УДК 532.516 : 536.24.01

О ВОЗНИКНОВЕНИИ КОНВЕКЦИИ, ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПО ВРЕМЕНИ

Г. С. МАРКМАН

(*Ростов-на-Дону*)

Рассмотрено возникновение периодической по времени конвекции в вязкой несжимаемой жидкости с распределенными источниками тепла, заполняющей сосуд с твердыми стенками, который совершает вертикальные колебания.

Показано, что при переходе числа Рэлея через первое критическое значение, в предположении нечетнократности последнего, рождается периодический по времени режим конвекции. Для доказательства существования периодического решения система нелинейных уравнений, описывающая нестационарную конвекцию, сводится к уравнению с вполне непрерывным оператором в некотором функциональном пространстве и применяется теорема М. А. Красносельского о точках бифуркации [1].

Стационарный случай был исследован аналогичными методами в [2, 3].

Периодической по времени конвекции посвящены работы [4–6]. В работе [4] исследуется устойчивость по линейному приближению равновесия плоского горизонтального неподвижного слоя жидкости с периодически меняющимся градиентом температуры. Численными методами найдены зоны устойчивости и неустойчивости на плоскости частота — амплитуда (фактически параметры в [4] несколько иные) для случая кусочно-постоянного по времени градиента.

В работе [5] рассматривается конвекция в слое жидкости, на которую кроме сил тяжести действуют вибрационные силы высокой частоты. Методом осреднения по малым колебаниям исследуется влияние вибрации на возникновение конвекции.

В работе [6] проведено численное исследование режима конвекции, возникающего в полости квадратного сечения при подогреве снизу в условиях модуляции массовой силы. Нелинейные уравнения конвекции решены методом конечных разностей и определены границы конвективной неустойчивости.

Ниже, в п. 4, рассматривается, как и в [4], задача Рэлея — конвекция в горизонтальном слое с двумя свободными границами. Слой совершает вертикальные T-периодические колебания. Градиент температуры в равновесном режиме периодически (с тем же периодом T) изменяется со временем и не зависит от высоты. Последнее предположение выполняется, когда в жидкости определенным образом распределены источники тепла. Приближенно оно имеет место и при отсутствии источников тепла, если частота модуляции мала [4].

1. Постановка задачи. Пусть сосуд, заполненный вязкой несжимаемой жидкостью, совершает вертикальные колебания с ускорением $g\Phi(t)$. В жидкости расположены источники тепла с плотностью $aF(z, t)$. Уравнения нестационарной конвекции и граничные условия [5, 7] в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}+(\mathbf{v}', \nabla)\mathbf{v}' = -\nabla \mathbf{p}' + \nu\Delta\mathbf{v}' - \mathbf{j}\beta g\Phi(t)\theta'$$
$$\frac{\partial \theta'}{\partial t}+\mathbf{v}'\cdot\nabla\theta' = \chi\Delta\theta' + aF(z,t), \qquad \operatorname{div}\mathbf{v}'=0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{v}'/_s=0, \qquad \theta'/_s = a\varphi(z, t) \tag{1.2}$$

где $\mathbf{v}'(x_1, x_2, z, t)$ — относительная скорость движения жидкости, $\theta'(x_1, x_2, z, t)$ — температура, $\mathbf{p}'(x_1, x_2, z, t)$ — давление; ν, β, χ — коэффициенты соответственно вязкости, теплового расширения, температуропроводности, которые будем считать постоянными; g — ускорение силы тяжести, $\mathbf{j}$ — единичный вектор, направленный вертикально вниз; $a>0$ — параметр.

Функции $\Phi(t)$ и $F(z, t)$ считаем периодическими по времени с заданным периодом T, плотность жидкости полагаем равной единице.

Предположим, что жидкость может находиться в относительном равновесии, т. е. что задача (1.1) — (1.2) имеет решение

$$\mathbf{v}_0 = 0, \quad \theta_0 = af(z,t), \quad \mathbf{p}_0 = -\mathbf{j}\beta g a \Phi(t) \int^z f(z,t)\,dz \tag{1.3}$$

Чтобы задача (1.1), (1.2) допускала решение вида (1.3), температура $\varphi(z, t)$ на границе S должна быть задана таким образом, чтобы задача для определения $f(z, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + F(z,t), \qquad f(z,t)\,|_s = \varphi(z,t) \tag{1.4}$$

имела ненулевое решение.

Введем параметр $R = g\beta a / \nu\chi$, равный произведению чисел Прандтля $v = \nu / \chi$ и Грасгофа $\mathrm{Gr} = g\beta a / \nu^2$.

Новое решение $\mathbf{v}', \theta', \mathbf{p}'$ задачи (1.1), (1.2) ищем в виде

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}, \qquad \theta' = \theta_0 + \theta, \qquad \mathbf{p}' = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p} \tag{1.5}$$

Система уравнений для определения $\mathbf{v}, \theta, \mathbf{p}$ и граничные условия в безразмерных параметрах имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla \mathbf{p} + \Delta \mathbf{v} - \mu \mathbf{j}\Phi(t)\theta \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta = \frac{1}{p}\Delta\theta - \mu f_0(z,t) v_3, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v}/_s = 0, \qquad \theta/_s = 0 \tag{1.7}$$

$$\mu = \sqrt{R}, \qquad f_0(z,t) = \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial z} f(z,t) \tag{1.8}$$

2. Основные функциональные пространства. Теоремы вложения. Пусть Ω — ограниченная область трехмерного пространства. Граница области S состоит из конечного числа замкнутых поверхностей $s_1, s_2, \ldots s_n$ класса $C^{(2)}$. Время t изменяется в интервале $(-\infty, \infty)$.

Введем гильбертово пространство E_1 — замыкание по норме L_2 множества гладких соленоидальных векторов, определенных на $Q_T = \Omega \times \times [0, T]$, исчезающих на S.

Гильбертово пространство E_2 — замыкание по норме L_2 множества гладких функций, T-периодических по времени, исчезающих на S.

Исключим давление $\mathbf{p}$, применяя к первому уравнению системы (1.6) оператор Π ортогонального в L_2 проектирования на подпространство соленоидальных векторов [8, 9]. В результате получим систему

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \Pi\Delta\mathbf{v} = -\Pi(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} - \mu\Pi\mathbf{j}\Phi\theta, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{1}{p}\Delta\theta = -\mathbf{v}\nabla\theta - \mu f_0 v_3 \tag{2.1}$$

Соответствующая линеаризованная система имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Pi\Delta\mathbf{u} = -\mu\Pi\mathbf{j}\Phi\tau, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial t} - \frac{1}{p}\Delta\tau = -\mu f_0 u_3 \tag{2.2}$$

Введем следующие гильбертовы пространства: H_2 — замыкание множества гладких соленоидальных векторов, T-периодических по времени, определенных на Q_T и исчезающих на S, в норме, порожденной скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_2} = \int_0^T \int_\Omega \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\Pi \Delta \mathbf{u})(\Pi \Delta \mathbf{v}) \right] dx\, dt \tag{2.3}$$

H_2' — замыкание множества гладких, T-периодических по времени функций, определенных на Q_T, исчезающих на S, в норме, порожденной скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{H_2'} = \int_0^T \int_\Omega \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\varphi\, \Delta\psi \right] dx\, dt \tag{2.4}$$

Определим пространство $H = H_2 \times H_2'$ как декартово произведение пространств H_2 и H_2', т. е. пространство пар $w = (\mathbf{v}, \theta)$, где вектор $\mathbf{v} \in H_2$, функция $\theta \in H_2'$. Скалярное произведение в H определим следующим образом

$$(w, w')_H = ((\mathbf{v}, \theta), (\mathbf{v}', \theta'))_H = (\mathbf{v}, \mathbf{v}')_{H_2} + (\theta, \theta')_{H_2'} \tag{2.5}$$

Говорят, что вектор $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ принадлежит пространству С. М. Никольского $H_2^{(\mathbf{r})}$, если его компоненты u_i $(i = 1, 2, 3)$ принадлежат $H_2^{(\mathbf{r})}$.

Лемма 2.1. Имеют место непрерывные вложения

$$H_2 \subset H_2^{(\mathbf{r})}, \qquad H_2' \subset H_2^{(\mathbf{r})} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{r} = (2-\varepsilon,\ 2-\varepsilon,\ 2-\varepsilon,\ 1-\varepsilon), \qquad \varepsilon > 0$$

Доказательство. Используя известное неравенство С. Н. Бернштейна — О. А. Ладыженской [10]

$$\|\mathbf{u}\|_{W_2^{(2)}} \leqslant c \|\Delta \mathbf{u}\|_{L_2} \tag{2.7}$$

а также неравенство

$$\|\mathbf{u}\|_{W_2^{(2)}} \leqslant c \|\Pi \Delta \mathbf{u}\|_{L_2} \tag{2.8}$$

установленное И. И. Воровичем и В. И. Юдовичем [11] и (2.3), (2.4), получаем следующие вложения:

$$H_2 \subset W_2^{(\mathbf{r})}, \quad H_2' \subset W_2^{(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{r} = (2, 2, 2, 1) \tag{2.9}$$

Пространства $H_2^{(\mathbf{r})}$ и $W_2^{(\mathbf{r})}$ определены в [12]. Утверждения леммы следуют из (2.9) и известного (см. [12]) вложения

$$W_2^{(\mathbf{r})} \subset H_2^{(\mathbf{r})}$$

Лемма 2.2. Имеют место следующие непрерывные вложения:

$$H_2 \subset L_q(Q_T), \quad H_2' \subset L_q(Q_T), \quad 1 \leqslant q < 10, \ Q_T = \Omega \times [0, T]$$

Доказательство. По лемме 2.1 $H_2 \subset H_2^{(\mathbf{r})}$. Из теоремы С. М. Никольского [12] следует,

$$H_2^{(\mathbf{r})} \subset L_q(Q_T), \qquad 1 \leqslant q < 10$$

При этом оператор вложения $H_2 \subset L_q$ вполне непрерывен.

Лемма 2.3 Пусть $\mathbf{v} \in H_2$, тогда существуют на Q_T частные производные $\partial v_i / \partial x_k$ $(i, k = 1, 2, 3,\ x_3 = z)$, принадлежащие пространству $L_p(Q_T)$,

$1 \leqslant p < {}^{10}/_3$, и справедливо неравенство

$$\sum_{i,\,k=1}^{3} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\|_{L_p} \leqslant c \| \mathbf{v} \|_{H_2} \tag{2.10}$$

где постоянная c не зависит от $\mathbf{v}$.

Доказательство. Из леммы 2.1 следует, что $\mathbf{v} \in H_2^{(\mathbf{r})}$. По теореме 10 (см. [12]) получим, что любая частная производная $\partial v_i / \partial x_k$ $(i, k = 1, 2, 3)$ принадлежит пространству $H_2^{(\mathbf{r}_1)}$, $\mathbf{r}_1 = {}^1/_2\mathbf{r}$, имеет место неравенство

$$\sum_{i,\,k=1}^{3} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\|_{H_2^{(\mathbf{r}_1)}} \leqslant c \| \mathbf{v} \|_{H_2^{(\mathbf{r}_1)}} \tag{2.11}$$

Из теоремы вложения [12] следует:

$$H_2^{(\mathbf{r}_1)}, \subset L_p, \qquad 1 \leqslant p < {}^{10}/_3 \tag{2.12}$$

При этом выполняется неравенство

$$\sum_{i,\,k=1}^{3} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\|_{L_p} \leqslant c \sum_{i,\,k=1}^{3} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\|_{H_2^{(\mathbf{r}_1)}} \tag{2.13}$$

Теперь неравенство (2.10), очевидно, вытекает из (2.11), (2.13) и неравенства вложения леммы 2.1.

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2.4. Пусть $\theta \in H_2'$, тогда $\nabla\theta \in L_p(Q_T)$, $1 \leqslant p < {}^{10}/_3$ и справедливо неравенство

$$\| \nabla\theta \|_{L_p} \leqslant c \| \theta \|_{H_2'} \tag{2.14}$$

где постоянная c не зависит от θ.

3. Операторные уравнения. Бифуркация. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Pi\Delta\mathbf{u} = \mathbf{f}_1, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{1}{p}\Delta\tau = f_2, \qquad (\mathbf{f}_1, f_2) \in H \tag{3.1}$$

Назовем обобщенным T-периодическим решением системы (3.1) элемент $w = (\mathbf{u}, \tau) \in H$, удовлетворяющий интегральным тождествам

$$\int_0^T \int_\Omega \mathbf{u} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Pi\Delta\varphi \right) dx\, dt = -\int_0^T \int_\Omega \mathbf{f}_1 \varphi\, dx\, dt \tag{3.2}$$

$$\int_0^T \int_\Omega \tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{p}\Delta\psi \right) dx\, dt = -\int_0^T \int_\Omega f_2 \psi\, dx\, dt \tag{3.3}$$

при любой паре $(\varphi, \psi) \in H$.

Систему (3.1) можно записать в операторном виде

$$Bw \equiv \frac{\partial w}{\partial t} + Dw = f \tag{3.4}$$

где оператор D, действующий из H в $E = E_1 \times E_2$, определен равенством

$$Dw = \left\| \begin{matrix} -\Pi\Delta, & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{p}\Delta \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \mathbf{u} \\ \tau \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -\Pi\Delta\mathbf{u} \\ -\dfrac{1}{p}\Delta\tau \end{matrix} \right\| \tag{3.5}$$

Лемма 3.1. Оператор B обратим: существует ограниченный обратный оператор B^{-1}, действующий из E в H.

Доказательство. Решение уравнения (3.4) ищем в виде ряда

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\, q_k \tag{3.6}$$

где q_k — полная система собственных векторов оператора D. С помощью оценок (2.7), (2.8) можно показать, что $q_k \in H$ $(k = 1, 2\ldots)$. Соответствующие им собственные числа обозначим через λ_k. Правую часть f представим в виде

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)\, q_k \tag{3.7}$$

Подставив (3.6) и (3.7) в (3.4), получим

$$\frac{dw_k}{dt} + \lambda_k w_k = f_k' \qquad (k = 1, 2\ldots) \tag{3.8}$$

Периодическое по времени решение уравнения (3.8) дается формулой

$$w_k = \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_k(t-\rho)} f_k'(\rho)\, d\rho \tag{3.9}$$

Итак, решение уравнения (3.4) представляется рядом

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(x) \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_k(t-\rho)} f_k'(\rho)\, d\rho \equiv B^{-1} f \tag{3.10}$$

Выполнение тождеств (3.2), (3.3) проверяется непосредственно. Очевидно, $w \in H$ и имеет место равенство

$$\|w\|_H = \|f\|_{L_2} \tag{3.11}$$

откуда и следует ограниченность оператора B^{-1}. Оператор B^{-1} обозначим через M. Имеем

$$B^{-1} \equiv M = \left\| \begin{matrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{matrix} \right\| \tag{3.12}$$

Система (2.1) эквивалентна операторному уравнению в пространстве H

$$w = Kw \equiv \mu A w + N w \tag{3.13}$$

где линейный оператор A и нелинейный оператор N определены равенствами

$$Aw = \left\| \begin{matrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{matrix} \right\| w = \left\| \begin{matrix} 0 & M_1 \Pi j \Phi \\ M_2 j & 0 \end{matrix} \right\| w, \qquad Nw = \left\| \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \end{matrix} \right\| w = \left\| \begin{matrix} M_1 \Pi (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \\ M_2 \mathbf{v} \cdot \nabla \theta \end{matrix} \right\| \tag{3.14}$$

Система (2.2) эквивалентна следующему операторному уравнению:

$$w = \mu A w \tag{3.15}$$

Лемма 3.2. Оператор K вполне непрерывен в H.

Доказательство. Покажем, что каждый из операторов A_1, A_2, N_1, N_2 вполне непрерывен в H. Рассмотрим, к примеру, N_1. Пусть $\mathbf{v} \in H_2$. Тогда по лемме 2.2 вектор $\mathbf{v} \in L_q$, $1 \leqslant q < 10$. По лемме 2.3 каждая частная производная $\partial v_i / \partial x_k \in L_p$, $1 \leqslant p < {}^{10}/_3$, причем оператор вложения вполне непрерывен. Вектор $(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} \in L_s$, $1 \leqslant s < {}^5/_2$. Из ограниченности операторов M_1, Π и вполне непрерывности оператора вложения следует, что N_1 вполне непрерывен в H.

Аналогично с помощью лемм 2.2—2.4 доказывается, что операторы A_1, A_2, N_2 вполне непрерывны в H.

Лемма 3.3. Оператор A является дифференциалом Фреше оператора K в точке $w = 0$.

Доказательство. Нужно показать, что

$$\lim_{\|w\|_H \to 0} \frac{\|Kw - Aw\|_H}{\|w\|_H} = 0 \tag{3.16}$$

Из (3.13), (3.14) и (3.15) получим

$$\|Kw - Aw\|_H \leqslant \|M_1\Pi(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}\|_{H_2} + \|M_2\mathbf{v}\cdot\nabla\theta\|_{H_2'} \tag{3.17}$$

При помощи неравенств (2.10), (2.14) оценим каждое слагаемое в (3.17)

$$\|M_1\Pi(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}\|_{H_2} \leqslant \|M_1\| \|(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}\|_{H_2} \leqslant c_1\|\mathbf{v}\|_{H_2}^2 \tag{3.18}$$

$$\|M_2\mathbf{v}\cdot\nabla\theta\|_{H_2'} \leqslant \|M_2\| \|\mathbf{v}\cdot\nabla\theta\|_{H_2'} \leqslant c_2\|\mathbf{v}\|_{H_2}\|\theta\|_{H_2'} \tag{3.19}$$

Подставив (3.18) и (3.19) в (3.17), получим

$$\|Kw - Aw\|_H \leqslant c_1\|\mathbf{v}\|_{H_2}^2 + c_2\|\mathbf{v}\|_{H_2}\|\theta\|_{H_2'} \leqslant c_3\|w\|_H\|\mathbf{v}\|_{H_2} \tag{3.20}$$

Из (3.20), очевидно, следует (3.16).

Теперь можно применить для отыскания периодического по времени режима конвекции теорию бифуркации решений нелинейных операторных уравнений [1].

Из лемм 3.2—3.3 и теоремы М. А. Красносельского о точках бифуркации [1] вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть μ_0 — собственное значение задачи (2.2), имеющее нечетную кратность. Тогда число μ_0 — точка бифуркации операторного уравнения (3.13): существует последовательность $\mu_n \to \mu_0$ и соответствующая последовательность ненулевых решений уравнения (3.13) (или системы (2.1)): $w_n = \mu_n A w_n$, $w_n \to 0$.

Т. е., если собственное число $R_0 = \mu_0^2$ (критическое значение числа Рэлея) имеет нечетную кратность, то при значениях числа Рэлея, близких к критическому, от равновесного состояния ответвляется периодический по времени режим конвекции.

В общем случае не удается определить кратность собственных чисел задачи (2.2). Рассмотрим пример, для которого это удается сделать. Предыдущие рассмотрения приводят к доказательству существования точки бифуркации.

4. Случай линейного по высоте распределения равновесной температуры.

4.1. Пусть температура θ_0 (см. (1.3)) линейно зависит от высоты: $\theta_0 = af_0(t)z + c$, где c — произвольная постоянная.

Задача для возмущений (1.6), (1.7) принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla\mathbf{p} + \nu\Delta\mathbf{v} - \mathbf{j}\beta g\Phi(t)\theta \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta = \chi\Delta\theta - af_0(t)v_3, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}|_s = 0, \quad \theta|_s = 0\end{gathered} \tag{4.1}$$

Следующая теорема, справедливая и для непериодических Φ, f_0, показывает, что конвекция не может возникнуть в случае подогрева сверху.

Теорема 4.1. Пусть

$$f_0(t) > 0, \qquad \beta g[\Phi(t) - 1] < \sigma_0 \tag{4.2}$$

где σ_0 — первое собственное число соответствующей стационарной задачи, и жидкость подогревается сверху, т. е.

$$a < 0 \tag{4.3}$$

Тогда решение (1.3) устойчиво в целом в том смысле, что при любых начальных возмущениях

$$I(t) \equiv \int_\Omega (\mathbf{v}^2 + \theta^2)\, dx \to 0 \tag{4.4}$$

когда $t \to \infty$ и справедлива оценка

$$I(t) \leqslant I(0)\, e^{-\varkappa 2t} \tag{4.5}$$

где постоянная $\varkappa^2$ определена в (4.14).

Доказательство. Умножим первое уравнение системы (4.1) на $\mathbf{v}$, второе — на θ и проинтегрируем по области Ω

$$\begin{gathered}
{}^1/_2 \frac{d}{dt} \int_\Omega \mathbf{v}^2\, dx + \nu \int_\Omega (\nabla \mathbf{v})^2\, dx = -\beta g\, \Phi(t) \int_\Omega \theta v_3\, dx \\
{}^1/_2 \frac{d}{dt} \int_\Omega \theta^2\, dx + \chi \int_\Omega (\nabla \theta)^2\, dx = -a f_0(t) \int_\Omega \theta v_3\, dx
\end{gathered} \tag{4.6}$$

Сложив оба уравнения системы (4.6), получим

$$\begin{gathered}
{}^1/_2 \frac{d}{dt} I(t) + I_1(t) = -[\beta g\, \Phi(t) + a f_0(t)] \int_\Omega \theta v_3\, dx \\
I_1 = \nu \int_\Omega (\nabla \mathbf{v})^2\, dx + \chi \int_\Omega (\nabla \theta)^2\, dx
\end{gathered} \tag{4.7}$$

Как показано в работе [2], для $(\mathbf{v}, \theta) \in H$ выполняется неравенство

$$-(\sigma_0 + \beta g) \int_\Omega \theta v_3\, dx \leqslant I_1 \tag{4.8}$$

Из равенства (4.7) с помощью (4.8) получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} I(t) \leqslant -\frac{\sigma_0 + \beta g - \beta g \Phi - a f_0}{\sigma_0 + \beta g} I_1 \tag{4.9}$$

В силу (4.2), (4.3), очевидно, имеем

$$\omega(t) \equiv \frac{\sigma_0 + \beta g - \beta g\, \Phi(t) - a f_0(t)}{\sigma_0 + \beta g} > 0 \tag{4.10}$$

Оценивая правую часть (4.9) с помощью неравенства

$$cI \leqslant I_1 \tag{4.11}$$

получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} I(t) \leqslant -c\omega(t) I(t) \tag{4.12}$$

Из (4.10) и (4.12) вытекает, что

$$\frac{d}{dt}I(t) \leqslant -\varkappa^2 I(t), \qquad \varkappa^2 = 2c \min_{t>0} \omega(t) \tag{4.13}$$

Из неравенства (4.13) следует, очевидно, неравенство (4.5). Теорема доказана.

Из (4.4), используя методы работы [9], при достаточно гладких S, Φ, F можно вывести, что $\mathbf{v}$, θ вместе с производными стремятся к нулю при $t \to \infty$.

4.2. Периодическая конвекция в слое с двумя свободными границами. Пусть равновесный градиент температуры $af_0(t)$ положителен во все моменты времени t (нагрев снизу). Докажем существование ненулевого T-периодического по времени режима конвекции при следующих предположениях: возмущения считаем периодическими с периодами $2\alpha_1$, $2\alpha_2$, 2γ вдоль осей x_1, x_2, z; жидкость не может смещаться как целое

$$\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} u_3\,dx_1\,dx_2 = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\int_{-\gamma}^{\gamma} u_2\,dx_1\,dz = \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2}\int_{-\gamma}^{\gamma} u_1\,dx_2\,dz = \int_{-\gamma}^{\gamma} \tau\,dz = 0 \tag{4.14}$$

и выполняются следующие условия четности и нечетности:

$$\begin{gathered}
u_1(x_1, x_2, z, t) = -u_1(-x_1, x_2, z, t) = u_1(x_1, -x_2, z, t) = u_1(x_1, x_2, -z, t) \\
u_2(x_1, x_2, z, t) = u_2(-x_1, x_2, z, t) = -u_2(x_1, -x_2, z, t) = u_2(x_1, x_2, -z, t) \\
u_3(x_1, x_2, z, t) = u_3(-x_1, x_2, z, t) = u_3(x_1, -x_2, z, t) = -u_3(x_1, x_2, -z, t) \\
\tau(x_1, x_2, z, t) = \tau(-x_1, x_2, z, t) = \tau(x_1, -x_2, z, t) = -\tau(x_1, x_2, -z, t)
\end{gathered} \tag{4.15}$$

Результаты п. 2, 3 справедливы и в этом случае. Это легко показать, заменив краевые условия (1.7) условиями периодичности и (4.14), и повторив все предыдущие рассуждения.

Итак, для доказательства существования ненулевого периодического по времени режима конвекции в задаче Рэлея достаточно установить наличие нечетнократного характеристического числа оператора A при сделанных выше предположениях.

В соответствии с (4.15) ищем $u \equiv u_3$ и τ в виде

$$\begin{gathered}
u(x, t) = u(t) \cos\frac{l\pi}{\alpha_1} x_1 \cos\frac{m\pi}{\alpha_2} x_2 \sin\frac{n\pi}{\gamma} z \\
\tau(x, t) = \tau(t) \cos\frac{l\pi}{\alpha_1} x_1 \cos\frac{m\pi}{\alpha_2} x_2 \sin\frac{n\pi}{\gamma} z
\end{gathered} \tag{4.16}$$

Подставив (4.16) в систему (2.2), придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = -\xi^2 u - \mu\frac{\eta^2}{\xi^2}\Phi(t)\tau, \qquad \frac{d\tau}{dt} = -\mu f_0(t) u - \frac{\xi^2}{p}\tau \tag{4.17}$$

$$\xi^2 = \pi^2 \left[\left(\frac{l}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{\alpha_2}\right)^2 + \left(\frac{n}{\gamma}\right)^2\right], \qquad \eta^2 = \pi^2\left[\left(\frac{l}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{\alpha_2}\right)^2\right]$$

$$(l^2 + m^2 \neq 0, \quad l, m = 0, 1, 2, \ldots, n = 1, 2 \ldots) \tag{4.18}$$

Исключив τ, получим задачу на собственные значения

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\left[\xi^2\frac{1+p}{p}-\frac{1}{\Phi}\frac{d\Phi}{dt}\right]\frac{du}{dt}+\left[\frac{\xi^4}{p}-\frac{\xi^2}{\Phi}\frac{d\Phi}{dt}\right]u=R\frac{\eta^2}{\xi^2}\Phi f_0 u \tag{4.19}$$

$$u(0)=u(T),\qquad \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=T} \tag{4.20}$$

При помощи замены

$$u(t)=v(t)\exp[-\psi(t)],\qquad \psi(t)=\xi^2\frac{1+p}{p}t-\ln\Phi(t) \tag{4.21}$$

приведем уравнение (4.19) к самосопряженному виду

$$Lv\equiv\frac{d}{dt}\left(e^{-\psi}\frac{dv}{dt}\right)+\left[\frac{\xi^4}{p}-\frac{\xi^2}{\Phi}\frac{d\Phi}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Phi}\frac{d\Phi}{dt}\right)\right]e^{-\psi}v=$$

$$=R\frac{\eta^2}{\xi^2}\Phi f_0 e^{-\psi}v \tag{4.22}$$

$$v(0)=v(T)e^{-\psi(T)},\qquad \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0}=e^{-\psi(T)}\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=T} \tag{4.23}$$

В работе П. Г. Калафати [13] даны следующие достаточные условия того, что функция Грина дифференциального оператора второго порядка является нечетным K-ядром (нечетным ядром Келлога).

Краевые условия (4.23) являются частным случаем краевых условий вида

$$\alpha_{11}v(a)+\alpha_{12}\frac{dv(a)}{dt}+\beta_{11}v(b)+\beta_{12}\frac{dv(b)}{dt}=0 \tag{4.24}$$

$$\alpha_{21}v(a)+\alpha_{22}\frac{dv(a)}{dt}+\beta_{21}v(b)+\beta_{22}\frac{dv(b)}{dt}=0$$

$$a\leqslant t\leqslant b$$

Матрица коэффициентов условий (4.24) имеет вид

$$\begin{Vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22}\end{Vmatrix} \tag{4.25}$$

Обозначим символом $\{i,k\}$ определитель второго порядка матрицы (4.25), в состав которого входят столбцы с номерами i и k $(i<k)$.

Если выполняются условия

$$\{2,4\}=0,\qquad \{1,4\}\cdot\{1,2\}<0 \tag{4.26}$$

то функция Грина дифференциального оператора является нечетным K-ядром.

Краевые условия (4.23) удовлетворяют, как легко видеть, требованиям (4.26). Из теории интегральных уравнений с нечетным ядром Келлога вытекает, что первое собственное число задачи (4.22), (4.23) простое

$$0<R_0'<R_1'\leqslant R_2'<R_3'\leqslant R_4'<\ldots,\qquad R_n'=\eta^2\xi^{-2}R_n \tag{4.27}$$

при этом n-я собственная функция имеет n или $n+1$ нулей при нечетном n и n или $n-1$ нулей при четном n.

Положим $k_1 = \alpha_1 / \gamma$, $k_2 = \alpha_2 / \gamma$. Из (4.27) получим (4.28)

$$R_{0lmn} = \frac{\xi^2}{\eta^2} R_0', \quad \xi^2 = \left(\frac{\pi n}{\gamma}\right)^2 + \eta^2, \quad \eta^2 = \frac{\pi^2}{\gamma^2}\left[\left(\frac{l}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{k_2}\right)^2\right]$$

Зафиксируем параметр $\gamma = \gamma_0$ и рассмотрим первое собственное число задачи (2.2)

$$R_* = R_*(k_1, k_2) = \min_{l,m,n} R_{0lmn}(\eta) \tag{4.29}$$

Минимум в (4.29) достигается при некоторой тройке (l, m, n). Действительно, при $\eta^2 \to 0, \infty$ имеем

$$R_{ilmn} \to \infty \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots) \tag{4.30}$$

Это доказывается так же, как в работе [14].

Если $R_*(\eta)$ — кратное собственное число, то найдутся такие тройки натуральных чисел (l, m, n), (l', m', n'), что

$$R_{0lmn}(\eta) = R_{0l'm'n'}(\eta_1) = R_*, \qquad \eta_1 = \frac{\pi^2}{\gamma_0^2}\left[\left(\frac{l'}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{m'}{k_2}\right)^2\right] \tag{4.31}$$

Линейный вполне непрерывный оператор, полученный обращением дифференциального оператора L, стоящего в левой части уравнения (4.22), аналитически зависит от η^2. По лемме 4.1 из [14] получим, что R_{0lmn} также аналитически зависит от η^2. Следовательно, функция $\Phi_0(k_1, k_2)$, определенная равенством

$$\Phi_0(k_1, k_2) = \frac{\xi^2}{\eta^2} R_{0lmn} - \frac{\xi_1^2}{\eta_1^2} R_{0l'm'n'}, \qquad \xi_1^2 = \left(\frac{\pi n'}{\gamma_0}\right)^2 + \eta_1^2 \tag{4.32}$$

аналитична внутри квадранта ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$). Как и в [14], функция $\Phi_0(k_1, k_2)$ не может быть тождественным нулем.

Таким образом, доказано, что при любом фиксированном γ почти для всех пар (k_1, k_2) собственное число R_* — простое. Выражение «почти для всех пар (k_1, k_2)» понимается в том смысле, что на любой аналитической кривой в плоскости (k_1, k_2) лежит не более чем счетное множество исключительных точек.

Лемма 4.1. Пусть ранг собственного числа R_0 задачи (4.22), (4.23) равен единице (т. е. отсутствуют присоединенные векторы). Тогда собственное число $\mu_0 = \sqrt{R_0}$ задачи (2.2) также имеет ранг, равный единице.

Доказательство. Предположим, что ранг собственного числа μ_0 отличен от единицы. Это означает, что существует присоединенный вектор w' — решение уравнения

$$w' = \mu_0 A w' + w_0 \tag{4.33}$$

Собственный вектор $w_0 = (\mathbf{u}, \tau)$ определен равенством (4.16). Легко видеть, что присоединенный вектор w' должен иметь вид

$$w' = w(t) \cos\frac{l\pi}{\alpha_1} x_1 \cos\frac{m\pi}{\alpha_2} x_2 \sin\frac{n\pi}{\gamma} z, \qquad w(t) = (u'(t), \tau'(t)) \tag{4.34}$$

Подставляя (4.34) в (4.33) и повторяя все предыдущие преобразования, получаем, что $u'(t)$ — решение уравнения

$$u' = R_0 L^{-1}\Phi f_0 e^{-\psi} u' + u_0 \qquad (u_0 = R_0 L^{-1}\Phi f_0 e^{-\psi} u_0 \equiv R_0 G u_0) \tag{4.35}$$

Следовательно, u' — присоединенный вектор оператора G, соответствующий характеристическому числу R_0, что противоречит условию леммы.

Из простоты собственного числа R_0, теоремы 3.1 и леммы 4.1 вытекает следующее утверждение о существовании периодической конвекции.

Теорема 4.2. При любом фиксированном γ почти для всех пар (k_1, k_2) наименьшее собственное число R_* задачи (4.22), (4.23) — простое и является точкой бифуркации оператора K: при переходе параметра μ через критическое значение $\mu_* = R_*^{1/2}$ возникают ненулевые решения уравнения (3.13) (или задачи (1.5)).

Поступило 9 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.
2. Уховский М. Р., Юдович В. И. Об уравнениях стационарной конвекции. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
3. Юдович В. И. О возникновении конвекции. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
5. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
6. Бурдэ Г. И. Численное исследование конвекции, возникающей в модулированном поле внешних сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, Изд. 2. Гостехиздат, 1953.
8. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Физматгиз, 1961.
9. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5.
10. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М., Гостехиздат, 1953.
11. Ворович И. И., Юдович В. И. Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости. Матем. сб., 1961, т. 53 (95), № 4.
12. Никольский С. М. О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных. Усп. матем. н., 1961, т. 16, вып. 5.
13. Калафати П. Г. *К*-свойства функции Грина линейных дифференциальных систем второго порядка. Уч. зап. Харьковск. ун-та, Сер. 4, 1957, т. 25, стр. 80.
14. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.