УДК 532.517

О ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОМ ОПИСАНИИ СТАЦИОНАРНОЙ И ОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В. И. КЛЯЦКИН

(*Москва*)

Выводится система двух функциональных уравнений, описывающая стационарную во времени и однородную в пространстве турбулентность. Строится теория возмущений и обсуждается характер гипотез, соответствующих обрыванию ее рядов.

1. Рассмотрим течения несжимаемой жидкости. Они полностью характеризуются своими соленоидальными полями скорости $u(M)$, где $M=(x,\ t)$ — точки пространства — времени, и описываются системой уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}-\nu\Delta u_i=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}-u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+f_i \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0 \qquad (\operatorname{div}\mathbf{f}=0) \tag{1.2}$$

Здесь ρ — плотность жидкости, а давление p выражается через поле скорости в тот же момент времени при помощи соотношения

$$p(\mathbf{x},t)=-\rho\,\Delta^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\frac{\partial^2 u_\alpha(\mathbf{x}',t)\,u_\beta(\mathbf{x}',t)}{\partial x_\alpha'\,\partial x_\beta'} \tag{1.3}$$

где Δ^{-1} — интегральный оператор, обратный оператору Лапласа, а по повторяющимся индексам производится суммирование.

Будем считать течения жидкости турбулентными, ввиду чего рассматриваем поля скорости $\mathbf{u}(M)$ как случайные.

Наиболее компактное полное статистическое описание поля $u(M)$ заключается в задании его характеристического функционала

$$\Phi_1[\mathbf{z}(M)]=\langle\exp\{i\textstyle\int dM\mathbf{z}(M)\mathbf{u}(M)\}\rangle \tag{1.4}$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю турбулентных течений. Динамическое уравнение для этого функционала в случае отсутствия силового воздействия (т. е. $\mathbf{f}\equiv 0$) было получено в работе [1] (см. также [2]) на основе метода, предложенного Хопфом [3] для чисто пространственного функционала.

Для стационарного режима однородной турбулентности удобно рассматривать характеристический функционал пространственно-временного фурье-образа поля скорости

$$\Phi[\mathbf{z}(k,\omega)]=\Phi_1\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}\,d\omega\,\mathbf{z}(\mathbf{k},\omega)\exp\{i(\mathbf{kx}+\omega t)\}\right] \tag{1.5}$$

Рассмотрим теперь модель турбулентного движения, при которой жидкость находится в поле внешних сил $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$, рассматриваемых как гауссовские случайные силы со средним значением, равным нулю. Такая модель, конечно, фиктивна, так как силы $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ не имеют реальных аналогов. Однако если считать, что силы $\mathbf{f}$ обеспечивают заметный средний приток энергии лишь к крупномасштабным компонентам турбулентности, то вследствие представлений теории локально-изотропной турбулентности можно ожидать, что фиктивный характер поля $\mathbf{f}$ не скажется на статистических свойствах мелкомасштабных компонент турбулентности. Поэтому мелкомасштабные свойства турбулентности могут быть правильно описаны на основе такой модели.

Уравнения (1.1), (1.2) со случайными силами изучались многими авторами. Так, в работе [4] была построена теория возмущений для модельного скалярного уравнения, имеющего ту же квадратичную нелинейность, что и уравнение (1.1), на основе которой была построена теория возмущений для пространственно-временной корреляционной функции поля скорости. Далее, в работе [4], утверждалось, что путем перегруппирования членов в этом ряду возмущения можно получить замкнутую систему уравнений, имеющих вид интегральных уравнений с бесконечным числом членов, относительно трех функций — корреляционной функции поля скорости, средней функции Грина и обобщенной вершинной части, характеризующей статистическое взаимодействие между гармониками поля скорости. При этом, как было отмечено в [5], в работе [4] была допущена неточность, которая поставила под сомнение полученные в [4] результаты. Истинное положение вещей, по-видимому, наиболее просто можно получить из анализа поведения пространственно-временного характеристического функционала поля скорости.

Легко написать уравнение для совместного характеристического функционала полей скорости и внешних сил (см., например, [2]). Однако такое уравнение содержит много избыточной информации и его трудно использовать для построения теории возмущений.

В работе [6] было получено замкнутое уравнение для пространственного характеристического функционала поля скорости в присутствии случайных гауссовских внешних сил δ-коррелированных во времени.

На основе этого уравнения [7] [1] Эдварсу удалось построить теорию возмущений, позволяющую получить уравнение для спектральной плотности энергии, аналогичное кинетическому уравнению для фононов (т. е. квантов звука в твердом теле) [8]. Однако, по мнению Эдварса [9], неадекватность чисто пространственного подхода к описанию взаимодействий между компонентами Фурье поля скорости развитой турбулентности служит причиной неудачи попыток получения колмогоровского спектра турбулентности. Для его получения Эдварс считает необходимым рассмотрение пространственно-временных характеристик поля скорости. Построению замкнутой системы уравнений, которым удовлетворяет пространственно-временной характеристический функционал поля скорости и изучение некоторых свойств, вытекающих из этой системы, и посвящена данная работа.

2. Фурье-образ скорости (по пространственным и временной координатам) в присутствии поля внешних сил, после исключения давления с помощью формулы (1.3), удовлетворяет уравнению

$$(i\omega + \nu k^2) u_i(k) = f_i(k) - {}^1/_2\, i \int d^4k_1\, d^4k_2\, \Lambda_{i,\alpha\beta}(k_1, k_2; k)\, u_\alpha(k_1)\, u_\beta(k_2) \tag{2.1}$$

$$u_i(k) = \int d\mathbf{x}\, dt\, u_i(\mathbf{x}, t) \exp\{-i(\mathbf{kx} + \omega t)\}$$

Здесь через k обозначен четырехмерный вектор с координатами $(\mathbf{k}, \omega)$, $u_i^*(k) = u_i(-k)$ в силу вещественности поля $u_i(\mathbf{x}, t)$, а

$$\Lambda_{i,\alpha\beta}(k_1, k_2; k) = (2\pi)^{-1} \Lambda_{i,\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k})\, \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega)$$

$$\Lambda_{i,\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \{k_\alpha \Delta_{i\beta}(\mathbf{k}) + k_\beta \Delta_{i\alpha}(\mathbf{k})\}\, \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})$$

$$\Delta_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j k^{-2} \qquad (i,\ \alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3)$$

---

[1] В работе [7] вместо характеристического функционала используется «плотность вероятностей в функциональном пространстве индивидуальных реализаций случайного поля скорости», которую можно рассматривать как функциональное преобразование Фурье от характеристического функционала.

Вследствие гауссовости, однородности и стационарности поля внешних сил $f_i(k)$ различные статистические характеристики поля скорости будут определяться величиной

$$\langle f_i(k_1) f_j(k_2) \rangle = {}^1/{}_2 \delta^4(k_1 + k_2) F_{ij}(k_1) \tag{2.2}$$

В силу соленоидальности поля f

$$F_{ij}(k) = \Delta_{ij}(\mathbf{k}) F(k)$$

где $F(k)$ — пространственно-временной спектр внешних сил.

Рассмотрим характеристический функционал поля скорости

$$\Phi[\mathbf{z}(k)] = \left\langle \exp\left\{ i \int d^4k\, u_\alpha(k) z_\alpha(k) \right\} \right\rangle \tag{2.3}$$

Для него из уравнения (2.1) получаем уравнение

$$(i\omega + \nu k^2) \frac{\delta \Phi}{\delta z_i(k)} = i \left\langle f_i(k) \exp\left\{ i \int d^4k_1\, u_\alpha(k_1) z_\alpha(k_1) \right\} \right\rangle -$$

$$- \frac{1}{2} \int d^4k_1\, d^4k_2\, \Lambda_{i,\alpha\beta}(k_1, k_2; k) \frac{\delta^2 \Phi}{\delta z_\alpha(k_1)\, \delta z_\beta(k_2)} \tag{2.4}$$

где символом $\delta / \delta z$ обозначена функциональная (вариационная) производная.

В работе [6] было получено выражение для корреляции гауссовской величины f, среднее значение которой ровно нулю, с функционалом от нее $R[f]$

$$\langle f(\xi) R[f] \rangle = \int d\eta \, \langle f(\xi) f(\eta) \rangle \left\langle \frac{\delta R[f]}{\delta f(\eta)} \right\rangle \tag{2.5}$$

где через ξ обозначены все аргументы функции f. При помощи этого соотношения, можно переписать первый член в правой части уравнения (2.4) в виде

$$-\frac{1}{2} F_{ij}(k) \int d^4\varkappa\, z_\alpha(\varkappa) \Psi_{\alpha j}[\varkappa, -k; \mathbf{z}]$$

$$\Psi_{ij}[k, k'; \mathbf{z}] = \left\langle \frac{\delta u_i(k)}{\delta f_j(k')} \exp\left\{ i \int d^4\varkappa\, u_\alpha(\varkappa) z_\alpha(\varkappa) \right\} \right\rangle \tag{2.6}$$

Тогда уравнение (2.4) принимает вид

$$(i\omega + \nu k^2) \frac{\delta \Phi}{\delta z_i(k)} = -\frac{1}{2} F_{ij}(k) \int d^4\varkappa z_\alpha(\varkappa) \Psi_{\alpha j}(\varkappa, -k; \mathbf{z}) -$$

$$- \frac{1}{2} \int d^4k_1 d^4k_2 \Lambda_{i,\alpha\beta}(k_1, k_2; k) \frac{\delta^2 \Phi}{\delta z_\alpha(k_1) \delta z_\beta(k_2)} \tag{2.7}$$

Уравнение для величины $\delta u / \delta f$ можно получить, варьируя уравнение (2.1)

$$(i\omega + \nu k^2) \frac{\delta u_i(k)}{\delta f_j(k')} = \delta_{ij} \delta^4(k - k') - \tag{2.8}$$

$$- i \int d^4k_1 d^4k_2 \Lambda_{i,\alpha\beta}(k_1, k_2; k) u_\alpha(k_1) \frac{\delta u_\beta(k_2)}{\delta f_j(k')}$$

и, следовательно, для функционала Ψ получим уравнение

$$(i\omega + \nu k^2)\Psi_{ij}[k, k'; \mathbf{z}] = \delta_{ij}\delta^4(k - k')\Phi[\mathbf{z}] - $$
$$- \int d^4k_1\, d^4k_2 \Lambda_{i,\alpha\beta}(k_1, k_2; k) \frac{\delta}{\delta z_\alpha(k_1)} \Psi_{\beta j}(k_2, k'; \mathbf{z}) \tag{2.9}$$

Система функциональных уравнений (2.7), (2.9) для Φ и Ψ замкнута и полностью описывает статистическое поведение поля скорости.

Легко получить из этой системы замкнутое уравнение для функционала Ψ, а функционал Φ определять уже потом из (2.9).

Для средней скорости притока энергии к гармоникам поля скорости k за счет работы внешних сил легко получить (используя формулу (2.5)) выражение

$$\langle u_i(k) f_j(k') \rangle = {}^1\!/_2 F_{j\alpha}(k') \Psi_{i\alpha}[k, -k'; 0] \tag{2.10}$$

которое и определяет физический смысл функционала Ψ.

Отметим, что указанным методом можно рассматривать не только стационарный режим однородной турбулентности, но и задачи о нестационарной турбулентности и выходе ее на стационарный режим.

3. Рассмотрим, исходя из полученной системы уравнений, вывод уравнения для пространственного характеристического функционала при условии δ-коррелированности во времени внешних сил (т. е. $F(k) \equiv F(\mathbf{k})$). Для этого положим

$$z_i(k) = (2\pi)^{-1} z_i^*(\mathbf{k}) \exp\{i\omega t\}$$

Тогда характеристический функционал поля скорости принимает вид

$$\Phi[\mathbf{z}(k)] = \left\langle \exp\left\{ i \int d\mathbf{k} u_\alpha(\mathbf{k}, t) z_\alpha^*(\mathbf{k}) \right\} \right\rangle \equiv \Phi^*[\mathbf{z}^*(\mathbf{k}), t]$$

Учитывая, что имеют место соотношения

$$\frac{\delta}{\delta z_i^*(\mathbf{k})} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \exp\{i\omega t\} \delta/\delta z_i(k) \tag{3.1}$$
$$\frac{\delta}{\delta f_i(\mathbf{k}, t)} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \exp\{-i\omega t\} \delta/\delta f_i(k)$$

первое из которых легко доказывается разложением функционалов в степенные функциональные ряды, а второе является следствием преобразования Фурье, можно уравнение (2.7) после умножения на $(2\pi)^{-1} \exp\{i\omega t\}$ и интегрирования по всем ω переписать в виде

$$\frac{i}{2\pi} \int d\omega \omega e^{i\omega t} \frac{\delta \Phi}{\delta z_i(k)} + \nu \mathbf{k}^2 \frac{\delta \Phi^*}{\delta z_i^*(\mathbf{k})} =$$
$$= -\frac{1}{2} F_{ij}(\mathbf{k}) \int d\varkappa z_\alpha^*(\varkappa) \Psi_{\alpha j}^*[\varkappa, t; -\mathbf{k}, t; \mathbf{z}^*] - \tag{3.2}$$
$$- \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 \Lambda_{i,\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}) \frac{\delta^2 \Phi^*}{\delta z_\alpha^*(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta^*(\mathbf{k}_2)}$$

$$\Psi_{\alpha j}^*[\varkappa, t; -\mathbf{k}, t; \mathbf{z}^*] = \left\langle \frac{\delta u_\alpha(\varkappa, t)}{\delta f_j(-\mathbf{k}, t)} \exp\left\{ i \int d\mathbf{q} z_i^*(\mathbf{q}) u_i(\mathbf{q}, t) \right\} \right\rangle \tag{3.3}$$

Так как при варьировании поля скорости по внешней силе, взятой в тот же момент времени, нелинейный член в уравнении Навье — Стокса роли не играет (см., например, [5]), получаем для функционала Ψ^* выражение

$$\Psi_{\alpha j}^*[\varkappa, t; -\mathbf{k}, t; \mathbf{z}^*] = {}^1/{}_2\delta_{\alpha j}\delta(\varkappa + \mathbf{k})\Phi^*[\mathbf{z}^*, t] \tag{3.4}$$

Если принять во внимание тот факт, что имеет место соотношение

$$\frac{i}{2\pi}\int d^4k\omega z_i(k)\frac{\delta\Phi}{\delta z_i(k)}\Bigg|_{z_j(k)=z_j^*(\mathbf{k})\exp\{i\omega t\}} = \frac{\partial}{\partial t}\Phi^*(\mathbf{z}^*, t) \tag{3.5}$$

которое легко проверяется разложением Φ в степенной функциональный ряд, можно, используя (3.4), (3.5), переписать уравнение (3.2) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi^* = \int d\mathbf{k}z_i^*(\mathbf{k})\left\{-\nu\mathbf{k}^2\frac{\delta\Phi^*}{\delta z_i^*(\mathbf{k})} - \frac{1}{4}F_{ij}(\mathbf{k})z_j(-\mathbf{k})\Phi^* - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\Lambda_{i,\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k})\frac{\delta^2\Phi^*}{\delta z_\alpha^*(\mathbf{k}_1)\delta z_\beta^*(\mathbf{k}_2)}\right\} \tag{3.6}$$

что совпадает с результатом работы [6].

4. Остановимся на некоторых свойствах системы (2.7), (2.9). Представим функционалы Φ и Ψ в виде

$$\Phi(\mathbf{z})k)] = \exp\{\varphi[\mathbf{z}(k)]\} \tag{4.1}$$

$$\Psi_{ij}[k, k'; \mathbf{z}] = S_{ij}[k, k'; \mathbf{z}]\Phi[\mathbf{z}(k)]$$

Тогда уравнения для φ и S примут вид

$$\frac{\delta\varphi}{\delta z_i(k)} = -\frac{1}{2}\int d^4q\, d^4\varkappa S_{i\gamma}^\circ(k, q)F_{\gamma j}(q)z_\alpha(\varkappa)S_{\alpha j}(\varkappa, -k, \mathbf{z}) -$$

$$-\frac{1}{2}\int d^4q\, d^4k_1\, d^4k_2 S_{i\gamma}^\circ(k, q)\Lambda_{\gamma,\alpha\beta}(k_1, k_2; q)\left\{\frac{\delta^2\varphi}{\delta z_\alpha(k_1)\delta z_\beta(k_2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta\varphi}{\delta z_\alpha(k_1)}\frac{\delta\varphi}{\delta z_\beta(k_2)}\right\} \tag{4.2}$$

$$S_{ij}[k, k'; \mathbf{z}] = S_{ij}^\circ(k, k') - \int d^4q\, d^4k_1\, d^4k_2 S_{i\gamma}^\circ(k, q)\Lambda_{\gamma,\alpha\beta}(k_1, k_2; q)\times$$
$$\times\left\{\frac{\delta\varphi}{\delta z_\alpha(k_1)}S_{\beta j}[k_2, k'; \mathbf{z}] + \frac{\delta}{\delta z_\alpha(k_1)}S_{\beta j}[k_2, k'; \mathbf{z}]\right\} \tag{4.3}$$

где

$$S_{ij}^\circ(k, k') = (i\omega + \nu k^2)^{-1}\delta_{ij}\delta^4(k - k')$$

Отметим, что разложения по z в функциональные ряды Тейлора φ и S определяют соответственно кумулянты поля скорости и корреляции функции грина $G = \delta u / \delta f$ с полем скорости. Уравнение (4.3) является при этом аналогом уравнения Швингера в квантовой теории поля.

Варьируя (4.2) по $z_j(p)$, можно получить уравнение для величины $\delta^2\varphi / \delta z_i(k)\delta z_j(p)$, которая при $\mathbf{z} = 0$ определяет пространственно-временную спектральную функцию поля $\mathbf{u}$.

Если решать систему уравнений (4.2), (4.3) по теории возмущений, выбрав в качестве нулевого приближения для S величину S°, то получим, естественно, тот же ряд теории возмущения для спектральной функции скорости, что и в [4]. Отметим, что если интересоваться только поведением корреляционной функции поля скорости, то система функциональных уравнений (4.2), (4.3) содержит излишнюю информацию. Эту лишнюю информацию можно отфильтровать путем построения для спектральной функции поля скорости специфического ряда теории возмущения, каждый член которого будет содержать спектральную функцию скорости и среднюю функцию Грина. Для этого введем величину S^{-1} по формуле

$$\int d^4k' S_{ij}[k, k'; \mathbf{z}] S_{j\delta}^{-1}[k', \varkappa; \mathbf{z}] = \delta_{i\delta}\delta^4(k - \varkappa) \tag{4.4}$$

Легко видеть, что будет иметь место и

$$\int d^4k' S_{i\delta}^{-1}[k, k'; \mathbf{z}] S_{\delta j}[k', \varkappa; \mathbf{z}] = \delta_{ij}\delta^4(k - \varkappa) \tag{4.5}$$

Введем трехиндексный функционал, в некотором смысле аналогичный вершинной части в квантовой теории поля [1]

$$\Gamma_{j\delta}^{\gamma}[p; k', \varkappa; \mathbf{z}] = \frac{\delta}{\delta z_\gamma(p)} S_{j\delta}^{-1}[k', \varkappa; \mathbf{z}] \tag{4.6}$$

Варьируя (4.4) по $\mathbf{z}$, можно выразить $\delta S / \delta z$ через S и Γ, а именно получим

$$\frac{\delta S_{i\mu}(k, q; \mathbf{z})}{\delta z_\gamma(p)} = -\int d^4k'\, d^4\varkappa S_{ij}(k, k'; z) \Gamma_{j\delta}^{\gamma}(p; k', \varkappa; \mathbf{z}) S_{\delta\mu}(\varkappa, q, \mathbf{z}) \tag{4.7}$$

При помощи (4.7) уравнение (4.3) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} S_{ij}(k, k'; \mathbf{z}) = S_{ij}^\circ(k, k') - \int d^4q\, d^4k_1\, d^4k_2 S_{i\gamma}^\circ(k, q) \times \\ \times \Lambda_{\gamma,\alpha\beta}(k_1, k_2; q) \left\{ \frac{\delta\varphi}{\delta z_\alpha(k_1)} S_{\beta j}(k_2, k'; \mathbf{z}) - \right. \\ \left. - \int d^4k'\, d^4k'' S_{\beta\sigma}(k_2, k'; \mathbf{z}) \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}(k_1; k', k''; \mathbf{z}) S_{\nu j}[k'', k'; \mathbf{z}] \right\} \end{gathered} \tag{4.8}$$

Полагая в (4.8) $\mathbf{z} = 0$, получаем уравнение, связывающее величины $S|_{\mathbf{z}=0}$, и $\Gamma|_{\mathbf{z}=0}$, аналогичное уравнению Дайсона в квантовой теории поля ($\delta\varphi / \delta z = 0$ при $\mathbf{z} = 0$).

Умножая (4.8) справа на S^{-1}, а слева на S_0^{-1}, интегрируя по соответствующим аргументам и варьируя по z, получаем функциональное уравнение для Γ, которое имеет вид

$$\begin{gathered} \Gamma_{\mu\rho}^{\gamma}(p_3; p_2, p_1; \mathbf{z}) = \int d^4k_1 \Lambda_{\mu,\alpha\rho}(k_1, p_1; p_2) \frac{\delta^2\varphi}{\delta z_\alpha(k_1)\delta z_\gamma(p_3)} - \\ - \int d^4k_1\, d^4k_2\, d^4k' \Lambda_{\mu,\alpha\beta}(k_1, k_2, p_2) \frac{\delta}{\delta z_\gamma(p_3)} \{S_{\beta\sigma}(k_2, k', \mathbf{z}) \Gamma_{\sigma\rho}^{\alpha}(k_1, k', p_1\, \mathbf{z})\} \end{gathered} \tag{4.9}$$

Система уравнений (4.2), (4.8), (4.9) замкнута; ее решения, однако, связаны соотношением (4.7). Если теперь строить теорию возмущения,

[1] Введенная в [4] вершинная часть не совпадает с определением (4. 6).

выбрав в качестве нулевого приближения свободные члены уравнений (4.2) и (4.9), а возникающие при этом вариации S по $\mathbf{z}$ выражать при помощи соотношения (4.7), то получим для величин пространственно-временного спектра скорости и функции $\Gamma|_{z=0}$ бесконечные ряды, каждый член которых будет содержать эти же функции.

Эти ряды будут представлять собой интегральные уравнения с бесконечным числом членов, которые вместе с уравнением (4.8) при $z=0$ образуют замкнутую систему уравнений для величин $\delta^2\varphi / \delta z\delta z|_{z=0}$, $S|_{z=0}$ и $\Gamma|_{=z0}$.

Однако в силу громоздкости выкладок и нелинейности функциональных уравнений (4.2), (4.8), (4.9) выписать даже несколько членов указанных рядов трудно, так что такие уравнения, по-видимому, практически ценности иметь не могут.

5. Остановимся на некоторых возможных упрощениях возникающей системы уравнений. При этом необходимо сделать гипотезы двух типов. Первый тип гипотез связан с распределением вероятностей поля скорости. Тогда уравнение (2.8) для функции Грина будет представлять собой линейное уравнение со случайными коэффициентами, решить которое затруднительно. Второй тип гипотез связан с предположением характера корреляций функции Грина с полем скорости.

Остановимся сначала на гипотезах второго типа. Простейшие предположения, которые можно сделать, заключаются в обрезании соответствующих рядов теории возмущения. Как указывалось выше, ряд теории возмущения для функционала S можно строить двояко:

1) решать уравнение (4.3) путем итераций, выбрав в качестве нулевого приближения величину $S°$;

2) решать уравнение (4.9) для вершинной части Γ путем итераций, выбрав в качестве нулевого приближения величину $\Lambda\delta^2\varphi / \delta z\delta z$.

Простейшее предположение в случае 1) $S \approx S°$ эквивалентно при этом требованию $\delta S / \delta z|_{z=0} = 0$, которое можно переписать в виде

$$\left\langle \frac{\delta u}{\delta f} u \right\rangle = \left\langle \frac{\delta u}{\delta f} \right\rangle \langle u \rangle = 0$$

(в силу того, что $S = \Psi \exp\{-\varphi\}$). Это предположение использовалось в работе [10]. Следующее приближение такого типа $\delta^2 S / \delta z\delta z|_{z=0} = 0$ эквивалентно требованию

$$\left\langle \frac{\delta u}{\delta f} uu \right\rangle = \left\langle \frac{\delta u}{\delta f} \right\rangle \langle uu \rangle$$

В случае 2) обрезание ряда теории возмущения накладывает несколько более сложные ограничения на корреляции функции Грина с полем скорости. Так, выражение для $\Gamma \sim \Lambda\delta^2\varphi / \delta z\delta z$, которое использовалось в работе [11], означает выполнение равенства $\delta(S\Gamma) / \delta z|_{z=0} = 0$ или

$$\frac{\delta}{\delta z}\left(S\frac{\delta S^{-1}}{\delta z}\right)\Bigg|_{z=0} \sim \frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta S}{\delta z}S^{-1}\right)\Bigg|_{z=0} \sim$$

$$\sim \left\{\frac{\delta^2 S}{\delta z\delta z}S^{-1} + \frac{\delta S}{\delta z}\Gamma\right\}\Bigg|_{z=0} = 0$$

что эквивалентно требованию

$$\left\langle \frac{\delta u}{\delta f} uu \right\rangle - \left\langle \frac{\delta u}{\delta f} \right\rangle \langle uu \rangle \sim \left\langle \frac{\delta u}{\delta f} u \right\rangle \Lambda \langle uu \rangle \left\langle \frac{\delta u}{\delta f} \right\rangle$$

Обратимся теперь к гипотезам, связанным с распределением вероятностей поля скоростей. Обрезание ряда теории возмущений для корреляционной функции поля скорости $\delta^2\varphi / \delta z \delta z|_{z=0}$ означает наложение некоторых условий на кумулянты поля скоростей. Простейшее, но не тривиальное предположение заключается в требовании $\delta^4\varphi / \delta z^4|_{z=0} = 0$ (т. е. равенстве всех кумулянтов нулю, начиная с кумулянтов четвертого порядка). Это условие наряду с условием $S = S^\circ$, рассмотренным выше, позволяет получить уравнение для спектральной функции поля скорости, полученное в работе [10]. Если же наложить условие $\Gamma \sim \Lambda\delta^2\varphi / \delta z \delta z$, то для спектральной функции скорости получим уравнение, близкое к уравнению, исследованному в работе [11]. Тот факт, что уравнение для спектральной функции поля скорости, полученное в [11], эквивалентно по своему смыслу пренебрежению кумулянтами поля скорости, начиная с кумулянта четвертого порядка, отмечался и в работе [12].

Из сказанного выше ясно, что упрощения полной системы уравнений, типа рассмотренных выше, довольно плохо описывают однородную изотропную турбулентность в несжимаемой среде. Отметим, что попытки исправить недостатки уравнений, получаемых по изложенной выше схеме, путем включения некоторых дополнительных связей (как это делается, например, в работе [13]) не могут улучшить положения, ввиду того что эти связи находятся, вообще говоря, в противоречии с основными приближениями.

В заключение автор благодарит Е. А. Новикова и В. И. Татарского за внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступило 11 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Lewis R. M., Kraichnan R. H. A space — time functional formalism for turbulence. Communs Pure Appl. Math., 1962, vol. 14, No. 4, p. 397.
2. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидродинамика, ч. 2. М., «Наука», 1967.
3. Hopf E. Statistical hydromechanics and functional calculus. J. Rat. Mech. Analys., 1952, vol. 1, No. 1, p. 87.
4. Wyld H. W. Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid. Ann. Phys. (USA), 1961, vol. 14, No. 2, p. 143.
5. Lee L. L. A formulation of the theory of isotropic hydromagnetic turbulence in an incompressible fluid. Ann. Phys. (USA), 1965, vol. 32, No. 2.
6. Новиков Е. А. Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности. ЖЭТФ, 1964, т. 47, № 5, стр. 1919.
7. Edwars S. F. The statistical dynamics of homogeneous turbulence. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, No. 2, p. 239.
8. Пайерлс Р. Е. Квантовая теория твердых тел. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
9. Edwards S. F. Turbulence in hydrodynamics and plasma physics. Seminar on plasma physics. Plasma Physics. Triesics. 5th — 31st Oct. 1964. Vienna, 1965.
10. Chandrasekhar S. A theory of turbulence. Proc. Roy. Soc., A229, 1955, No. 1176.
11. Kraichnan R. H. The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, No. 4, p. 497.
12. Proudman I. On Kraichnan's theory of turbulence, Mécanique de la turbulence Coll. Intern. centre nat. rech. scient., 1962, No. 107.
13. Шутько А. В. К статистической теории турбулентности. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 5, стр. 1058.