

УДК 532.517.4

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОПЕРЕЧНЫМ СДВИГОМ

Г. С. ГЛУШКО

(Москва)

Предложена система дифференциальных уравнений для описания поведения средних величин в стационарных, плоских в среднем турбулентных течениях типа пограничного слоя. Система уравнений замкнута эмпирическими функциями турбулентной кинематической вязкости, диссипации энергии турбулентности и коэффициента диффузии энергии турбулентности от безразмерных параметров, выраженных через энергию турбулентности, масштаб турбулентности, их производные, расстояние до твердой поверхности и молекулярную кинематическую вязкость.

Полученная система интегрировалась для случая обтекания плоской пластины. Приводятся результаты интегрирования в сравнении с экспериментальными данными.

1. Система уравнений. Для расчета стационарных и плоских в среднем турбулентных течений несжимаемой жидкости типа пограничного слоя¹ используется система дифференциальных уравнений, подобная предложенной в 1942 г. А. Н. Колмогоровым [1]. Система состоит из четырех уравнений:

уравнения Рейнольдса

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (\varepsilon = \alpha \sqrt{e} L) \quad (1.1)$$

(коэффициент α не предполагается постоянным)

уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

уравнения энергии турбулентности

$$u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial e}{\partial y} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \omega \quad (1.3)$$

уравнения масштаба турбулентности

$$u \frac{\partial \lambda}{\partial x} + w \frac{\partial \lambda}{\partial y} = v \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} - 0.075 \frac{\varepsilon}{e} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \lambda + 0.2 \left[1 - \frac{2\lambda}{\eta^2} \varphi \left(\frac{2\lambda}{\eta^2} \right) \right] F$$

$$w = v + \frac{v}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} - \frac{v + D}{e} \frac{\partial e}{\partial y} \quad (1.4)$$

Здесь η — расстояние от рассматриваемой точки до твердой поверхности²; $\varphi(2\lambda/\eta^2)$ — функция, равная нулю при нулевом значении аргумен-

¹ Под такими течениями понимаются течения, у которых средние величины не зависят от одной из трех координат пространства при условии, что компонента средней скорости вдоль этой координаты тождественно равна нулю. Кроме того, характерный размер области течения вдоль одной из оставшихся осей y много меньше характерного размера вдоль другой оси x .

² При расположении начала координат на обтекаемой твердой поверхности $\eta = y$. Если в потоке нет твердой поверхности (например, при истечении струи в заполненное пространство), то считается, что она удалена вдоль оси y на бесконечность ($\eta = \infty$).

та и равная единице при значении аргумента, равном единице; $F = \omega L^2 / \epsilon$; ω — диссипация энергии турбулентности ϵ ; $\lambda = L^2 / 2$; L — масштаб турбулентности; ϵ — турбулентная кинематическая вязкость; D — коэффициент диффузии энергии турбулентности.

Вывод уравнений (1.3) и (1.4) достаточно подробно изложен в [2, 3]. В этих работах показано, что основными членами, определяющими баланс энергии турбулентности в уравнениях (1.3) и (1.4), являются члены, выражающие диссипацию энергии турбулентности и работу напряжения турбулентного трения $-\langle u'v' \rangle = \epsilon (\partial u / \partial y)$, приводящую к порождению энергии турбулентности. В [3] указывалось, что причиной расхождения расчетных и экспериментальных данных является плохая аппроксимация этих членов.

2. Турбулентная вязкость. В работах [1-3] предполагалось, что при больших числах Рейнольдса $r = \sqrt{\epsilon} L / \nu$ турбулентную вязкость можно представить в виде

$$\epsilon = \alpha \sqrt{\epsilon} L \quad (\alpha = \text{const}) \quad (2.1)$$

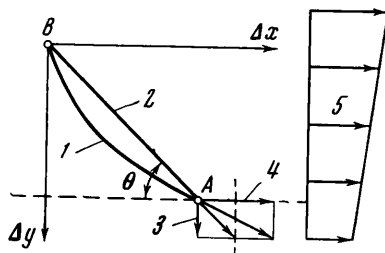
где α — константа. Однако анализ экспериментальных данных, проведенный в [3], показал, что α сильно изменяется поперек пограничного слоя и, более того, переменность α необходимо учитывать для совпадения расчетных распределений средней скорости с экспериментальными.

Напряжение турбулентного трения появляется в потоке с неравномерной средней скоростью вследствие того, что пульсации поперечной составляющей скорости v' перемещают частицы жидкости (моли) в поперечном направлении, совершая обмен средним количеством движения между слоями.

Пусть в некоторый момент времени под влиянием пульсации поперечной составляющей скорости v' , возникшей в точке B , моль начинает двигаться в поперечном направлении (фиг. 1). Переходя из слоя, где средняя скорость u больше, в слой, где она меньше, моль будет создавать в последнем пульсацию продольной составляющей $u_* = \Delta y (\partial u / \partial y)$, где Δy — величина смещения моля в поперечном направлении от точки B . Пульсации v' и u_* статистически связаны между собой. Так как перемещение моля происходит в жидкости, то по мере передвижения его энергия будет убывать за счет потерь. Предполагается, что потери энергии моля зависят от расстояния между точкой его вылета и точкой, в которой он находится. Тогда для моля, вылетевшего из точки B и попавшего в точку A , величины компонент поперечной и продольной составляющих равны

$$v_a' = v_b' \sqrt{f(\beta)}, \quad u_{*a}' = \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} \sqrt{f(\beta)} \quad (2.2)$$

где $f(\beta)$ — функция, выражающая потери энергии; β — отношение расстояния между точками A и B к масштабу турбулентности. В дальнейшем для простоты под βL понимается среднее расстояние, которое пробегают



Фиг. 1. 1 — траектория моля; 2 — хорда длиной βL ; 3 — вектор наведенной в точке A пульсации поперечной скорости v_a' ; 4 — вектор наведенной в точке A пульсации продольной скорости u_{*a}' , статистически связанной с v_a' ; 5 — распределение средней скорости в окрестности точки A $\Delta x = [(\partial u / \partial y) / v'] \Delta y^2$, $v_a' = v_b' \sqrt{f(\beta)}$, $u_{*a}' = \beta L \sin \theta (\partial u / \partial y) \cdot \sqrt{f(\beta)}$.

моли, достигшие рассматриваемой точки A . Из (2.2) следует, что траектория пульсационного движения моля — парабола и что вектор, соединяющий точки B и A , наклонен к продольной оси x под углом θ . Этот угол можно вычислить из соотношения

$$\sin^2 \theta = \frac{v'^2}{v'^2 + 1/4 [\beta^2 L^2 (\partial u / \partial y)^2 \sin^2 \theta]} \quad (2.3)$$

Пульсации продольных и поперечных составляющих скорости в точке A , происшедшие из-за прилета в нее молей из соседних точек, статистически связаны между собой, и как раз они создают турбулентное напряжение трения

$$-u'v' = \beta f(\beta) v' L \sin \theta \partial u / \partial y \quad (2.4)$$

Но в точке A могут возникнуть пульсации скоростей, не связанные с прилетом в нее молей, т. е. пульсации, приводящие к вылету молей из точки A . Таким образом, условно можно разбить пульсации скоростей в каждой точке на наведенные и собственные. Предполагается, что компоненты собственных пульсаций скорости можно считать статистически не связанными между собой и компонентами наведенных пульсаций, а их интенсивности — одинаковыми. Тогда, если обозначить сумму энергий собственной и наведенной пульсаций поперечной составляющей $1/2 v'^2$, то для полной энергии пульсаций скорости e в рассматриваемой точке A можно записать

$$e = 3/2 v'^2 + 1/2 (\beta L \sin \theta \partial u / \partial y)^2 f(\beta) \quad (2.5)$$

Из соотношений (2.5) и (2.3) можно выразить величину χ через безразмерный градиент средней скорости z . Если β таково, что $f(\beta) \geq 3/8$, то

$$\chi(z) = \frac{2\beta^2 z^2}{2 + \beta^2 f(\beta) z^2} \quad \left(\chi = \beta^2 z^2 \sin^2 \theta, \quad z = \frac{L}{\sqrt{e}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

При помощи (2.6) можно получить выражения для v' и $\sin \theta$; тогда после подстановки их в (2.4) и осреднения можно получить выражения: для безразмерного напряжения турбулентного трения

$$-\frac{\langle u'v' \rangle}{e} = \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \beta f(\beta) \frac{2z}{2 + \beta^2 f(\beta) z^2} = \tau(z) \quad (2.7)$$

для коэффициента α в (2.1)

$$\alpha(z) = \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \beta f(\beta) \frac{2}{2 + \beta^2 f(\beta) z^2} \quad (2.8)$$

Таким образом, из-за возникающей под влиянием сдвига неизотропности турбулентных пульсаций скорости коэффициент пропорциональности α в (2.1) является функцией безразмерного градиента средней скорости. При возрастании безразмерного градиента средней скорости коэффициент α уменьшается так, что безразмерное напряжение турбулентного трения остается всюду ограниченным¹.

Однако влиянием безразмерного градиента средней скорости на турбулентную вязкость не исчерпываются воздействия неравномерности по пространству параметров течения. В случае, когда производная $\partial e / \partial y$ не рав-

¹ Из интегральных неравенств легко показать, что $|\langle u'v' \rangle| / e \leq 2$.

на нулю, скорости подхода молей сверху и снизу к точке A будут различными и, следовательно, углы подхода молей θ будут также разными. Поэтому

$$-u'v' = \beta f(\beta) L \frac{\partial u}{\partial y} (v'_+ \sin \theta_+ + v'_- \sin \theta_-) / 2 \quad (2.9)$$

Здесь индексы плюс и минус относятся к молям, подходящим к точке A сверху и снизу. Для относительно малых значений производной $\partial e / \partial y$ можно представить

$$v'_\pm \approx v' \pm \frac{\partial v'}{\partial y} L \sin \theta_\pm, \quad L \sin \theta_\pm \approx L \sin \theta \pm L \Delta \theta \quad (2.10)$$

Величину приращения угла $\Delta \theta$ можно оценить, исходя из равенства

$$\Delta \theta \approx \frac{\Delta v'}{\sqrt{v'^2 + \beta^2 L^2 (\partial u / \partial y)^2 \sin^2 \theta / 4}} \approx \sin^2 \theta \frac{L (\partial v' / \partial y)}{v'} \quad (2.11)$$

Так как в точке A $v' = K(z) \sqrt{e}$, то, подставляя (2.10) и (2.11) в (2.9) и обозначая безразмерный градиент энергии турбулентности $\zeta = L(\partial e / \partial y) / e$, можно получить

$$-u'v' \approx \beta f(\beta) v' L \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} (1 + 0.25 \sin^2 \theta \zeta^2) \quad (2.12)$$

Так как v' и $\sin \theta$ определяются значениями энергии турбулентности и безразмерного градиента средней скорости и при не очень больших $z \sin^2 \theta$ не слишком сильно отличается от единицы, то

$$-\langle u'v' \rangle / e \approx \tau(z) (1 + 0.25 \zeta^2) \quad (2.13)$$

где $\tau(z)$ определена формулой (2.7).

Если в потоке имеется непроницаемая твердая поверхность, то вследствие условий прилипания и молекулярной вязкости около нее образуется зона, в которой неизотропность турбулентности порождается не только безразмерным градиентом средней скорости, но и действием стенки, ограничивающей перемещение молей поперек течения. Это ограничение тем сильнее, чем меньше безразмерное расстояние взаимодействия с твердой поверхностью $s = \eta \sqrt{e} / \nu$, которое представляет собой отношение сил инерции моля при его перемещении к твердой поверхности к действующим при таком перемещении силам вязких напряжений. Из всех рассуждений следует окончательный вид формул:

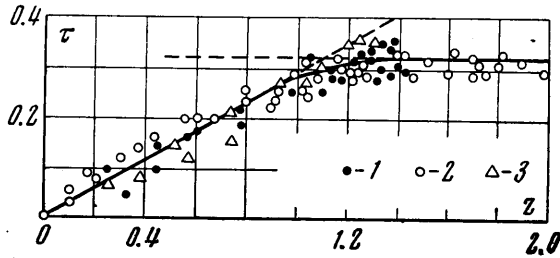
для безразмерного напряжения турбулентного трения

$$-\langle u'v' \rangle / e = \tau(z) (1 + 0.25 \zeta^2) H(s) \quad (2.14)$$

для турбулентной вязкости

$$\varepsilon = \alpha(z, \zeta, s) \sqrt{e} L, \quad \alpha = \tau(z) z^{-1} (1 + 0.25 \zeta^2) H(s) \quad (2.15)$$

Здесь $\tau(z)$ определена равенством (2.7), а $H(s)$ — функция, стремящаяся к единице при $s \rightarrow \infty$ и убывающая при $s \rightarrow 0$.



Фиг. 2. Точки 1 — пограничный слой на плоской пластине [4, 5, 8], точки 2 — течение в плоском канале [8], точки 3 — течение в следе за цилиндром [10].

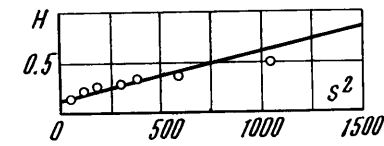
Экспериментальные данные, подтверждающие приведенные выше рассуждения, представлены на фиг. 2, на которой изображена функция

$$\tau(z) = \langle u'v' \rangle / [e(1 + 0.25z^2)] \quad (2.16)$$

полученная по измерениям характеристик турбулентности. Здесь представлена обработка измерений различных авторов в трех различных по характеру течениях: течение в турбулентном пограничном слое плоской пластины [4, 5, 8], течение в плоском канале [8] и течение в следе за цилиндром [7].

На фиг. 3 изображена функция $H(s)$ для области, непосредственно прилегающей к твердой поверхности, полученная по данным Клебанова, опубликованным в [4].

Для вычислений турбулентной вязкости, необходимых при интегрировании системы уравнений (1.1)–(1.4) на ЭВМ, функция $\tau(z)$ аппроксимировалась кусками прямых и парабол, проведенных в диапазоне значений z , исследованном экспериментально, по экспериментальным точкам, как показано на фиг. 2, и продолжена на большие значения z в соответствии с (2.7). При такой аппроксимации $\tau(z)$ количество констант в окончательных формулах оказывается большим. Однако на самом деле их две: β и $f(\beta)$. Функция $H(s)$ также аппроксимировалась кусками прямых и парабол в соответствии с фиг. 3.



Фиг. 3. Функция $H(s)$; точки — данные [4]

Из проведенных при выводе формулы турбулентной вязкости рассуждений очевидно, что и другие коэффициенты переноса — турбулентная теплопроводность, коэффициент турбулентной диффузии энергии турбулентности и т. д. — тоже зависят от безразмерных градиентов средней скорости и энергии турбулентности и числа Рейнольдса $s = \eta\sqrt{e}/\nu$. Однако, учитывая малый вклад процесса диффузии энергии турбулентности в ее баланс, для коэффициента диффузии энергии турбулентности применялась более простая формула

$$D = \nu + 0.4\sqrt{e}LH_1(s) \quad (2.17)$$

Здесь $H_1(s)$ отличалась от $H(s)$ только большим значением s_0 -точки, в которой достигается пересечение параболы, идущей из точки $s = 0$, с прямой $H = 1$ (фиг. 3); $s_0 \approx 40$ для H и $s_0 \approx 300$ для H_1 .

3. Диссипация энергии турбулентности. Из экспериментальных данных по затуханию турбулентности за решетками [9] следует, что при больших числах Рейнольдса $r = \sqrt{e}L/\nu$ диссипация энергии турбулентности равна $\omega = Ae^{3/2}/L$, где $A \approx 0.4$. Однако в течениях, где энергия и масштаб турбулентности распределены неравномерно по пространству, коэффициент $A = \omega L/e^{3/2}$ оказывается непостоянным. Распределение в пограничном слое плоской пластины, вычисленное по данным Клебанова, приведено в [3].

Диссипация энергии турбулентности пропорциональна сумме средних от квадратов производных по координатам пульсаций компонент скоростей

$$\omega = \nu \sum_{i,k} \langle (\partial u_i' / \partial x_k)^2 \rangle$$

Поэтому можно предположить, что в эту сумму вносят свой вклад производные по координатам от энергии и масштаба турбулентности, подобно тому, как в производную от функции $f(x) = A(x)\sin(x/L(x))$ вносят свой вклад производные от амплитуды dA/dx и длины волны dL/dx . Из этих соображений и соображений размерности можно написать следующую формулу:

$$\omega = A_0 \frac{e^{3/2}}{L} + B_0 \sqrt{e} L \left(\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial y} \right)^2 - C \frac{e^{3/2}}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)^2$$

Отсюда величину коэффициента $A = \omega L / e^{3/2}$ можно выразить в следующем виде:

$$\frac{\omega L}{e^{3/2}} = A \left(\zeta^2, \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)^n \right) = A_0 + B \zeta^2 - C \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)^n \quad \left(B = \frac{B_0}{4} \right) \quad (3.1)$$

Анализ экспериментальных данных, опубликованных в работах [4-6, 8, 10] для трех различных по характеру турбулентных течений, показал, что $n \approx 4$, $A_0 \approx 2B \approx C \approx 0.2$. Это иллюстрируется фиг. 4, где по осям абсцисс и ординат отложены соответственно величины

$$A = 0.2 + 0.09\zeta^2 - 0.2(\partial L / \partial y)^4, \quad \Omega = \omega L / e^{3/2}$$

С точностью до разброса экспериментальных точек $\Omega \approx A$.

Формула (3.1) с определенными из экспериментальных данных значениями коэффициентов для потоков с равномерной по пространству турбулентностью ($\zeta = (\partial L / \partial y) = 0$) дает значение коэффициента A в два раза более низкое, чем значение, измеренное по затуханию турбулентности за решетками. Такое расхождение можно объяснить погрешностью в измерении термоанемометром среднеквадратичного значения производной пульсации скорости по времени, на основании которого делалась оценка диссипации энергии турбулентности в перечисленных выше работах. Оценка диссипации энергии при затухании турбулентности за решетками в [2] делалась на основе измерений $\partial \langle u'^2 \rangle / \partial x$, что намного точнее, особенно если учесть, что $1 / \langle u'^2 \rangle \sim x$. Поэтому в окончательной формуле коэффициент A_0 был увеличен в два раза.

При малых числах $r = \sqrt{e}L / \nu$ диссипация энергии турбулентности выражается зависимостью

$$\omega = \nu \frac{5\pi}{4} \frac{e}{L^2} \quad (3.2)$$

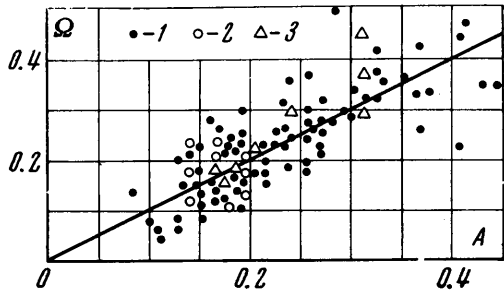
Из (3.1) и (3.2) была составлена следующая формула:

$$\omega = \nu \psi(r) \varphi_1(\zeta^2, (\partial L / \partial y)^4) e / L^2 \quad (3.3)$$

где $\psi(r) \rightarrow 5\pi/4$ при $r \rightarrow 0$ и имеет асимптоту $0.4r$ при $r \rightarrow \infty$, а $\varphi_1(\zeta^2, (\partial L / \partial y)^4)$ отражает структуру (3.1)

$$\varphi_1 = \frac{1 + 0,25\zeta^2}{\sqrt{1 + 2,5(\partial L / \partial y)^4}} \quad (3.4)$$

Зависимость такой структуры от $(\partial L / \partial y)^4$ выбрана для того, чтобы избежать отрицательных значений диссипации ω при больших $|\partial L / \partial y|$. В исследованном экспериментально диапазоне значений $|\partial L / \partial y|$ вычисления ω по формулам (3.1) и (3.4) дают близкие результаты.



Фиг. 4. Точки 1 — пограничный слой на плоской пластине [4, 5, 6], точки 2 — течение в плоском канале [8], точки 3 — течение в следе за цилиндром [10]

4. Результаты расчетов течения в пограничном слое плоской пластины. Система (1.1) — (1.4) с функциями для ϵ , ω и D , полученными в двух предыдущих пунктах, интегрировалась методом сеток на ЭВМ для случая пограничного слоя около непроницаемой плоской пластины ($(\partial p / \partial x) \equiv 0$). Интегрирование начиналось с некоторого расстояния x_0 от начала пластины

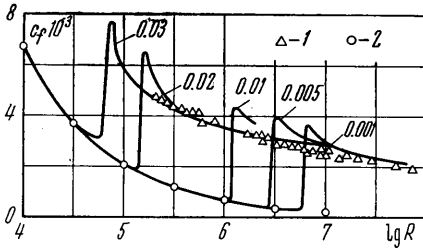
$$R_0 = x_0 U_\infty / \nu = 10^4$$

В этом сечении пограничного слоя были заданы распределения средней скорости энергии и масштаба турбулентности

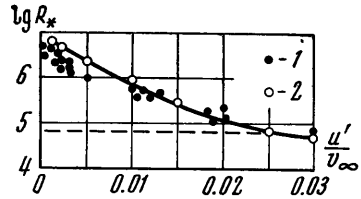
$$u(y) = U_\infty f(y), \quad e(y) = E(x_0) (f(y))^2, \quad L(y) = \delta(x_0) f_1(y)$$

Здесь $f(y)$ — распределение Блазиуса при $x = x_0$; $E(x_0)$ — энергия, имитирующая интенсивность турбулентности набегающего потока; $\delta(x_0)$ — толщина ламинарного пограничного слоя при $x = x_0$; $f_1(y)$ — функция, которая при $y / \delta(x_0) < 0.75$ равна $f_1 = y$, при $y / \delta(x_0) > 1.25$ равна $f_1 = 1$; на участке $0.75 \leq y / \delta(x_0) \leq 1.25$ функция f_1 задана в виде куска параболы так, что в граничных точках достигается гладкое сопряжение.

Граничные условия для компонент средней скорости при $y = 0$ были



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 5. Зависимость $c_f(R, u' / U_\infty)$, полученная интегрированием. Цифры на кривых показывают значения $u' / U_\infty = \sqrt[3]{2/3} E(x_0) / U_\infty$. Точки 1 — экспериментальные данные по коэффициенту местного трения в турбулентном пограничном слое на плоской пластине из [11]; точки 2 — расчет для ламинарного течения

Фиг. 6. Зависимость $R_*(u' / U_\infty)$, полученная интегрированием; точки 1 — экспериментальные данные по точке перехода от ламинарного режима течения к турбулентному из [12, 13]; точки 2 — точки перехода, определенные из решений; штриховая линия соответствует точке потери устойчивости по линейной теории

заданы, исходя из условий прилипания жидкости к твердой непроницаемой поверхности

$$u = v = e = 0$$

Из определения масштаба турбулентности, данного в [3], следует, что $L = \lambda = 0$ при $y = 0$.

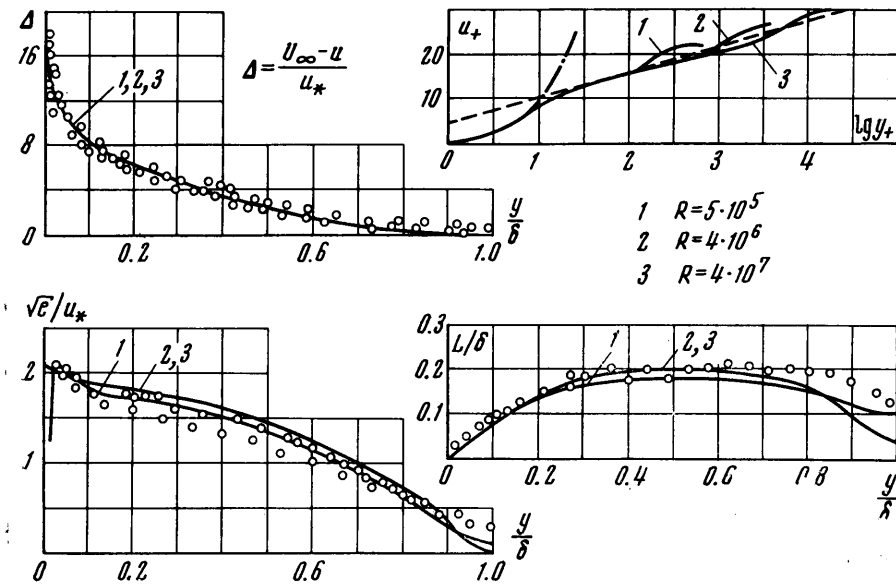
При $y \rightarrow \infty$ средняя скорость u стремится к скорости набегающего потока U_∞ , энергия и масштаб турбулентности стремятся к $E(x)$ и $\sqrt{2\Lambda(x)}$, которые определяются из решения системы уравнений, получающихся из (1.3) и (1.4) после выбрасывания всех членов с производными по y .

Были получены решения для ряда вариантов течения с различными $u' = \sqrt[3]{2/3} E(x_0)$. За поведением этих решений лучше всего проследить по поведению коэффициента местного трения c_f , который в процессе интегрирования вычислялся по значению производной du / dy при $y = 0$.

При заданном значении u' коэффициент местного трения на отрезке от x_0 до некоторого x_* почти не отличается от значений, даваемых ламинар-

ной теорией, затем следует быстрый рост коэффициента местного трения и при дальнейшем увеличении его значения совпадают со значениями, измеренными для турбулентного пограничного слоя. Величина x_* и соответствующее ему число Рейнольдса $R_* = x_* U_\infty / \nu$ сильно изменяются при изменении u' . Если x_* трактовать как точку начала перехода от ламинарного режима течения в пограничном слое к турбулентному, то после интегрирования серии вариантов с различными u' можно построить зависимость числа Рейнольдса перехода от интенсивности турбулентности набегающего потока $R_*(u' / U_\infty)$. На фиг. 5 и 6 сплошными линиями изображены полученные в процессе интегрирования зависимости $c_f(R, u' / U_\infty)$ и $R_*(u' / U_\infty)$ соответственно в сравнении с экспериментальными данными.

На фиг. 7 изображены в сравнении с экспериментальными данными полученные в различных сечениях «турбулентной» части пограничного слоя распределения средней скорости u_+ , дефекта средней скорости $\Delta = (U_\infty - u) / u_*$, масштаба турбулентности L/δ и энергии турбулентности \sqrt{e}/u_* . Экспериментальные данные для дефекта скорости взяты из [14], для энергии турбулентности получены автором по данным работ [4, 5].



Фиг. 7. Распределения параметров течения в «турбулентной» части пограничного слоя при различных числах Рейнольдса. Штрих-пунктирная линия — $u_+ = y_+$; пунктирная линия — $u_+ = 2.44 \ln y_+ + 4.9$; сплошные линии — результаты решений; точки — экспериментальные данные

Для масштаба турбулентности оценка проводилась автором по первичным данным [15]. В [15] приведены измерения двухточечных корреляционных функций

$$R_{11}'(y, h) = \langle u'(y)u'(y+h) \rangle / (\langle u'^2(y) \rangle \langle u'^2(y+h) \rangle)^{1/2}$$

где h принимает как положительные, так и отрицательные значения. По этим функциям были построены функции

$$R_{11}(y, h) = \langle u'(y + 1/2h)u'(y - 1/2h) \rangle / (\langle u'^2(y + 1/2h) \rangle \langle u'^2(y - 1/2h) \rangle)^{-1/2}$$

и оценка масштаба делалась по формуле

$$L(y) = \int_0^{\infty} R_{11}(y, h) dh$$

В заключение автор благодарит Г. И. Петрова и В. С. Авдучевского за внимание к работе и полезные советы.

Поступило 10 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Сер. физ., 1942, т. 6, № 1, 2.
2. Глушко Г. С. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 4.
3. Глушко Г. С. Дифференциальное уравнение для масштаба турбулентности и расчет турбулентного и пограничного слоя на плоской пластине. В сб. «Турбулентные течения», М., «Наука», 1970.
4. Hinze I. O. Turbulence an introduction to its mechanism and theory. McGRAW — HILL BOOK Co., Inc., 1959. (Рус. перев.: Турбулентность, ее механизм и теория, М., Физматгиз, 1963.)
5. Townsend A. A. The structure of the turbulent boundary layer. Proc. Cambr. Philos. Soc., 1951, vol. 47, pt 11.
6. Laufer J. Some recent measurements in a two-dimensional turbulent channel. J. Aeronaut. Sci., 1950, vol. 17, No. 5.
7. Townsend A. A. The fully developed turbulent wake of a circular cylinder. Australian J. Res., 1949, vol. 2A, p. 451.
8. Ротта И. К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1967.
9. Batchelor G. K. The theory of homogeneous turbulence. Cambridge, 1963. (Рус. перев.: Теория однородной турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1955.)
10. Townsend A. A. Momentum and energy diffusion in the turbulent wake of a cilinder. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1949, vol. 157, No. 1048.
11. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
12. Schlichting H. Entstehung der Turbulenz. Berlin, 1959. (Рус. перев.: Возникновение турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1962.)
13. Wells C. S. jr. Effects of free stream turbulence on boundary layer transition. AIAA, Journal, 1967, vol. 5, No. 1. (Рус. перев.: Влияние турбулентности набегающего потока на переход в пограничном слое. Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 5, № 1.)
14. Клаузер Ф. Турбулентный пограничный слой. В сб. «Проблемы механики», вып. 2, М., Изд-во иностр. лит., 1959.
15. Захаров Ю. Г., Репих Е. У., Филиппов В. М., Виноградов М. И. Исследование основных характеристик турбулентности в пограничном слое плоской пластины. Тр. ЦАГИ, 1959, № 731.