

УДК 532.52

ПАРАМЕТРЫ ПОДОБИЯ ПРИ ИСТЕЧЕНИИ СИЛЬНО НЕДОРАСШИРЕННЫХ СТРУЙ В ЗАТОПЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

И. Н. МУРЗИНОВ

(Москва)

Рассмотрено истечение невязкого газа из сверхзвукового сопла в затопленное пространство, когда давление на срезе сопла намного превышает давление в окружающей среде. В этом случае поперечный и продольный размеры возмущенной области много больше радиуса выходного сечения сопла. Если линейные величины относить к этим размерам, то соответствующие безразмерные газодинамические параметры, границы струй и контуры висячих скачков уплотнения в подобных сечениях оказываются зависящими (довольно слабо) лишь от показателя адиабаты истекающего газа κ и еще одного параметра. Сравнение с имеющимися результатами экспериментов и численных расчетов показывает хорошую точность выполнения подобия.

1. Вопросы подобия истечения сильно недорасширенных струй рассматривались в работах [1, 2] на основе представления течения как течения от источника с распределенной интенсивностью по лучам [3]. В частности, в этих работах показано, что размеры возмущенной области течения пропорциональны корню квадратному из нерасчетности $p = p_a / p_\infty$ (отношение давлений на срезе сопла и в окружающей среде).

В работе [4] получены автомодельные решения для неустановившихся одномерных течений, когда скорость течения пропорциональна расстоянию от начала координат до рассматриваемой точки. С использованием этих решений в работе [5] для больших чисел Маха M_a на срезе сопла выведен характерный размер течения, зависящий от числа Маха, показателя адиабаты и нерасчетности.

В отличие от упомянутых выше исследований ниже показано, что геометрическая картина истечения из сильно недорасширенного сопла определяется двумя характерными размерами. Это позволило избавиться от некоторых параметров и сформулировать условия подобия течений в более компактном виде.

2. Рассмотрим сначала профилированные сопла с большими числами Маха на срезе сопла, так что величинами M_a^{-2} можно пренебречь по сравнению с единицей. Из интеграла Бернулли следует, что во всем поле течения

$$\left(1 + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{1}{M_a^2}\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \leq \frac{V}{V_m} \leq 1 \quad (2.1)$$

где V , V_m — соответственно модуль скорости и максимальная скорость истечения газа. Тогда с принятой точностью можно считать, что $V \approx V_m$.

Максимальный угол поворота потока θ при истечении в пустоту можно получить, интегрируя соотношение в простой волне

$$d\theta = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{1}{2}(\kappa - 1)M^2} \frac{dM}{M} \approx \frac{2}{\kappa - 1} \frac{dM}{M^2}, \quad \theta \approx \frac{2}{\kappa - 1} \frac{1}{M_a} \quad (2.2)$$

Следовательно, с принятой точностью можно выбрать в качестве характерных величин продольной и поперечной составляющих скоростей

$$u = V \cos \theta \approx V_m, \quad v = V \sin \theta \sim V_m / M_a \quad (2.3)$$

При этом первое из равенств с точностью до величин M_a^{-2} будет выполняться всюду в потоке.

С использованием соответствующих оценок на скачках уплотнения [6] можно показать, что этот вывод сохранится и при наличии скачков уплотнения, контуры которых близки к границе струи. Но из уравнений движения тогда следует, что рассматриваемая задача эквивалентна задаче о неустановившемся разлете цилиндрического жгута газа с параметрами на срезе сопла, так что давление на границе разлетающегося газа поддерживается постоянным, равным p_∞ . Заданное давление на границе расширяющегося жгута будет оказывать тормозящее влияние, и вблизи границы возникнет скачок уплотнения. Поскольку энергия единицы длины такого жгута конечна и газ, расширяясь, должен совершать работу против сил внешнего давления, то, очевидно, будет существовать максимальный размер R_2 , до которого будет происходить расширение границы рассматриваемого объема газа. При этом для достаточно больших времен в тонком ударном слое между скачком и границей жгута будет сосредоточена практически вся масса газа; давление в этом слое будет иметь порядок p_∞ , а в остальной части возмущенной области течения $p \ll p_\infty$, так что после достижения границей газа максимального размера R_2 газ начнет двигаться в обратном направлении и течение будет носить пульсирующий характер.

Если пренебречь объемом ударного слоя по сравнению со всем объемом возмущенной области и считать, что скорость газа в ударном слое в момент достижения максимального размера R_2 близка к нулю, из закона сохранения энергии следует, что практически вся первоначальная энергия газа затрачивается на работу против сил внешнего давления. Это условие дает оценку для характерного поперечного размера возмущенной области

$$\pi R_2^2 p_\infty \sim \pi \rho_a R_a^2 i_a, \quad R_2 \sim R_a \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_a}{p_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

Величины с индексом a относятся к параметрам на срезе сопла.

В качестве характерной скорости течения в поперечном направлении используем

$$V_{1m} = \sqrt{2i_a} \quad (2.5)$$

Тогда время достижения частицами газа максимальной величины R_2

$$t \sim R_2 / V_{1m} \quad (2.6)$$

и для продольного характерного размера получим

$$R_1 = R_2 V_m / V_{1m} \approx R_a \sqrt{\kappa} M_a \sqrt{p_a / p_\infty} \quad (2.7)$$

Учитывая, что размеры возмущенной области в рассматриваемых случаях ($p_a / p_\infty \gg 1$) намного превышают размер выходного сечения сопла, естественно сопло рассматривать как источник и характеризовать его величинами (в дальнейшем будем их называть начальными условиями)

$$Q, J, V_m, R_a, \kappa \quad (2.8)$$

где Q, J — расход и импульс газа на срезе сопла. Граничное условие характеризуется единственным параметром — давлением p_∞ . Помимо радиуса сопла R_a из указанных параметров можно образовать еще два независимых характерных размера

$$R_1 = \left(\frac{Q V_m}{\pi p_\infty} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad R_2 = \left(\frac{Q V_m - J}{\pi p_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

Легко показать, что с точностью до величин $\sim M_a^{-2}$ эти выражения совпадают соответственно с продольным (2.7) и поперечным (2.4) харак-

терными размерами течения. Докажем, что второе из выражений (2.9) определяет поперечный размер возмущенной области течения при произвольном числе Маха на срезе сопла.

Запишем интеграл сохранения количества движения в проекции на ось симметрии для выделенной на фиг. 1 пунктиром контрольной поверхности, где сечение AB соответствует максимуму толщины струи.

Имеем

$$J + p_{\infty}(S - \pi R_a^2) = \int_A^B \int (p + \rho u^2) d\sigma \quad (2.10)$$

В соответствии с ранее сделанными предположениями пренебрегаем величиной πR_a^2 по сравнению с площадью S сечения AB . Кроме того, в подынтегральном выражении можно пренебречь давлением, так как интеграл от этого члена намного меньше величины $p_{\infty}S$. Тогда, полагая в сечении AB , что $u \approx V_m$, найдем

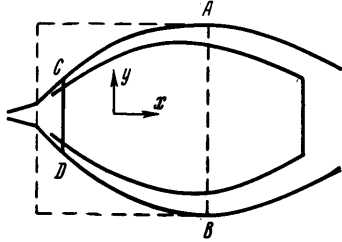
$$J + p_{\infty}S \approx QV_m \quad (2.11)$$

откуда для характерного поперечного размера получаем то же самое значение, что и в (2.9). Естественно R_1 принять за характерный размер в продольном направлении.

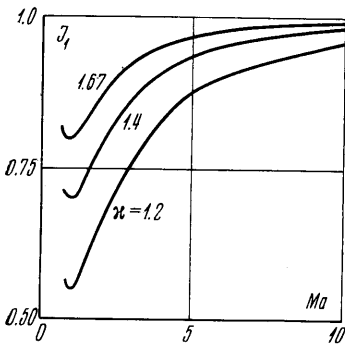
В общем случае характерный угол поворота потока равен

$$\theta \sim R_2 / R_1$$

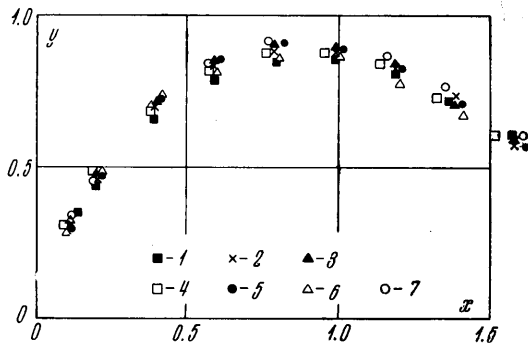
что при больших числах Маха M_a находится в соответствии с (2.2).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

3. На основе сделанных оценок выберем в качестве характерных величин для продольной и поперечной составляющих скорости u_0, v_0 , давления p_0 , плотности ρ_0 , продольного и поперечного размеров x_0, y_0 следующие величины:

$$u_0 = V_m, \quad v_0 = V_m(1 - J_1)^{-1/2}, \quad p_0 = p_{\infty}, \quad y_0 = R_2 = R_1(1 - J_1)^{1/2}$$

$$\rho_0 = \frac{p_{\infty}}{V_m^2(1 - J_1)}, \quad x_0 = R_1 = \left(\frac{QV_m}{\pi p_{\infty}} \right)^{1/2} \left(J_1 = \frac{J}{QV_m} \right) \quad (3.1)$$

Тогда в безразмерных переменных, отнесенных к соответствующим величинам (3.1), уравнения сохранения запишутся в виде

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} (1 - J_1) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ u \frac{\partial (p/\rho^*)}{\partial x} + v \frac{\partial (p/\rho^*)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

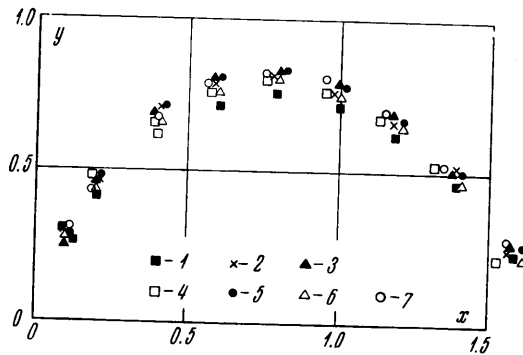
Начальные интегральные условия (2.8) на выходе из сопла в безразмерных переменных будут характеризоваться следующими величинами:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{Q}{\pi R_2^2 \rho_0 V_m} \equiv 1, & J_1 &= \frac{J}{\pi R_2^2 \rho_0 V_m^2} = \frac{J}{Q V_m} \\ V_1 &= V_m / u_0 \equiv 1, & R_{a1} &= R_a / R_2, \kappa \end{aligned} \quad (3.3)$$

Наконец, условие постоянства давления на границе дает

$$p_1 = p_\infty / p_0 \equiv 1 \quad (3.4)$$

Внутри поля течения возникает скачок уплотнения, однако соотношения на нем, как легко показать, не вносят дополнительных определяющих



Фиг. 4.

параметров. Учитывая, что при больших нерасчетностях $R_{a1} \rightarrow 0$, из системы уравнений (3.2), начальных и граничных условий (3.3), (3.4) заключаем, что в выбранных таким образом переменных течение будет зависеть лишь от двух параметров — κ и J_1 .

Для сопла с равномерными параметрами на выходе величину J_1 можно выразить через число Маха M_a и κ следующим образом:

$$J_1 = \left(1 + \frac{1}{\kappa M_a^2} \right) \left(1 + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{1}{M_a^2} \right)^{-\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (3.5)$$

При больших числах M_a

$$J_1 = 1 + O(M_a^{-2}) \quad (3.6)$$

так что в выбранных переменных течение будет определяться лишь показателем адиабаты κ . Зависимость J_1 от M_a для нескольких значений κ показана на фиг. 2.

Ясно, что подобие течений не будет иметь место вблизи сопла, где течение будет определяться конкретными параметрами на срезе. На кромке сопла происходит разворот потока и существуют режимы течения, когда при понижении давления в окружающей среде одна из характеристик пучка волн разрежения уже не пересекает ось симметрии (существуют режимы течения и геометрия сопла, когда уже первая характеристика не пересекает ось симметрии [3]). Очевидно, что дальнейшее понижение давления не скажется на течении между этой характеристикой и осью симметрии (в области непрерывного течения) и внешнее давление не будет определяющим для течения в этой области. Поэтому следует ожидать хорошего выполнения подобия течений ближе к границам возмущенной области, в частности в ударном слое.

Проиллюстрируем точность выполнения подобия течений численными расчетами [7]. В соответствии с критериями подобия границы струй и контуры висячих скачков в безразмерных переменных должны быть функциями κ и J_1 . Анализ всех приведенных в [7] расчетов показывает, что границы струй и скачков очень слабо зависят от этих параметров и практически описываются едиными кривыми. Границы струй в безразмерных переменных для различных расчетных случаев показаны на фиг. 3, формы висячих скачков — на фиг. 4.

На фиг. 5 показаны профили давления в ударном слое в подобных сечениях $x = \text{const}$ для различных расчетных случаев. Здесь координата ξ отсчитывается в сечении $x = \text{const}$ так, что $\xi = 0$ соответствует положению висячего скачка, а $\xi = 1$ — границе струи. Видно, что в подобных сечениях профили давления носят универсальный характер. То же самое справедливо и для плотности, хотя точность выполнения здесь несколько хуже вблизи границы струи, где существует очень большая завихренность течения. Точки на фиг. 3, 4, 5 соответствуют следующим условиям расчета:

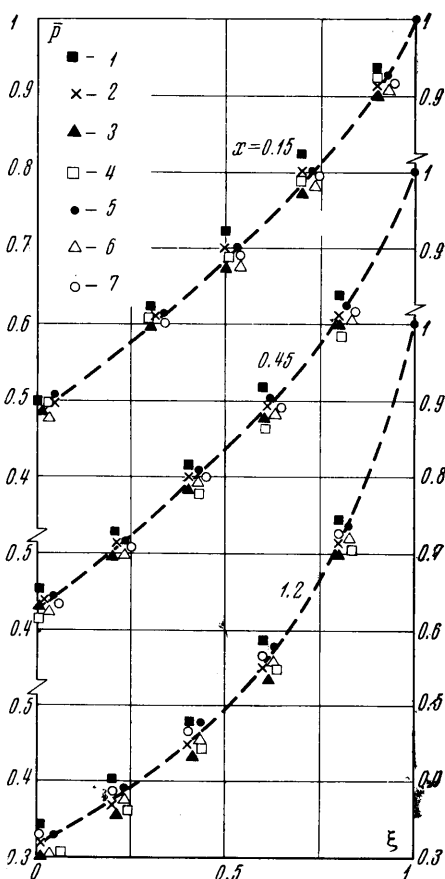
	1	2	3	4	5	6	7
M_a	4	4	4	3	5	4	4
p	10^2	10^4	10^6	10^7	10^4	10^4	10^4
κ	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.3	1.5

Здесь $\bar{p} = p_a / p_\infty$. Все расчеты выполнены для конических сопел с углом полураствора $\varphi = 10^\circ$. Отметим, что вплоть до углов $\varphi \sim 20^\circ$ угол сопла практически не будет влиять на геометрию течения в целом, за исключением небольшой окрестности сопла.

Во многих приложениях интересно знать расстояние от среза сопла до диска Маха и диаметр диска Маха. Если принять, что в первом приближении вязкость и теплопроводность газа не влияют на положение диска Маха, то из сформулированного закона подобия следует:

$$L = f_1(J_1, \kappa) R_1, \quad D = f_2(J_1, \kappa) R_2 \quad (3.7)$$

где L — расстояние от сопла до диска Маха, D — диаметр диска Маха. При



Фиг. 5

больших числах Маха M_a функции f_1 и f_2 будут зависеть лишь от показателя адиабаты κ .

Принимая, что характерные размеры R_1 и R_2 достаточно хорошо отражают зависимость геометрии течения от показателя адиабаты, функции f_1 и f_2 можно считать постоянными. Имеющиеся экспериментальные данные подтверждают эти выводы. Можно определить значения функций f_1 и f_2 на основе экспериментальных данных [9] для звукового сопла ($M_a = 1$). Тогда формулы (3.7) запишутся в виде

$$L = 0.685R_1, \quad D = 0.72R_2 \quad (3.8)$$

Для профилированного сопла величины R_1 и R_2 выражаются через параметры на срезе следующим образом:

$$R_1 = R_a M_a \sqrt{\kappa} \left(\frac{P_a}{P_\infty} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{1}{M_a^2} \right)^{1/4}$$

$$R_2 = R_1 (1 - J_1)^{1/2} \quad (3.9)$$

Поперечный размер струи более чувствителен к показанию адиабаты κ , в то время как продольный размер в большей степени зависит от числа Маха. На практике часто встречаются сопла с неравномерными параметрами на срезе, получающиеся, например, вследствие обрезания профилированных сопел. Для таких сопел все предыдущие рассуждения сохраняют силу и, следовательно, будет иметь место подобие течений. Предыдущие рассуждения базировались на предположении, что сопло можно характеризовать интегральными параметрами (2.8). Это предположение хорошо подтверждается сравнением с точными численными расчетами для сопел с постоянными параметрами на выходе. При анализе истечения из сопел с сильно неравномерными полями на выходе заметим, что оценки характерных размеров течения не связаны со сделанным предположением и остаются справедливыми и для таких сопел (с постоянной энтальпией торможения истекающего газа). Поэтому можно ожидать, что подобие по геометрической картине течения будет иметь место. Для одного частного вида сопла с неравномерными параметрами подобие течений может быть легко показано. Действительно, если небольшую часть границы струи около сопла принять за твердую стенку и рассмотреть сопло с выходным сечением CD (см. фиг. 1), то очевидно, что величины Q , V_m , κ для такого сопла будут тождественно равны аналогичным величинам исходного сопла. Если обозначить радиус среза сопла в сечении CD через R_3 , то из закона сохранения количества движения легко показать, что импульсы исходного и полученного таким образом сопла будут отличаться на величину $\Delta J = \rho r_\infty (R_3^2 - R_a^2)$. Но если $R_3 \sim R_a$, то легко показать (см. соотношения (2.10), (2.14)), что величина ΔJ намного меньше любой из величин J , $QV_m - J$, и, следовательно, импульсы у таких сопел одинаковы. Как и для исходного сопла $R_3/R_2 \rightarrow 0$ при больших нерасчетностях. То, что существует подобие течений для указанных двух сопел, не вызывает сомнения. Таким образом, показано, что имеет место подобие в течениях для двух сопел с одинаковыми интегральными характеристиками газа, но с разной структурой полей.

Укажем на аналогичные выводы для нестационарных течений. Как было отмечено в работе [9], и затем показано в [10] на основе численных расчетов, для больших времен при нестационарном разлете газовых объемов детали распределения параметров по первоначальному объему не играют заметной роли, а течение определяется лишь энергетическими характеристиками газа в начальный момент времени. На основе аналогии истечения из сопел при больших M_a с нестационарными течениями этот вывод можно распространять и на истечение из сопел.

Отметим также, что при больших нерасчетностях указанные характерные размеры будут, по-видимому, хорошо описывать герметическую картину при истечении из нескольких близко расположенных сопел. В этом случае картина течения будет подобна истечению из одного сопла с импульсом, расходом и площадью среза, равными сумме соответствующих величин отдельных сопел. Экспериментальные данные качественно подтверждают этот вывод.

Автор благодарит В. В. Лунева за многочисленные дискуссии по рассмотренной задаче.

Поступило 14 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Morgan J. P. Similarity in high-altitude jets. AIAA Journal, 1967, No. 7.
2. Гусев В. Н., Климова Т. В. Течение в истекающих из недорасширенных сопел струях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
3. Ладыженский М. Д. Пространственные гиперзвуковые течения газа. М., «Машиностроение», 1968.
4. Седов Л. И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа. Докл. АН СССР, 1953, т. 90, № 5.
5. Вауер А. В. Normal shock location of underexpanded gas-particle jets. AIAA Journal, 1965, No. 6.
6. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
7. Дьяконов Ю. Н., Усков В. И. Расчет сверхзвуковых струй идеального газа методом сеток. Сб. тр. НИИ механики МГУ «Аэродинамика больших скоростей», 1970, № 5.
8. Grist S., Sherman P. M., Glass D. D. Study of the highly underexpanded sonic jet. AIAA Journal, 1966, No. 1.
9. Немчинов Н. В. Разлет плоского слоя газа при постепенном выделении энергии. ПМТФ, 1961, № 1.
10. Фонарев А. С. Нестационарное расширение газа в вакуум при различных законах и длительности выделения энергии. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 1.