными данными Вальдмана [3]. В частности, в смеси с одинаковыми массами газовых молекул скорость диффузионного скольжения выражается в работе [2] через постоянную термодиффузии, и при чисто диффузионном отражении от поверхности стенки для молекул, взаимодействующих как жесткие упругие сферы, она дается формулой [4]

$$u^* = 0.068 \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} D_{12} \frac{\partial \gamma_1}{\partial y} \quad (0.1)$$

Здесь  $\sigma_i$  — диаметры газовых молекул,  $D_{12}$  — коэффициент взаимной диффузии,  $\gamma_1 = n_1 / n_1 + n_2$  ( $n_i$  — плотности компонентов смеси),  $y$  — тангенциальная координата, направленная вдоль градиента относительной концентрации первого компонента. Предсказываемые формулой (0.1) значения  $u^*$  более чем в десять раз меньше экспериментальных значений Вальдмана.

В более поздних работах [5, 6] скорость диффузионного скольжения получена путем решения модельных уравнений Больцмана. Однако в [5, 6] использована упрощенная модельная форма операторов столкновений, поэтому полученная формула не зависит от диаметров газовых молекул.

1. Рассмотрим бинарную газовую смесь, находящуюся над плоской стенкой в поле тангенциального к стенке градиента относительной концентрации компонентов смеси. Начало координат выберем на поверхности стенки. Ось  $x$  направлена по нормали, ось  $y$  — вдоль поверхности в направлении градиента относительной концентрации первого компонента. Предполагается, что температура и полное давление газовой смеси постоянны.

Функции распределения будем искать из решения линейаризованных модельных уравнений Больцмана с операторами столкновений в форме Гросса и Крука [7] (предполагается, что диффузионные скорости компонентов смеси малы по сравнению со скоростями теплового движения, поэтому условие линейаризации выполняется). Уравнения Больцмана для данной плоской задачи имеют вид

$$v_{ix} \frac{\partial f_j}{\partial x} + v_{iy} \frac{\partial f_j}{\partial y} = J_{ji} + J_{ji} \quad (i, j = 1, 2; i \neq j) \quad (1.1)$$

Здесь  $J_{ji}$ ,  $J_{ji}$  — операторы столкновений для молекул одного сорта и молекул разных сортов.

Линеаризованные операторы столкновений в форме [7] даются формулами

$$J_{jj} = n_j K_{jj} \left( -\varphi_j + \frac{m_j}{kT} \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_j \right) f_j^{(0)} \quad (1.2)$$

$$J_{ji} = n_i K_{ij} \left( -\varphi_j + \frac{m_j}{kT} \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_{ij} \right) f_j^{(0)}$$

Здесь  $\varphi_j$  — поправки к функциям распределения  $f_j = f_j^{(0)} (1 + \varphi_j)$ ,

$$f_j^{(0)} = n_j \left( \frac{m_j}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_j \mathbf{v}_j^2}{2kT}}, \quad \mathbf{u}_j = \frac{1}{n_j} \int \mathbf{v}_j f_j d\mathbf{v}_j, \quad K_{jj}, \quad K_{ij}$$

$\mathbf{u}_{ij}$  — столкновительные параметры модели.

В выражениях (1.2) предполагается, что температура компонентов смеси одинакова.

Параметры столкновений могут быть найдены из некоторых общих требований, предъявляемых к модели. Операторы столкновений должны сохранять число частиц каждого сорта, полный импульс и полную энергию. Сохранение частиц каждого сорта следует из структуры операторов (1.2). Для сохранения полного импульса необходимо, чтобы выполнялось условие

$$m_1(\mathbf{u}_{21} - \mathbf{u}_1) + m_2(\mathbf{u}_{12} - \mathbf{u}_2) = 0 \quad (1.3)$$

Здесь использовано условие симметрии операторов столкновений, а именно  $K_{12} = K_{21}$ .

Выбор одинаковой температуры для компонентов смеси обеспечивает сохранение энергии с точностью до членов квадратичных по диффузионным скоростям.

Столкновительные параметры модели (1.2) выберем таким образом, чтобы первые моменты от модельных операторов совпадали с первыми моментами от операторов столкновений в форме Больцмана [8]. Это условие для молекул, взаимодействующих как жесткие упругие сферы, приводит к следующим соотношениям:

$$\mathbf{u}_{12} = \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{8}{3K_{12}} \sigma_{12}^2 \left[ \frac{2\pi kT(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \right]^{1/2}$$

$$\mathbf{u}_{21} = \mathbf{u}_2 + (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{8}{3K_{12}} \sigma_{12}^2 \left[ \frac{2\pi kT(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \right]^{1/2}$$

$$\left( \sigma_{12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \quad (1.4)$$

Величины  $\mathbf{u}_{12}$  и  $\mathbf{u}_{21}$  должны удовлетворять следующим очевидным физическим требованиям:  $\mathbf{u}_{12} \rightarrow \mathbf{u}_2$  при  $m_1 \rightarrow 0$  и  $\mathbf{u}_{21} \rightarrow \mathbf{u}_1$  при  $m_2 \rightarrow 0$ . Эти условия будут удовлетворены, если  $K_{12}$  выбрать в виде

$$K_{12} = \frac{8}{3} \sigma_{12}^2 \left[ \frac{2\pi kT(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \right]^{1/2} \quad (1.5)$$

По аналогии с (1.5) величины  $K_{ji}$  определим формулами

$$K_{11} = \frac{8}{3} \sigma_1^2 \left( \frac{4\pi kT}{m_1} \right)^{1/2}, \quad K_{22} = \frac{8}{3} \sigma_2^2 \left( \frac{4\pi kT}{m_2} \right)^{1/2} \quad (1.6)$$

Из (1.4) и (1.5) следует

$$\mathbf{u}_{12} = \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{u}_{21} = \mathbf{u}_2 + (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Очевидно, что выражения (1.7) удовлетворяют условию (1.3). Формулами (1.2), (1.5) — (1.7) операторы столкновений определены полностью.

Будем искать функции распределения в виде

$$f_i^{\pm} = f_i^{(0)}(c_i, y) [1 + \Psi_i(c_i, y) + \Phi_i^{\pm}(c_i, x)] \quad (1.8)$$

Здесь верхние индексы плюс и минус означают величины для молекул, летящих от стенки и к стенке соответственно

$$c_i = \left( \frac{m_i}{2kT} \right)^{1/2} v_i, \quad f_i^{(0)}(c_i, y) = n_i(y) \left( \frac{m_i}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp(-c_i^2),$$

$\Psi_i(c_i, y)$  — поправки Чепмена — Энскога,  $\Phi_i(c_i, x)$  — поправки, учитывающие взаимодействие газа со стенкой.

Вид функций  $\Psi_i(c_i, y)$  зависит от выбора системы отсчета. Выберем систему отсчета, которая связана со среднемассовой скоростью газа, обусловленной диффузионными процессами на большом расстоянии от стенки. Функции  $\Psi_i$  будут иметь вид

$$\Psi_i = \frac{m_i}{kT} v_{iy} U_i \quad (1.9)$$

Здесь  $U_i$  даются формулами

$$U_1 = - \frac{n^2 m_2}{\rho n_1} D_{12} \frac{\partial \gamma_1}{\partial y}, \quad U_2 = \frac{n^2 m_1}{\rho n_2} D_{12} \frac{\partial \gamma_1}{\partial y}$$

$$\rho = m_1 n_1 + m_2 n_2, \quad n = n_1 + n_2, \quad D_{12} = \frac{3}{8n\sigma_{12}^2} \left[ \frac{kT(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \right]^{1/2}$$

Подставив (1.8) в уравнения (1.1), легко получить следующие уравнения для функций  $\Phi_i(c_i, x)$ :

$$c_{1x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \theta_1 (-\Phi_1 + 2c_{1y} G_1) + \theta_{12} \left[ \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} G_2 - G_1 \right] c_{1y} \quad (1.10)$$

$$c_{2x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \theta_2 (-\Phi_2 + 2c_{2y} G_2) + \theta_{21} \left[ \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^{1/2} G_1 - G_2 \right] c_{2y}$$

Здесь введены обозначения

$$\theta_1 = g \left[ n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_{12}^2 \left( \frac{m_0}{2m_2} \right)^{1/2} \right], \quad \theta_2 = g \left[ n_2 \sigma_2^2 + n_1 \sigma_{12}^2 \left( \frac{m_0}{2m_1} \right)^{1/2} \right]$$

$$\theta_{12} = g n_2 \sigma_{12}^2 \left( \frac{2m_2}{m_0} \right)^{1/2}, \quad \theta_{21} = g n_1 \sigma_{12}^2 \left( \frac{2m_1}{m_0} \right)^{1/2}, \quad g = \frac{8}{3} (2\pi)^{1/2},$$

$$m_0 = m_1 + m_2$$

$$G_1 = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int c_{1y} \Phi_1(c_1, x) e^{-c_1^2} dc_1, \quad G_2 = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int c_{2y} \Phi_2(c_2, x) e^{-c_2^2} dc_2$$

Решение уравнений (1.10) будем искать приближенным методом полупространственных моментов [10]. Будем искать функции в виде разложения по полиномам в полупространствах скоростей. В этих разложениях ограничимся только первыми членами. Функции  $\Phi_i(c_i, x)$  можно представить в виде

$$\Phi_1(c_1, x) = 1/2 [a^+(x) + a^-(x)] c_{1y} + 1/2 [a^+(x) - a^-(x)] c_{1y} \operatorname{sign} c_{1x} \quad (1.11)$$

$$\Phi_2(c_2, x) = 1/2 [b^+(x) + b^-(x)] c_{2y} + 1/2 [b^+(x) - b^-(x)] c_{2y} \operatorname{sign} c_{2x}$$

Умножив обе части уравнений (1.10) на  $c_{ij} (1 \pm \operatorname{sign} c_{ix}) e^{-c_i^2} dc_i$  и проинтегрировав по всему пространству скоростей, получим следующую си-

стему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} A^+ &= -\sqrt{\pi} \theta_1 A^-, & A^\pm &= a^+ \pm a^- \\ \frac{d}{dx} A^- &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \theta_{12} \left[ \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} B^+ - A^+ \right] \\ \frac{d}{dx} B^+ &= -\sqrt{\pi} \theta_2 B^-, & B^\pm &= b^+ \pm b^- \\ \frac{d}{dx} B^- &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \theta_{21} \left[ \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^{1/2} A^+ - B^+ \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

Решение системы (1.12), ограниченное на больших расстояниях от стенки, имеет вид

$$\begin{aligned} A^+ &= C_1 + C_2 e^{-\alpha x}, & A^- &= \alpha^{-1} C_2 e^{-\alpha x} \\ B_+ &= (m_2/m_1)^{1/2} C_1 + \beta^+ C_2 e^{-\alpha x}, & B^- &= \beta^- C_2 e^{-\alpha x} \\ \alpha &= \left[ \frac{1}{2} \pi (\theta_1 \theta_{12} + \theta_2 \theta_{21}) \right]^{1/2}, & \alpha^- &= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi} \theta_1} \\ \beta^+ &= -\frac{n_1 \theta_2}{n_2 \theta_1}, & \beta^- &= -\frac{\alpha^- n_1}{n_2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Постоянные  $C_i$  определяются из граничных условий на стенке. Будем предполагать, что молекулы отражаются от поверхности стенки с произвольными коэффициентами accommodation тангенциального импульса. Эти граничные условия имеют вид

$$f_i^+(c_i, 0, y) = q_i f_i^{(0)}(c_i, y) + (1 - q_i) f_i^-(c_{ix}, c_{iy}, c_{iz}, 0, y) \quad (1.14)$$

Здесь  $q_i$  — коэффициенты accommodation тангенциального импульса.

Зная функции распределения, легко получить формулу для скорости диффузионного скольжения

$$u^* = C_D D_{12} \frac{\partial \gamma_1}{\partial y} \quad (1.15)$$

$$C_D = \frac{(q_1 n_2 a_2 \sqrt{m_2} + q_2 n_1 a_1 \sqrt{m_1}) n^2 \sqrt{m_1 m_2}}{(q_1 a_2 \sqrt{m_1} - q_2 a_1 \sqrt{m_2}) n_1 n_2 \rho}$$

$$a_1 = q_1 + (2 - q_1) \alpha^-, \quad a_2 = q_2 \beta^+ + (2 - q_2) \beta^-$$

В частном случае при  $q_1 = q_2 = 0$  (чисто зеркальное отражение от стенки) формула (1.15) имеет вид

$$u^* = \frac{(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}) n^2 \sqrt{m_1 m_2}}{(n_1 \sqrt{m_1} + n_2 \sqrt{m_2}) \rho} D_{12} \frac{\partial \gamma_1}{\partial y} \quad (1.16)$$

Формула (1.16) совпадает с формулой Крамерса и Кистемакера.

Для сравнения приведем также формулу, полученную в работе [2] (предполагается  $q_1 = q_2 = 1$ )

$$\begin{aligned} u^* &= \left[ \frac{(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}) n^2 \sqrt{m_1 m_2}}{(n_1 \sqrt{m_1} + n_2 \sqrt{m_2}) \rho} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{n^2}{d_0 n_1 n_2} \frac{n_1 d_1 + n_2 d_{-1}}{n_1 \sqrt{m_1} + n_2 \sqrt{m_2}} \right] D_{12} \frac{\partial \gamma_1}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь величины  $d_0$ ,  $d_1$ ,  $d_{-1}$  соответствуют обозначениям монографии [9].

2. Проведем сравнение полученной формулы с экспериментальными данными Вальдмана [2], в которых измерялась скорость движения аэрозольных частиц, взвешенных в неоднородной по концентрации бинарной газовой смеси. Диффузионная сила, действующая на крупную аэрозольную частицу ( $R \gg \lambda$ ,  $R$  — радиус аэрозольной частицы,  $\lambda$  — длина свободного пробега газовых молекул), дается формулой

$$F = -6\pi\eta R K_D D_{12} \text{ grad } \gamma_1 \quad (2.1)$$

Здесь  $\eta$  — вязкость газа.

Коэффициент  $K_D$  дается формулой

$$K_D = C_D - \frac{m_2 - m_1}{m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2} \quad (2.2)$$

Формула (2.2) справедлива для диффузионных процессов, при которых средняя молекулярная скорость газа равна нулю. В таблице приведены теоретические значения  $K_D$  и  $K_{1D}$ , вычисленные с помощью формул (1.15), (1.17), и экспериментальные значения Вальдмана (первая строчка таблицы).

Состав газовой смеси $\gamma_1 = \gamma_2$	N <sub>2</sub>								CO <sub>2</sub>
	H <sub>2</sub> $\gamma_2 = 0,01$	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> $m_1 = m_2$	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	O <sub>2</sub>	Ar	CO <sub>2</sub>	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub> $m_1 = m_2$
$K_D$	0.900 0.641	0.130 0.107	0.073 0.080	0.085 0.082	-0.100 -0.089	-0.220 -0.168	-0.200 -0.110	-0.130 0.025	0.110 0.137
$K_{1D}$	0.656	0.035	0.005	-0.022	-0.057	-0.143	-0.181	-0.173	0.008

Теоретические расчеты выполнены в предположении, что молекулы отражаются от стенки чисто диффузно ( $q_1 = q_2 = 1$ ).

Из таблицы видно, что большинство теоретических значений  $K_D$  находится в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными Вальдмана. Для более точного количественного сравнения с этими экспериментальными данными необходимо экспериментально определить значения коэффициентов аккомодации тангенциального импульса. Формула (1.17) не согласуется с экспериментальными данными для смесей с близкими молекулярными весами компонентов.

Поступило 11 VIII 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kramers H. A., Kistemaker J. On the slip of a diffusing gas mixture along a wall. *Physica*, 1943, vol. 10, No. 8, pp. 699—713.
2. Brock J. R. Forces on aerosols in gas mixtures. *J. Colloid. Sci.*, 1963, vol. 18, No. 6, pp. 489—501.
3. Waldmann L. On the motion of spherical particles in nonhomogeneous gases. In: «Rarefied Gas Dynamics», Suppl. 1, N. Y., Acad. Press. Inc., 1961.
4. Суетин П. Е., Волобуев П. В. Бароэффект и диффузионное скольжение. В сб. «Исследования в области поверхностных сил», М., «Наука», 1967.
5. Яламов Ю. И., Ивченко И. Н., Дерягин Б. В. Расчет скорости диффузионного скольжения бинарной газовой смеси. Докл. АН СССР, 1968, т. 180, вып. 2, стр. 330.
6. Yalamov Yu. I., Ivchenko I. N., Derjaguin B. V. Calculation of the surface diffusion slip velocity of a gas mixture. In: «Rarefied Gas Dynamics», vol. 1, N. Y., Acad. Press. Inc., 1969.
7. Gross E. P., Krook M. Model for collision processes in gases: small-amplitude oscillations of charged two-component systems. *Phys. Rev.*, 1956, vol. 102, No. 3, pp. 593—604.
8. Hamel V. B. Kinetic model for binary gas mixtures. *Phys. Fluids*, 1965, vol. 8, No. 3, pp. 418—425.
9. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
10. Gross E. P., Jackson E. A., Ziering S. Boundary value problems in kinetic theory of gases. *Ann. Phys.*, 1957, vol. 1, No. 2, pp. 141—167. (Рус. перев.: Граничные задачи в кинетической теории газов. Период. сб. перев. иностр. статей «Механика», 1958, № 5.)