

УДК 532.517.4

РАЗВИТИЕ ПЛОСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ В БЕЗГРАНИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. И. КОРОБКО, С. В. ФАЛЬКОВИЧ

(Саратов)

Найдены в конечном виде второй и третий члены асимптотического разложения функции тока в неавтономной задаче о развитии плоской турбулентной струи в безграничном пространстве. Приведены результаты экспериментальных исследований свободных турбулентных струй; рассмотрено влияние начального профиля скорости на аэродинамические характеристики струи.

Задача о развитии плоской турбулентной струи в безграничном пространстве рассмотрена в работах [1-3]. Существующее решение автономно и справедливо лишь на достаточно большом расстоянии от щели. Учет конечных размеров щели приводит к неавтономной задаче. Экспериментальному исследованию свободной плоской турбулентной струи посвящены работы [4-6].

1. Основные уравнения. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в плоском турбулентном пограничном слое при постоянном давлении во внешнем потоке имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь u , v — осредненные осевая и поперечная составляющие вектора скорости соответственно; x и y — продольная и поперечная координаты; τ — турбулентное касательное напряжение; ρ — плотность.

Выразим напряжение τ через градиент осевой скорости, воспользовавшись гипотезой Прандтля [7]

$$\tau = \varepsilon \rho \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.2)$$

Здесь ε — коэффициент турбулентной кинематической вязкости, который полагается неизменным поперек пограничного слоя и равным

$$\varepsilon = \kappa_1 b U \quad (1.3)$$

где U — скорость в середине струи, b — ширина струи, κ_1 — эмпирическая постоянная, зависящая от характера турбулентности. Подставляем выражение τ из (1.2) в уравнения (1.1). В результате имеем

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

Граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0 \quad (y = 0), \quad u \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty) \quad (1.5)$$

Интегральное условие

$$K_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 dy = \text{const} \quad (1.6)$$

Здесь K_0 — постоянная, характеризующая начальный импульс струи. Обозначим через u_0 осевую скорость на оси струи в сечении, отстоящем

от щели на некотором характерном расстоянии s , через b_0 — ширину струи в этом сечении. Тогда, следуя Шлихтингу [7], будем иметь

$$u = u_0(x/s)^{-1/2}, \quad b = b_0 x/s$$

Следовательно, согласно (1.3)

$$\varepsilon = \varepsilon_0(x/s)^{1/2}, \quad \varepsilon_0 = \kappa_1 b u_0 \quad (1.7)$$

Вводим в рассмотрение функцию тока ψ согласно уравнению неразрывности

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.8)$$

При этом уравнения (1.4) сводятся к уравнению третьего порядка

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \varepsilon_0 \left(\frac{x}{s}\right)^{1/2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (1.9)$$

Вводим новые переменные

$$\xi = x, \quad \zeta = \sigma y/x \quad (1.10)$$

Здесь σ — эмпирическая постоянная.

Уравнение (1.9) в переменных x, ζ (1.10) имеет вид

$$-\left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right)^2 + x \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \zeta} - x \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} = \varepsilon_0 \left(\frac{x}{s}\right)^{1/2} \sigma \frac{\partial^3 \psi}{\partial \zeta^3} \quad (1.11)$$

Здесь и далее вместо ξ сохранено прежнее обозначение x .

Рассмотрим неавтономную задачу, т. е. будем считать, что струя истекает не из точечного источника, а из щели конечного размера. Ищем функцию тока $\psi(x, \zeta)$ в виде ряда

$$\psi(x, \zeta) = \sigma^{-1} u_0 (xs)^{1/2} \{f_0(\zeta) + x^{-3/2} f_1(\zeta) + x^{-3} f_2(\zeta) + \dots\} \quad (1.12)$$

Первый член этого ряда представляет собой автомодельное решение, справедливое в основном участке струи. Вторым и последующие члены позволяют продвинуться в область переходного участка и учесть влияние конечных размеров щели, начального распределения скорости и т. п. на аэродинамические характеристики в переходном участке.

Вид разложения функции тока ψ (1.12) установлен методом, аналогичным [9], путем сведения рассматриваемой задачи к задаче о собственных значениях.

Подставляя (1.12) в уравнение (1.11) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , будем иметь

$$\frac{\varepsilon_0 \sigma^2}{u_0 s} f_0''' + \frac{1}{2} f_0 f_0'' + \frac{1}{2} f_0'^2 = 0 \quad (1.13)$$

$$-\frac{\varepsilon_0 \sigma^2}{u_0 s} f_1''' + \frac{1}{2} f_0 f_1''' + \frac{5}{2} f_0' f_1' - f_0'' f_1 = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{\varepsilon_0 \sigma^2}{u_0 s} f_2''' + \frac{1}{2} f_0 f_2''' + 4 f_0' f_2' - \frac{5}{2} f_0'' f_2 = f_1 f_1'' - 2 f_1'^2 \quad (1.15)$$

Так как в выражении для ε_0 содержится еще одна свободная постоянная

ная κ_1 , то можем принять аналогично [7]

$$\sigma = \frac{1}{2}(u_0 s / \epsilon_0)^{1/2} \quad (1.16)$$

Уравнения (1.13) — (1.15) с учетом (1.16) имеют вид

$$f_0''' + 2f_0 f_0'' + 2f_0'^2 = 0 \quad (1.17)$$

$$f_1''' + 2f_0 f_1'' + 10f_0' f_1' - 4f_0'' f_1 = 0 \quad (1.18)$$

$$f_2''' + 2f_0 f_2'' + 16f_0' f_2' - 10f_0'' f_2 = 4f_1'' f_1 - 8f_1'^2 \quad (1.19)$$

Соответствующие граничные условия (1.5) согласно (1.8) и (1.12) примут вид

$$\begin{aligned} f_0 = f_1 = f_2 = \dots = 0 \\ f_0'' = f_1'' = f_2'' = \dots = 0 \quad \text{при } \zeta = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$f_0' = f_1' = f_2' = \dots = 0 \quad \text{при } \zeta = \infty$$

Подставим выражение (1.12) в интегральное условие (1.6), воспользовавшись (1.8). Сравнивая коэффициенты при членах, содержащих одинаковые степени x , получаем следующие интегральные условия:

$$K_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho}{\sigma} u^2 s f_0'^2 d\zeta, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_0' f_1' d\zeta = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1'^2 + 2f_0' f_2') d\zeta = 0 \quad (1.21)$$

2. Неавтономное решение. Автономное решение задачи о развитии свободной плоской турбулентной струи (решение уравнения (1.17)) приведено в работе Шлихтинга [7] и имеет вид

$$f_0(\zeta) = \text{th } \zeta, \quad \zeta = \sigma y / x \quad (2.1)$$

Постоянная σ была экспериментально найдена Рейхардтом [2] и оказалась равной $\sigma = 7.67$.

Характерную скорость u_0 можно выразить через количество движения K_0 , воспользовавшись первым интегральным соотношением (1.21). Это соотношение согласно (2.1), (1.12) и (1.8) после вычисления интеграла дает [7]

$$K_0 = \frac{1}{3} \sigma^{-1} \rho u_0^2 s \quad (2.2)$$

Подставим выражение f_0 согласно (2.1) в уравнение (1.17) и найдем, что частным интегралом этого уравнения является $f_1(\zeta) = \text{ch}^{-2} \zeta$. Воспользовавшись заменой

$$f_1 = f_0' \int \frac{y}{f_0'} d\zeta \quad (2.3)$$

с учетом (1.16), уравнение (1.17) приводим к виду

$$y'' + 6(1 - \text{th}^2 \zeta)y = 0$$

которое заменой переменной $z = \text{th } \zeta$ сводится к уравнению Лежандра [3]

$$(1 - z^2)y'' - 2zy' + 6y = 0 \quad (2.4)$$

Следовательно, решением уравнения (1.17), удовлетворяющим граничным условиям (1.20) и второму интегральному соотношению (1.21), согласно [3] будет

$$f_1(\zeta) = \gamma [f_0(\zeta) - 2f_0'(\zeta)\zeta] \quad (2.5)$$

Здесь γ — постоянная интегрирования.

Решение уравнения (1.18) согласно [9] имеет вид

$$f_2(\zeta) = \gamma^2(2f_0''\zeta^2 + 3f_0'\zeta - f_0) \quad (2.6)$$

Таким образом, имеем неавтономное решение задачи о развитии турбулентной струи в безграничном пространстве в виде разложения функции тока ψ (1.12), скоростей u и v (1.8), выраженных через автономное решение $f_0(\zeta)$ (2.1)

$$\psi = \frac{1}{\sigma} u_0(sx)^{1/2} [f_0 + \gamma(f_0 - 2f_0'\zeta)x^{-1/2} + \gamma^2(2f_0''\zeta^2 + 3f_0'\zeta - f_0)x^{-3}]$$

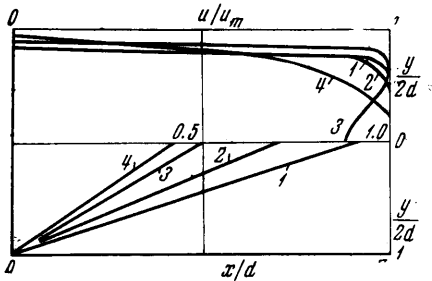
$$u = u_0 s^{1/2} [f_0' x^{-1/2} + \gamma(-2f_0''\zeta - f_0') \frac{1}{x^2} + \gamma^2(2f_0''\zeta^2 + 7f_0''\zeta + 2f_0') x^{-5/2}]$$

$$v = \sigma^{-1} u_0 s^{1/2} [1/2(2f_0'\zeta - f_0)x^{-1/2} - \gamma(2f_0''\zeta^2 + 3f_0'\zeta - f_0)x^{-2} + 1/2\gamma^2(4f_0'''\zeta^3 + 24f_0''\zeta^2 + 19f_0'\zeta - 5f_0)x^{-7/2}] \quad (2.7)$$

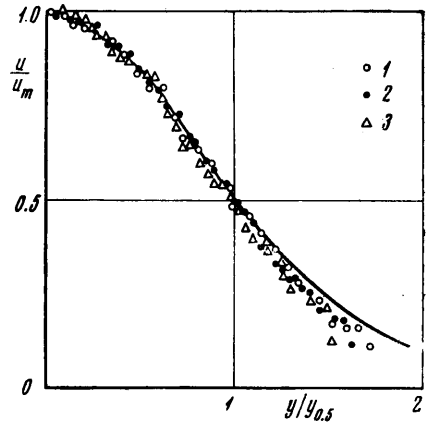
Здесь γ — постоянная интегрирования, которую не удается определить из граничных (1.20) и интегральных (1.21) условий. Следовательно, γ представляет собой дополнительную характерную постоянную рассматриваемой задачи. По-видимому, существует дополнительная интегральная характеристика струи, кроме начального расхода жидкости и количества движения, отражающая форму начального профиля, размеры щели и т. п., которая и позволит определить значение γ . Такая интегральная характеристика в настоящее время не получена. Ниже выяснено влияние формы начального профиля скорости на значение γ на основе экспериментальных исследований.

3. Экспериментальные исследования. Полуэмпирический метод определения γ . Были проведены экспериментальные исследования развития плоских турбулентных струй воздуха, истекающих вертикально вверх из щели размером 20×200 мм² при постоянном расходе воздуха через щель, равном 277 м³/час. Струи формировались четырьмя соплами, на срезе которых имелись распределения осевой скорости, представленные в верхней части фиг. 1 (цифры у кривых обозначают номер сопла).

Измерение скоростей в струе проводилось при помощи насадка Пито — Прандтля (наружный диаметр 3 мм, внут-



Фиг. 1

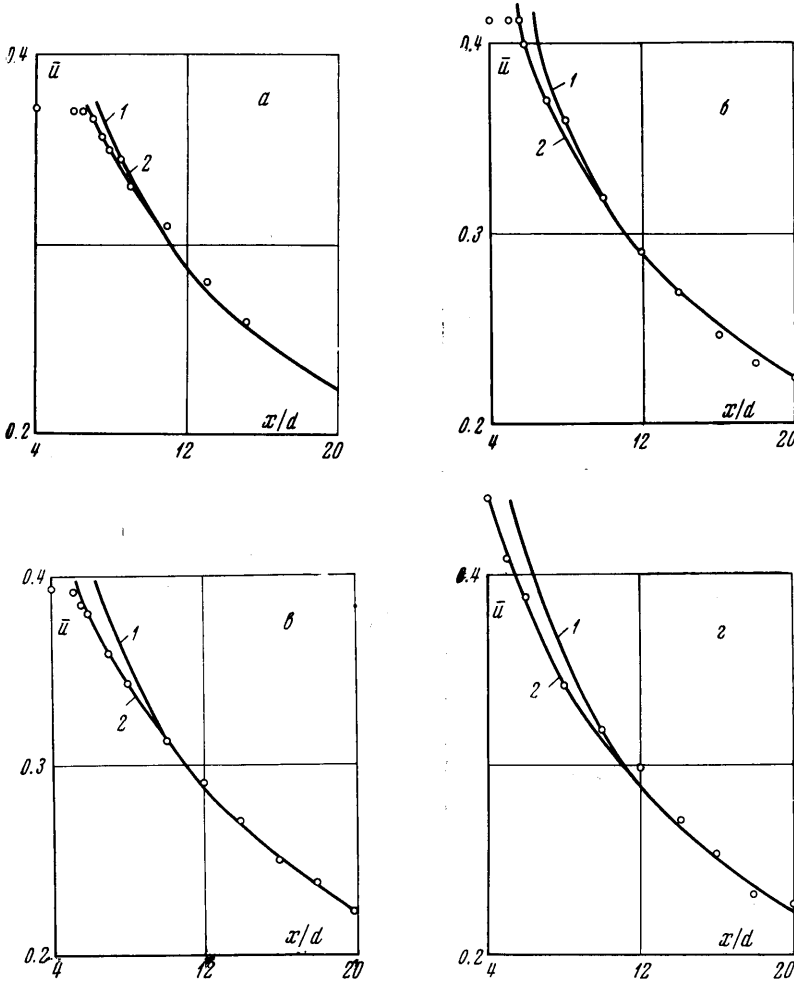


Фиг. 2

ренний — 0,3 мм), который был закреплен в координатнике с ценой деления 0,5 мм, позволяющем перемещать насадок в горизонтальном и вертикальном направлениях. В качестве вторичного регистрирующего прибора использовался микроанометр типа ММН. Скорости измерялись по длине струи в сечениях, отстоящих одно от другого на расстоянии, соответствующем 0,5 калибра. Результаты измерений показали полную симметрию профилей скорости относительно оси струи, поэтому приведены лишь результаты, характеризующие половину струи. Измере-

ния скоростей в начальном сечении по длине щели показали, что длина щели выбрана достаточной для того, чтобы исключить влияние концов щели на распределение скоростей в середине струи. Начальные участки исследованных струй, соответствующие представленным на фиг. 1 распределениям скоростей на срезе щели, изображены схематично в нижней части фиг. 1.

На фиг. 2 сплошной кривой представлено характерное изменение осевой скорости по сечениям, лежащим в области автомодельности струи, которая соответствует основному участку струи. В качестве примера приведена струя с равномерным



Фиг. 3

начальным профилем осевой скорости 2 (см. фиг. 1). Расчет выполнен по формуле (2.7) с учетом лишь автомодельного члена. На фиг. 2 нанесены также результаты измерений скоростей в сечениях, которые отстоят от среза щели на расстояниях, соответствующих 8, 10 и 12 калибрам (точки 1, 2, 3 соответственно; $y_{0,5}$ — координата, в которой $u = 0.5 u_m$).

На фиг. 3 представлено изменение безразмерной скорости на оси струй \bar{u} по длине струи для различных сопел (фиг. 3, а, б, в, г соответствуют соплам № 1, 2, 3, 4). Здесь принято

$$\bar{u} = \frac{u_m d^{1/2}}{u_0 s^{1/2}}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{d^{3/2}} \quad (3.1)$$

где u_0 — средняя расходная скорость воздуха через щель, d — ширина щели.

Кривая 1 на фиг. 3 во всех случаях соответствует изменению u , вычисленному по формуле (2.7) ($\zeta = 0$) с учетом лишь первого (автомодельного) члена. В ре-

зультате сравнения экспериментально полученных значений осевой скорости на оси струи в различных сечениях с формулой (2.7) была определена постоянная интегрирования γ для каждой струи. На фиг. 3, а, б, в, г представлено изменение \bar{u} (кривые 2), вычисленное по формуле (2.7), с полученными значениями γ , равными 0,2, 0,3, 0,8, 1,0 соответственно для каждой из струй. Полученные кривые вполне удовлетворительно согласуются с экспериментальными значениями скоростей в переходных участках струй. Границей переходного и основного участков струи можно считать сечение, в котором автомоделльная кривая 1 и кривая, соответствующая неавтомоделльному решению, сливаются.

Поступило 7 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Tollmien W. Berechnung turbulente Ausbreitung-svorgänge. ZAMM, 1926, Bd 6, H. 6, S. 468—478.
2. Reichardt H. Über eine neue Theorie der freien Turbulenz. ZAMM, 1941, Bd 21, S. 257.
3. Görtler A. Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf grund eines neuen Näherungsansatzes. ZAMM, 1942, Bd 22, H. 5, S. 244.
4. Forthman E. Über turbulente Strahlansbreitung. Ingr-Arch., 1934, Bd 5, H. 1, S. 42.
5. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
6. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. М., «Машиностроение», 1969.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
8. Бейтман Г., Эрдейи Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., «Наука», 1965.
9. Коробко В. И., Фалькович С. В. Некоторые неавтомоделльные задачи теории струйных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.