

УДК 532.516

## УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ

М. А. ГОЛЬДШТИК, В. А. САПОЖНИКОВ

(Новосибирск)

Исследована гидродинамическая устойчивость течения несжимаемой жидкости между коаксиальными цилиндрами по отношению к трехмерным возмущениям. Задача поставлена так, что охвачен широкий класс течений проводящей жидкости. Разработан метод численного решения задачи гидродинамической устойчивости, на основе которого возможно вычисление собственных значений практически для всего диапазона изменения параметров.

Течения жидкости в круглых и кольцевых трубах для практики представляют больший интерес, чем течения в плоских каналах. Тем не менее работы в области гидродинамической устойчивости в основном посвящены последним. Это объясняется тем, что задача математического исследования устойчивости течений в плоских каналах значительно легче. В монографии [1] отмечается, что изучение устойчивости течения между цилиндрическими трубами связано с большими трудностями, пока непреодоленными даже в случае осесимметричных возмущений. В работе [2] впервые изучается устойчивость такого течения. В [2] исследование устойчивости проводится только по отношению к осесимметричным возмущениям и в узком диапазоне изменения волновых чисел и чисел Рейнольдса.

**1. Постановка задачи.** Предполагается внешнее магнитное поле — однородное, стационарное и параллельное оси цилиндров; магнитное число Рейнольдса

$$R_m \ll 1 \quad (R_m = \mu \sigma U h, \quad h = r_1 - r_0)$$

Здесь  $\mu$  — магнитная проницаемость;  $\sigma$  — проводимость;  $U$ ,  $h$  — характерные масштабы скорости и длины;  $U$  — средняя по поперечному сечению продольная скорость;  $r_0$  и  $r_1$  — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров.

При этих предположениях в линейном относительно  $R_m$  приближении уравнения, описывающие течение жидкости в цилиндрических координатах  $(r, \theta, z)$ , принимают вид

$$\begin{aligned} L_1 v_1 - \frac{v_2^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{R} \left( L_2 v_1 - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \right) - N v_1 & (1.1) \\ L_1 v_2 + \frac{v_1 v_2}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \left( L_2 v_2 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) - N v_2 \\ L_1 v_3 &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \left( L_2 v_3 + \frac{v_3}{r^2} \right) \quad \left( R = \frac{U h}{\nu}, \quad N = \frac{\sigma h B_0}{\rho U} \right) \\ \frac{\partial r v_1}{\partial r} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{\partial r v_3}{\partial z} &= 0, \quad L_1 = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_3 \frac{\partial}{\partial z} \\ L_2 &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Система (1.1) правильно учитывает влияние магнитного поля лишь для осесимметричных возмущений. При отсутствии поля, для данного случая и произведены все фактические расчеты этой работы, возмущения произвольны.

Здесь  $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$  — вектор скорости;  $p$  — давление;  $R$  — число Рейнольдса;  $N$  — число Стюарта;  $\rho, \nu$  — плотность, кинематическая вязкость жидкости;  $B_0$  — характерный масштаб напряженности магнитного поля.

В качестве основного рассматривается стационарное течение, вектор скорости  $\mathbf{v}_0$  которого зависит только от  $r$ . Из (1.1) при условии непроницаемости цилиндров получается, что  $\mathbf{v}_0 = \{0, v, u\}$ . Функции  $v(r)$  и  $u(r)$  определяются интегрированием (1.1) при условиях

$$v(\xi) = v_0, \quad v(1 + \xi) = v_1, \quad u(\xi) = 0, \quad u(1 + \xi) = u_1 \quad (1.2)$$

$$2 \int_{\xi}^{1+\xi} ru \, dr = 1 + 2\xi \quad \left( \xi = \frac{r_0}{h} \right) \quad (\xi \leq r \leq 1 + \xi)$$

Величина  $\xi$  характеризует ширину зазора между цилиндрами,  $r$  — безразмерный радиус. Последнее равенство в (1.2) фиксирует безразмерный расход, остальные — условия прилипания на цилиндрах.

Для  $u(r)$  получается простая формула

$$u = Br^2 + D \ln r + C \quad (1.3)$$

а для  $v(r)$  — уравнение

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d(rv)}{dr} - RNv = 0$$

В (1.3) коэффициенты определяются на основе (1.2). Данной постановкой охватывается широкий класс течений жидкости. Например, с ростом  $\xi$  течение стремится к плоскому, при этом подбором значений  $v_0, v_1, u_1$  получаются известные течения в плоском канале и между вращающимися цилиндрами. Это позволяет одной программой для ЭВМ исследовать гидродинамическую устойчивость достаточно широкого семейства течений и проследить количественные и качественные изменения при непрерывном переходе от одного течения к другому.

Исследование гидродинамической устойчивости течения жидкости проводится методом малых возмущений. В основной поток  $\mathbf{v}_0, p_0$  вносятся возмущения  $\mathbf{v}_*, p_*, |\mathbf{v}_*| \ll |\mathbf{v}_0|, |p_*| \ll |p_0|$ . Если  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_*, p = p_0 + p_*$  подставить в (1.1), произвести линеаризацию, а затем решение полученной однородной линейной дифференциальной системы относительно  $\mathbf{v}_*, p_*$  представить в виде

$$\mathbf{v}_* = \mathbf{w}(r) e^{i\alpha(z-ct) + im\theta}, \quad p_* = -\frac{i}{\alpha R} q(r) e^{i\alpha(z-ct) + im\theta} \quad (1.4)$$

то для  $q$  и  $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$  получится система

$$brw_1 - \frac{2Rv}{r} w_2 = \frac{i}{\alpha} q' + \left\{ \frac{1}{r} (rw_1)' \right\}' - \frac{2im}{r^2} w_2 \quad (1.5)$$

$$brw_2 - R \left( v' + \frac{v}{r} \right) w_1 = -\frac{m}{\alpha r} q + \left\{ \frac{1}{r} (rw_2)' \right\}' + \frac{2im}{r^2} w_1 \quad (1.6)$$

$$\frac{a}{r} w_3 + Ru'w_1 = -q + \frac{1}{r} (rw_3)' \quad (1.7)$$

$$(rw_1)' + iarw_3 + imw_2 = 0 \quad (0 \leq \alpha < \infty, m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.8)$$

Здесь  $\alpha$  и  $m$  — продольное и азимутальное волновые числа,  $c = X + Yi$  — комплексная скорость распространения возмущения в  $z$ -на-

правления, причем  $X$  — фазовая скорость, а  $Y$  характеризует нарастание ( $Y > 0$ ) или затухание ( $Y < 0$ ) возмущения во времени; штрих означает дифференцирование по  $r$

$$a = r \left[ i\alpha R(u - c) + \frac{imR}{r}v + \frac{m^2}{r^2} + \alpha^2 \right], \quad b = \frac{1}{r} \left( \frac{a}{r} + RN \right) \quad (1.9)$$

Граничные условия для (1.5) — (1.8) следуют из условий прилипания и непроницаемости цилиндров

$$w_i(\xi) = w_i(1 + \xi) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.10)$$

Граничные условия на функцию  $q$ , представляющую собой давление, не ставятся, поэтому кажется естественным ее исключение из системы. Такое исключение, приводящее к усложнению уравнений и появлению членов с  $u''$ ,  $v''$ , не является обязательным. Однако непосредственное использование системы (1.5) — (1.8) неудобно, поскольку формально эта система имеет седьмой порядок, тогда как граничных условий шесть.

Порядок системы понижается, если из (1.8)  $(rw_1)'$  подставить в (1.5), при этом (1.5) преобразуется

$$brw_1 - \frac{2Rv}{r}w_2 = \frac{i}{\alpha}q' - i\alpha w_3' - \frac{im}{r^2}(rw_2)' \quad (1.11)$$

Введем новые функции

$$\psi = \frac{ir}{\alpha}w_1, \quad \Phi = rw_2, \quad w = w_3, \quad f = rw_3', \quad F = \frac{1}{r}\Phi' \quad (1.12)$$

Тогда систему (1.6), (1.7), (1.11) можно представить в следующем виде:

$$w_1 = r^{-1}f, \quad f' = aw - i\tau\psi + rq \quad (1.13)$$

$$\psi' = rw + \gamma\Phi, \quad F' = b\Phi - n\psi + \gamma q$$

$$\Phi' = rF, \quad q' = \alpha^2(r^{-1}f - b\psi + \gamma F + i\beta\Phi)$$

В некоторых из выражений (1.4) и (1.12) фигурирует множитель  $\alpha^{-1}$ . Он введен для того, чтобы в окончательной системе уравнений (1.13) был возможен предельный переход при  $\alpha \rightarrow 0$ .

В уравнениях (1.13) введены обозначения

$$\tau = \alpha Ru', \quad n = \frac{2\alpha m}{r^3} + i\alpha R \frac{rv' + v}{r^2}, \quad \gamma = \frac{m}{\alpha r}, \quad \beta = \frac{2Rv}{\alpha r^2}$$

Для удобства изложения и проведения расчетов вводится независимая переменная

$$y = r - \xi, \quad y \in [0, 1]$$

Граничные условия для (1.13) следуют из (1.10), (1.12)

$$w = \psi = \Phi = 0, \quad (y = 0, y = 1) \quad (1.14)$$

Таким образом, задача (1.13), (1.14) сводится к получению путем интегрирования (1.13) трех фундаментальных решений и нахождению нулей функции (2.2). Однако при определении фундаментальных решений встречаются затруднения, которые прежде всего обуславливаются наличием большого параметра в правых частях (1.13) при  $\alpha \gg 1$ ,  $R \gg 1$ , или малого параметра при производных. С последним связаны неустойчивость решений, проявляющаяся в виде доминирующего влияния быстрорастущего решения, и большие порядки и осцилляции решений.

Таким образом, задача исследования гидродинамической устойчивости стационарных течений между коаксиальными цилиндрами, имеющими продольную и вращательную скорости, в присутствии продольного магнитного поля свелась к нахождению собственных значений для задачи (1.13), (1.14).

**2. Метод решения.** Используя общеизвестные правила, задачу можно решать следующим способом. Линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.13) имеет шесть фундаментальных решений. Ее общее решение можно представить линейной комбинацией только трех фундаментальных решений, удовлетворяющих трем однородным граничным условиям, например при  $y = 0$

$$\Phi = \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 + \gamma_3 \Phi_3 \quad (2.1)$$

Здесь  $\Phi$  — вектор-столбец  $\{w, \psi, \Phi, f, F, q\}$ .

Из граничных условий на (2.1) при  $y = 1$  получается характеристическое уравнение для определения собственных значений  $c$

$$X(c) \equiv \det \|\varphi_{ij}\| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

Индекс  $i$  обозначает номер фундаментального решения в (2.1), а индекс  $j$  — номер компоненты вектора  $\varphi_i$ .

Обратим внимание, что для нахождения собственных значений при помощи (2.2) не требуется знания фундаментальных решений в точках интервала  $(0, 1)$  и что при переходе к новым линейно-независимым решениям при произвольном  $c$  функция  $X(c)$  в (2.2) приобретает лишь множитель и отношение определителей типа (2.2) остается инвариантным. Следовательно, если вместо фундаментальных решений ввести новые инвариантные относительно преобразования фундаментальных решений функции, составленные из этих решений, то перечисленные трудности можно исключить. В этом состоит идея предлагаемого метода, являющегося дальнейшим развитием методов [3-5].

Новые функции  $A_{ij}$  ( $A = \|A_{ij}\|$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ) вводятся при помощи преобразования

$$\Psi = AZ \quad (2.3)$$

Через  $\Psi$  обозначается вектор-столбец, компонентами которого являются три разные функции из (1.13); вектор  $Z$  определяется остальными тремя функциями. Можно показать, что введение матрицы  $A$  возможно. Для этого используется (2.1) и записывается (2.3) для каждого фундаментального решения  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Получается система, устанавливающая связь между новыми переменными  $A_{ij}$  и старыми  $\varphi_{ij}$

$$\Psi_{ij} = \sum_{k=1}^3 A_{jk} Z_{ik} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.4)$$

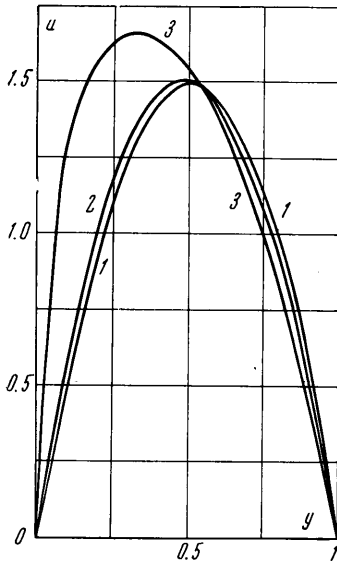
(обозначения прежние). Функции  $A_{ij}$  будут существовать, если соответствующие определители системы (2.4) отличны от нуля.

Итак, пусть  $A$  введена при помощи (2.3). Тогда, зная, например, при  $y = 0$  начальные данные для фундаментальных решений, можно определить в этой граничной точке матрицу  $A$ . В другой точке,  $y = 1$ , на основе граничных условий и (2.3) получается характеристическое уравнение. Например, если  $\Psi(1) = 0$ , то характеристическим уравнением будет

$$X(c) \equiv \det A = 0 \quad (2.5)$$

Таким образом, в терминах новых функций  $A_i$  задача свелась к их нахождению на  $[0, 1]$  и решению уравнения (2.5).

В конкретных расчетах собственные значения (1.13), (1.14) находились способом, учитывающим некоторые особенности задачи. Как и в случае хорошо известного уравнения Орра — Зоммерфельда, решение системы (1.13) внутри интервала  $(0,1)$  имеет критическую точку  $y_0$ , в окрестности которой оно имеет погранслоный характер поведения. Можно показать, что система уравнений для  $A$ , которая приведена ниже, имеет устойчивое



Фиг. 1

направление интегрирования к критической точке. Поэтому при расчетах осуществляется «сшивание» решения в точке  $y_0$  [5]. Из условия непрерывности решения (1.13) в точке  $y_0$  и (2.3) получается характеристическое уравнение

$$\det (A^- - A^+)_{y=y_0} = 0 \quad (2.6)$$

Через  $A^-$  и  $A^+$  обозначены матрицы, получающиеся в точке  $y_0$  при  $y \rightarrow y_0$  слева и справа. Система уравнений для определения матрицы  $A$  строится следующим способом.

Выбор векторов  $\Psi$ ,  $Z$  в (2.3) (а эта операция неоднозначна) производится из соображений меньшей затраты арифметических операций и устойчивости расчета при вычислении  $A$ . В случае задачи (1.13), (1.14) такими векторами являются  $\Psi = \{f, F, q\}$ ,  $Z = \{w, \psi, \Phi\}$ . Если продифференцировать (2.3) и воспользоваться системой (1.13) и (2.3), то для  $A$  получится

$$A' = D_1 + D_2 A - A(D_3 + D_4 A) \quad (2.7)$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} a - i\tau & 0 \\ 0 & -n & b \\ 0 & -\alpha^2 b & i\alpha^2 \beta \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & \gamma \\ \alpha^2 r^{-1} \alpha^2 \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_4 = \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \end{pmatrix}$$

Общий вид (2.3), (2.7) никак не связан с порядком системы (1.13), т. е. он останется таким же для системы порядка  $k$ . Изменится только размерность векторов и матриц.

Для получения  $A$  необходимо еще задать начальные данные. В задании последних при произведенном выборе векторов  $\Psi$ ,  $Z$  и при граничных условиях (1.14), т. е.  $Z = 0$ , возникают затруднения, вызванные тем, что в точках  $y = 0$ ,  $y = 1$  матрица  $A$  имеет особенность. Для преодоления этой трудности имеются несколько вариантов, один из которых ниже описывается.

Система (1.13) интегрируется три раза при таких начальных данных в граничных точках, при которых выполняются условия (1.14) и которые обеспечивают линейную независимость полученных трех фундаментальных решений. Эти решения находятся в малой окрестности граничных точек, в которой не успевает развиться неустойчивость. Итак, пусть, например, на  $[0, y_1]$  получены три фундаментальных решения. Тогда решением системы (2.4) при  $y = y_1$  вычисляются элементы  $A$ , ко-

торые и служат начальными данными для (2.7) в точке  $y = y_1$ . После задания этих начальных данных интегрируется (2.7) в направлении от граничных точек к точке  $y_0$ , в которой вычисляется определитель (2.6).

Из описанной процедуры получения  $A$  видно, что сделанный выбор векторов  $\Psi, Z$  усложнил задание начальных данных для (2.7). Например, если взять за  $\Psi = \{w, \psi, \Phi\}, Z = \{f, F, q\}$ , то в точках  $y = 0, y = 1$  при условиях (1.14) задание  $A$  возможно и  $A = 0$ . Однако при этом система (2.7) становится сложной и ее интегрирование требует больших затрат машинного времени.

Таким образом, решение задачи на собственные значения (1.13), (1.14) свелось к вычислению корней уравнения (2.6) и получению матрицы  $A$  интегрированием (2.7). Уравнение (2.6) решается итерационным методом [3].

После вычисления собственного значения собственная функция на  $[0, 1]$  находится при помощи интегрирования задачи Коши

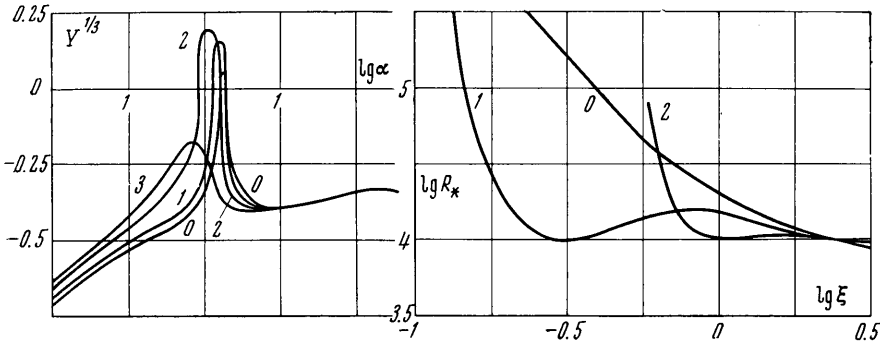
$$Z' = (D_3 + D_4 A)Z, \quad Z(y_0) = Z_0$$

и (2.3). В последнем равенстве  $Z_0$  вычисляется решением системы

$$(A^- + A^+)Z_0 = 0$$

**3. Результаты расчетов.** Предлагаемый метод был испытан при многочисленных конкретных расчетах собственных значений в задачах гидродинамической устойчивости. Этими расчетами с хорошей точностью были повторены известные, например [2, 6], и получены новые результаты.

Расчеты проводились в широком диапазоне изменения  $\alpha, R$  и других параметров. Исследуется гидродинамическая устойчивость течения жидкости с профилем



Фиг. 2.

Фиг. 3.

скорости (1.3) и  $v \equiv 0$  (в (1.2)  $v_0 = v_1 = u_1 = 0$ ) без магнитного поля в зависимости от ширины зазора между цилиндрами. Рассматривается устойчивость по отношению к трехмерным возмущениям.

С вариацией  $\xi$  меняется ширина зазора между цилиндрами и деформируется профиль скорости. При  $\xi \rightarrow 0$  профиль скашивается к внутреннему цилиндру и стремится к профилю скорости в круглой трубе за исключением некоторой окрестности точки  $y = 0$  (на фиг. 1 кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям  $\xi = 50, 1, 0.01$ ).

Сначала была поставлена задача — изучить устойчивость течения по отношению к возмущениям со старшими номерами азимутального волнового числа  $m$  при фиксированных других параметрах. (Выбор части параметров из их большого числа не связан с возможностями метода, а определяется интересами авторов). Наиболее интересные результаты такого изучения показаны на фиг. 2. Приведенные зависимости  $Y(\alpha)$  собственных значений, с которыми связана неустойчивость течения, получены при  $R = 20\,000, \alpha \in (0.004, 400), \xi = 1$  и  $m = 0, 1, 2, 3$  (кривой  $i$  соответствует  $m = i$ ). При рассматриваемом числе Рейнольдса течение неустойчиво по отношению к возмущениям с  $m = 0, 1, 2$ , при этом волновые числа наиболее быстро нарастающих возмущений  $\alpha \approx 2$ .

С ростом  $\alpha$  все кривые сливаются, то же относится и к зависимостям  $X(\alpha)$ . Это асимптотическое свойство легко следует из системы (1.13). Зависимости  $Y(\alpha)$  в окрестности  $\alpha \approx 2$  имеют резкий характер поведения, особенно при  $m = 0$ . Таким он сохраняется и при других значениях параметров. Второй максимум  $Y(\alpha)$  достигается при  $\alpha \sim 100$ , после которого кривые  $Y(\alpha)$  асимптотически выходят на зависимость  $Y = -\alpha/R$  (см. также [6]).

Приведенные результаты показывают, что в отличие от плоского течения ( $\xi \gg 1$ ), для которого справедлива теорема Сквайра и для которого наиболее опасны осесимметричные возмущения, для течения между коаксиальными цилиндрами с  $\xi = 1$  наиболее опасными возмущениями являются трехмерные с  $m = 2$ . Это видно также из фиг. 3, на которой представлены зависимости критического числа Рейнольдса  $R_*$  от  $\xi$ . (Обозначения такие же, как и на фиг. 2.) Таким образом, с изменением  $\xi$  роль наиболее опасных переходит от одних возмущений к другим, и поэтому при исследовании гидродинамической устойчивости недостаточно ограничиваться только одним избранным возмущением, например, как это сделано в [2].

Для приблизительно плоского течения с  $\xi = 50$   $R_*(m=0) = 7696$ ,  $R_*(m=1) \approx 8000$ ,  $R_*(m=2) \approx 8300$ . С уменьшением  $\xi$  от  $\xi = 50$  (но еще больших) эти значения  $R_*$  увеличиваются и близки. Для  $0.7 \lesssim \xi \lesssim 3$   $\min R_*$  достигается при  $m = 2$ , для  $0.13 \lesssim \xi \lesssim 0.7$  — при  $m = 1$ . С дальнейшим уменьшением  $\xi$  при  $m = 1, 2$ ,  $R_*$  быстро увеличиваются, соответствующие волновые числа  $\alpha_*$  уменьшаются. Такая картина обычно наблюдается в задачах гидродинамической устойчивости при стабилизации потока — сдвиг нейтральной кривой в бесконечность.

Иначе ведет себя осесимметричное возмущение. С некоторого  $\xi$  ( $\xi \approx 0.5$ ) при  $\xi \rightarrow 0$   $R_*(\xi)$  асимптотически выходит на зависимость, которую с довольно хорошей точностью можно описать формулой  $R_* = 1.26 \cdot 10^4 \xi^{-2.2}$ . Отсюда следует, что течение жидкости между коаксиальными цилиндрами становится абсолютно устойчивым ( $R_* = \infty$ ) по отношению к рассмотренным возмущениям только в пределе ( $\xi \rightarrow 0$ ) при уменьшении радиуса внутреннего цилиндра до нуля.

В заключение авторы благодарят В. Н. Штерна за обсуждение работы и Т. А. Вильгельми за оказание помощи при проведении расчетов.

Поступило 12 X 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Betchov R., Criminale W. O. Stability of parallel flows. New York — London, Acad. Press, 1967.
2. Mott J. E., Joseph D. D. Stability of parallel flow between concentric cylinders. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 10.
3. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии поля массовых сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
4. Сапожников В. А. Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки. Труды Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости (II), Новосибирск, «Наука» 1969.
5. Гольдштик М. А., Сапожников В. А., Штерн В. Н. Локальные свойства задачи гидродинамической устойчивости. ПМТФ, 1970, № 2.
6. Сапожников В. А., Штерн В. Н. Численный анализ устойчивости плоского течения Пуазейля. ПМТФ, 1969, № 4.