

УДК 533.6.014

О СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ГАЗЕ В ОТСУТСТВИИ ВНЕШНИХ СИЛ

В. С. ГАЛКИН, М. Н. КОГАН, О. Г. ФРИДЛЕНДЕР

(Москва)

Анализируется обнаруженный в работе [1] новый тип конвекции, возникающей около нагретых тел в отсутствие массовых сил и обусловленной температурными (барнеттовскими) напряжениями.

В работе [1] показано, что в случае медленных течений «плотного» газа (т. е. при числе Кнудсена $K \rightarrow 0$ и числе Рейнольдса $R \lesssim 1$) при наличии конечного перепада температуры $T^{-1}\Delta T \leq O(1)$ уравнения Навье — Стокса несправедливы: наряду с напряжениями из-за градиентов скорости здесь возникают напряжения того же порядка, обусловленные градиентами температуры. При этом около любого (исключая сферу) равномерно нагретого односвязного тела в отсутствие массовых сил газ движется, т. е. имеет место конвекция нового типа, вызванная температурными напряжениями (кратко, термострессовая конвекция). Ниже определяются области преимущественного влияния гравитационной и термострессовой конвекций и приводятся примеры последней.

Важно подчеркнуть, что явление термострессовой конвекции свойственно именно сплошной среде (т. е. течениям при $K \ll 1$), хотя оно и не описывается уравнениями Навье — Стокса (см. п. 2).

Установленный в работе [1] факт «неприменимости» уравнений Навье — Стокса для описания медленных течений около нагретых (охлажденных) тел заставляет пересмотреть эту область газодинамики. Приведенные в п. 3, 4 примеры течений демонстрируют конвекцию, вызванную только температурными напряжениями. Если же имеются и другие причины, вызывающие движение с числами Рейнольдса $R \lesssim 1$, то термострессовая конвекция нелинейным в общем случае образом накладывается на это движение, внося изменения основного порядка (с построенным по возмущенной скорости числом $R = O(1)$). В п. 5 дается пример течения, вызванного одновременно температурным скольжением и барнеттовскими напряжениями.

1. Газодинамика сплошной среды имеет место при числах Кнудсена

$$K \approx M/R \ll 1 \quad (K = \lambda/L) \quad (1.1)$$

Здесь λ , L — характерные длина пробега молекул и размер течения, M — число Маха. При $R \lesssim 1$ течения сплошной среды имеют место при $M \approx KR \ll 1$. Для характеристики течений важное значение имеет также критерий

$$\theta = T^{-1}\Delta T \quad (1.2)$$

где T , ΔT — характерные температура и ее перепад в течении.

Рассмотрим класс «медленных» течений, когда

$$R_\infty = \rho_\infty u_\infty L / \mu_\infty \leq O(1), \quad M_\infty \approx R_\infty K_\infty \ll 1, \quad \theta \leq O(1)$$

Как показано в работе [1], этот класс течений не может быть описан уравнениями Навье — Стокса, так как в газе возникают температурные напряжения, имеющие тот же порядок, что и обычные навье-стоксовские вязкие напряжения. С учетом этих напряжений имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} &= 0, & \frac{5}{2} p_\infty \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \eta \frac{\partial T}{\partial x_i} \\ \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{ij}^{(2)}}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$p_{ij}^{(1)} = -2\mu [\partial u_i / \partial x_j], \quad [A_{ij}] = 1/2(A_{ij} + A_{ji}) - 1/3\delta_{ij}A_{kk}$$

$$p_{ij}^{(2)} = AT^{2s-1} \left(\omega_1 \left\{ T \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \right] + s \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \right\} - \omega_3 \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \right)$$

$$A = (k/m)\mu_\infty^2(p_\infty T_\infty^{2s})^{-1}, \quad \mu \sim T^s$$

Здесь μ, η — коэффициенты вязкости и теплопроводности, ω_i — положительные числа, k/m — газовая постоянная, остальные обозначения — обычные¹.

Удобно несколько перегруппировать члены уравнения сохранения импульса. Используя уравнение энергии [1] и объединив «градиентную» часть навье-стоксовских и барнеттовских напряжений с давлением, имеем

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (p + \pi)}{\partial x_i} - \Pi_i^{(1)} + \Pi_i^{(2)} = 0$$

$$\pi = A \left[\frac{1}{2} \left(s\omega_1 - \frac{\omega_3}{3} \right) T^{2s-1} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{5}{3} \frac{p_\infty T_\infty^s}{\eta_\infty} \omega_1 T^s \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (1.4)$$

$$\Pi_i^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\Pi_i^{(2)} = \frac{A}{2} \left[T^{2s-2} (s\omega_1 + \omega_3) \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} - 5 \frac{p_\infty T_\infty^s}{\eta_\infty} \left(\omega_1 + \frac{\omega_3}{s} \right) \frac{\partial T^s}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right]$$

Сравним, как и в [1], температурные напряжения $p_{ij}^{(2)}$ при $\theta = O(1)$ с вязкими напряжениями, возникающими при тех же параметрах набегающего потока M_∞ и R_∞ в навье-стоксовском течении (т. е. без учета барнеттовских членов)

$$\frac{p_{ij}^{(1)}}{p_{ij}^{(2)}} \sim \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_\infty / \frac{\mu^2}{\rho T} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \sim R_\infty \leq O(1) \quad (1.5)$$

Следовательно, при $R_\infty \leq O(1)$ барнеттовские члены становятся определяющими. При этом инерционные, вязкие и барнеттовские члены в уравнениях (1.3), (1.4) одного порядка [1]. Из сравнения барнеттовских членов с вязкими и инерционными в (1.4) легко видеть, что скорость, вызываемая барнеттовскими напряжениями, порядка «вязкой» скорости

$$u_* = \mu_\infty / \rho_\infty L$$

а число Рейнольдса, построенное по этой скорости, равно единице. В навье-стоксовском же течении характерная скорость имеет порядок скорости на бесконечности $u_\infty = u_* R_\infty \ll u_*$, т. е. при $R_\infty < 1$ характерной скоростью становится вязкая скорость, определяемая барнеттовскими температурными напряжениями².

Если температура поверхности тела переменна, то вдоль этой поверхности возникает скольжение, в общем случае тоже вызывающее скорости основного порядка, т. е. порядка вязкой скорости

$$u_\tau |_{n=0} = \beta \frac{\mu}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial x_\tau} \Big|_{n=0}, \quad u_\tau \ll u_* \quad (1.6)$$

¹ Уравнения (1.3) можно получить, исходя как из метода Чепмена — Энскога [1], так и метода Гильберта. Описки в работе [1]: перед второй квадратной скобкой в формуле (1.13) должен стоять знак плюс, а не минус; в тексте после формулы (1.6) должно быть $\omega_1 = \omega_2 = 3$.

² Исключительные случаи будут отмечены ниже.

Здесь n, τ — нормаль и касательная к поверхности, для данного сорта газа и материала стенки $\beta = \text{const}$. Поэтому в качестве одного из граничных условий при решении системы (1.3) необходимо принимать условие крипа (1.6); остальные условия — обычные. Отметим некоторые характерные типы течений.

1. Обтекание равномерно нагретых тел при $R_\infty = O(1)$, когда $u_\infty \sim u_*$ (температура T_w постоянна по поверхности тела, т. е. $\nabla T_w = 0$ и температурное скольжение отсутствует). При $\theta = O(1)$ температурные напряжения играют ту же роль, что и вязкие напряжения и инерционные члены.

2. Равномерно нагретые поверхности, $R_\infty = 0$, т. е. $u_\infty = 0$. Как показано в работе [1], вне любой односвязной равномерно нагретой поверхности возникает конвективное движение, вызванное температурными напряжениями (исключением является сфера, около которой газ покоится). Газ может покоиться также между концентрическими сферами, соосными круговыми цилиндрами и параллельными плоскостями, нагретыми до различных температур. Характерная скорость конвекции $u \approx \theta^3 u_*$.

3. «Стоксовское» течение: $R_\infty \ll 1$, $\nabla T_w = 0$. Этот случай можно рассматривать, как возмущение задачи 2. Особым является случай обтекания сферы, так как здесь при $R_\infty = 0$ газ покоится, зависящие только от длины радиуса-вектора r температурные напряжения уравниваются давлением; здесь характерная скорость течения $u = O(u_\infty)$ и инерционными членами можно пренебречь¹. Для тел другой формы определяющими при $\theta = O(1)$ являются скорости термострессовой конвекции $u = O(u_*)$, а наличие набегающего потока вызывает лишь слабое возмущение течения.

4. Неравномерно нагретые поверхности ($\nabla T_w \sim T_w$). В этом случае температурное скольжение возбуждает скорости порядка вязкой скорости u_* и при любых $R_\infty \ll 1$ необходимо учитывать и инерционные, и вязкие, и барнеттовские члены в уравнениях (1.3).

Отметим, что вклад температурных напряжений существенно зависит от θ и формы тела.

В случае медленных течений смеси одноатомных газов появляется еще один важный критерий

$$N = n_\alpha^{-1} \Delta n_\alpha \quad (1.7)$$

Здесь $n_\alpha, \Delta n_\alpha$ — характерные значения концентрации и «перепада» концентрации α -й компоненты смеси. Из соотношений, полученных в работе [2], следует, что $p_i^{(2)}$ будет суммой членов, пропорциональных $\mu_\alpha [dq_{\alpha i} / dx_j]$, где парциальный тепловой поток q_α дается приближением Навье — Стокса и включает в себя как градиенты T , так и градиенты n_α .

Следовательно, при $N \sim 1$ барнеттовские члены уравнения импульса, содержащие производные по координатам от n_α , становятся такого же порядка, что и члены с температурными напряжениями ($\theta \sim 1$), и должны вызывать эффекты, аналогичные рассмотренным выше. Если относительные изменения концентраций на стенке порядка единицы, то необходимо учитывать (аналогично (1.6)) диффузионное скольжение. Указанные эффекты могут проявляться, например, при испарении или при химических реакциях на поверхности тел.

2. Сравним скорости термострессовой и гравитационной свободных конвекций. Первая определяется температурными напряжениями, и согласно (1.4) вызываемая ими скорость имеет порядок

$$u \sim \theta^3 u_*, \quad R_T = \frac{\rho_\infty u L}{\mu_\infty} = \frac{u}{u_*} \sim \theta^3 \quad (2.1)$$

¹ В п. 4 работы [1] рассматривается именно обтекание сферы. Утверждение, сделанное во второй фразе этого пункта, также относится к случаю сферы, а не произвольного тела, как можно понять из нее.

Для скорости гравитационной конвекции, как известно, имеем

$$u \sim \frac{gL^3\rho_\infty}{\mu_\infty} \theta, \quad R_g \sim \frac{gL^3\rho_\infty^2}{\mu_\infty^2} \theta = G \quad (2.2)$$

Здесь g — ускорение свободного падения, G — число Грасгофа. Скорости термострессовой конвекции (2.1) больше или порядка гравитационных (2.2), если

$$L \lesssim L_* = \left(\frac{\mu_\infty^2 \theta^2}{g\rho_\infty^2} \right)^{1/3} \quad (2.3)$$

При $\theta = 1$ и нормальных условиях для воздуха ($\nu = \mu/\rho = 1.5 \cdot 10^{-1} \text{ см}^2/\text{сек}$) имеем $L_* = 3 \cdot 10^{-2} \text{ см}$; соответствующее число $K = 2 \cdot 10^{-4}$.

Следовательно, для нормальных атмосферных условий в течениях с характерным размером $L < L_* \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ основным будет новый тип конвекции — термострессовая конвекция, при $L > L_*$ основной является гравитационная конвекция.

Граничный размер L_* изменяется обратно пропорционально $\rho^{2/3}$. Поэтому на высоте $H \approx 50 \text{ км}$, где плотность в 10^3 раз меньше плотности при нормальных условиях, $L_* \approx 3 \text{ см}$. При давлениях порядка $10^{-3} \text{ мм рт. ст.}$, часто встречающихся в вакуумных аппаратах, $L_* \sim 1 \text{ м}$. Если в объем с давлением $5 \cdot 10^{-3} \text{ мм рт. ст.}$ поместить несферическое тело с $L \geq 10 \text{ см}$ при $T_\infty = 300^\circ \text{ К}$ и $\theta = 1$, то согласно оценке (2.1) будет иметь место конвекция с характерной скоростью $u \sim 10^2 \text{ см/сек}$ при $K \lesssim 10^{-4}$. При этом скорости гравитационной конвекции более чем на два порядка меньше.

Важно отметить, что новый тип конвекции свойствен сплошной среде ($K \rightarrow 0$), а не обусловлен разреженностью газа. Действительно, ее интенсивность не зависит от законов взаимодействия молекул газа со стенкой. В то же время в другом предельном случае — на режиме свободномолекулярных течений ($K \gg 1$) — возникновение движения около равномерно нагретого тела определяется именно законами взаимодействия молекул газа со стенкой. Например, при наиболее распространенном диффузном законе взаимодействия газ покоится около любого выпуклого равномерно нагретого тела.

Действительно, рассмотрим последний случай. Очевидно, что газ покоится около равномерно нагретой сферы. Вычислим теперь скорость газа около выпуклого тела в произвольной точке A (фиг. 1). Так как газ на бесконечности покоится, то на элемент поверхности любого выпуклого тела падает одинаковое число молекул. Функция распределения молекул f вне телесного угла Ω равна функции распределения невозмущенного газа. Внутри этого угла f одинакова для любого тела, вписанного в этот угол, и в частности для вписанной сферы S . Но в случае сферы скорость в точке A равна нулю. Следовательно, она равна нулю и для данного тела.

Отметим, что большинство известных явлений следует либо из уравнений Навье — Стокса (при $K \rightarrow 0$), либо из рассмотрения свободномолекулярного режима (при $K \rightarrow \infty$). Своеобразие термострессовой конвекции состоит в том, что она имеет место в плотной среде (при $K \rightarrow 0$), но не описывается уравнениями Навье — Стокса.

Как показали проведенные выше оценки, при нормальных атмосферных условиях чисто термострессовая конвекция имеет место при $L \lesssim 10^{-2} \text{ см}$ ¹. Возникает естественный вопрос о скорости выравнивания температур газа и частиц столь малых размеров: не будет ли соответствующее время релаксации τ столь малым, что существенная разница температур газа и частицы

¹ Частицы таких размеров часто встречаются в атмосфере, в различных аэрозолях, в химических процессах и т. д. В теории дисперсных сред системы, включающие в себя частицы с размерами $L > 10^{-5} - 10^{-4} \text{ см}$, относят к грубодисперсным [3]. Соответствующие внутренние течения имеют место в капиллярно-пористых средах [4].

практически не имеет места? А ведь именно при наличии такой разницы и имеет место термострессовая конвекция.

Из уравнения энергии (второе уравнение (1.3)) легко видеть, что термострессовая конвекция может изменить теплопередачу лишь внутри своего порядка. Поэтому для оценки теплообмена между телом и газом, как и в вязких течениях при $R = O(1)$, можно ограничиться оценкой теплопередачи лишь за счет теплопроводности. Тогда скорость изменения температуры тела T_w примерно пропорциональна тепловому потоку к поверхности тела и обратно пропорциональна теплоемкости тела

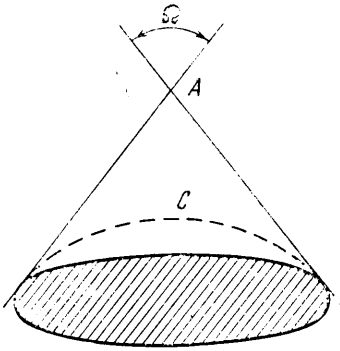
$$\frac{dT_w}{dt} \sim \frac{\eta L (T_w - T_\infty)}{c \rho_w L^3}$$

Отсюда время релаксации

$$\tau \sim \rho_w c L^2 / \eta \quad (2.4)$$

Здесь ρ_w, c — плотность, удельная теплоемкость тела, η — коэффициент теплопроводности газа. Для таких материалов, как сталь и углерод, из (2.4) получаем

$$\tau \sim 10^4 L^2 \text{ сек}$$



Фиг. 1

Отсюда для тела с характерными размерами $L = 10^{-4} - 10^{-2}$ см имеем $\tau \sim 10^{-4} - 10^0$ сек. С уменьшением плотности, как показано выше, граничный размер L_* растет. Следовательно, растет и время релаксации. Разность температур между телом и газом может стационарно поддерживаться за счет выделения тепла при химических реакциях на поверхности частицы, внешним излучением или высокочастотным нагревом. В условиях невесомости имеет место только термострессовая конвекция.

Таким образом, условия для проявления термострессовой конвекции представляются весьма часто встречающимися.

3. Для дальнейшего удобно привести уравнения сохранения (1.3), (1.4) к безразмерному виду. Обозначим координаты, давление, плотность, температуру, коэффициент вязкости соответственно через

$$Lx_i, \quad p_\infty p^*, \quad \rho_\infty \rho, \quad T_\infty T, \quad \mu_\infty \mu, \quad \text{так что } \mu = T^s$$

Скорость отнесем к вязкой скорости, тогда безразмерная скорость

$$v = \rho_\infty u L / \mu_\infty \quad (3.1)$$

Так как [1] изменения p^* пропорциональны K^2 , то введем p соотношением

$$p^* = 1 + K^2 p, \quad K = \frac{\mu_\infty}{L \rho_\infty} \left(\frac{k}{m} T_\infty \right)^{-1/2} \quad (3.2)$$

Характерные значения T_∞ и т. д. в случае внешней задачи есть условия в невозмущенном газе (при $T_w \gg T_\infty$ — на стенке), в случае внутренней задачи — условия на одной из стенок.

Исключая ρ при помощи уравнения состояния

$$\rho = 1 / T \quad (3.3)$$

приведем уравнения неразрывности, энергии и импульса соответственно к виду

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \ln T \quad (3.4)$$

$$E \mathbf{v} \cdot \nabla \ln T = \nabla (T^s \nabla T) \quad \left(E = \frac{5}{2} \frac{\kappa - 1}{\kappa} P \right) \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{T} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \Pi = \Pi^{(1)} - \frac{s\omega_1 + \omega_3}{2} (\nabla T)^2 \nabla T + E \left(\omega_1 + \frac{\omega_3}{s} \right) (\mathbf{v} \cdot \nabla \ln T) \nabla T^s \quad (3.6)$$

$$\Pi = p + \frac{1}{2} (s\omega_1 - \frac{1}{3}\omega_3) T^{2s-1} (\nabla T)^2 + \frac{2}{3} (1 + E\omega_1) T^{s-1} (\mathbf{v} \cdot \nabla T) \quad (3.7)$$

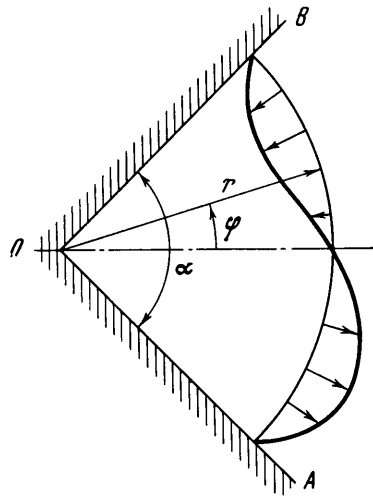
При записи уравнений (3.5)–(3.7) использовано уравнение (3.4), κ, P — отношение удельных теплоемкостей и число Прандтля. Граничное условие температурного скольжения (1.6) записывается теперь так:

$$v_\tau|_{n=0} = \beta T^s \frac{\partial T}{\partial x_\tau} \Big|_{n=0} \quad (3.8)$$

Отметим, что при помощи уравнений сохранения в форме (3.4)–(3.7) удобнее производить оценки различных членов при $\theta \ll 1$ (см. п. 1).

Всюду ниже ограничимся случаем одноатомного газа из максвелловских молекул, когда

$$E = \frac{2}{3}, \quad s = 1, \quad \omega_1 = 3, \quad \omega_3 = 0 \quad (3.9)$$



Фиг. 2

Это сделано для простоты изложения: все полученные ниже решения обобщаются на случай произвольных s .

Построим теперь точное решение системы уравнений (3.4)–(3.7) для плоского случая — аналог известного течения Гамеля. Однако последнее обусловлено расходом $Q \neq 0$. Здесь же при $Q = 0$ течение существует и вызывается термострессовой конвекцией.

Пусть температуры стенок OA и OB (фиг. 2) постоянны и отличны одна от другой, так что

$$T(\varphi = -\alpha/2) = 1, \quad T(\varphi = \alpha/2) = \tau > 1 \quad (3.10)$$

Предположим, что $T = T(\varphi)$, $v_\varphi = 0$. Тогда уравнения (3.4), (3.5) принимают соответственно вид

$$\frac{\partial r v_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{d^2 T^2}{d\varphi^2} = 0 \quad (3.11)$$

Отсюда

$$v_r = U(\varphi) / r, \quad T = \sqrt{a\varphi + b} \quad (3.12)$$

$$a = (\tau^2 - 1) / \alpha, \quad b = \frac{1}{2}(\tau^2 + 1) \quad (3.13)$$

С учетом (3.12), (3.13) проекции уравнения импульса (3.6) приобретают вид

$$-\frac{U^2}{Tr^3} + \frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{1}{r^3} (TU) ', \quad () ' = \frac{d()}{d\varphi} \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{2}{r^3} (TU) ' - \frac{3}{16} \left(\frac{a}{rT} \right)^3 \quad (3.15)$$

В эти уравнения входит только один барнеттовский член (последний член уравнения (3.15)), но именно он определяет движение при $Q = 0$. Из (3.15) имеем

$$\Pi = \frac{2}{r^2} TU + \frac{3}{8} \frac{a^2}{r^2 T} + f(r) \quad (3.16)$$

Подставляя (3.16) в уравнение (3.14), получаем

$$(TU)' + \frac{U^2}{T} + 4TU + \frac{3}{4} \frac{a^2}{T} = r^3 \frac{df}{dr}$$

Отсюда

$$(TU)' + \frac{U^2}{T} + 4TU + \frac{3}{4} \frac{a^2}{T} = C \quad (3.17)$$

$$f = -C(2r^2)^{-1} + C_1 \quad (3.18)$$

Здесь C, C_1 — постоянные интегрирования. Задача свелась к решению уравнения (3.17) с условиями прилипания при $\varphi = \pm \alpha/2$ и заданным Q . С целью выяснения качественной картины течения ограничимся простейшим случаем $\varepsilon = \tau - 1 \ll 1$. Разлагая (3.17) в ряд по ε , обозначая $V = \varepsilon^{-3}U$, в нулевом для V приближении по ε найдем

$$V'' + 4V = 3\alpha^{-3}\varphi + \varepsilon^{-3}(C - \frac{3}{4}ab^{-\frac{1}{2}}) \quad (3.19)$$

Для наиболее интересного случая

$$Q = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} V d\varphi = 0$$

решение уравнения (3.19) имеет вид

$$V = \frac{3}{4\alpha^3} \left(\varphi - \frac{\alpha}{2 \sin \alpha} \sin 2\varphi \right) \quad (3.20)$$

Профиль $V(\varphi)$ показан на фиг. 2. Около «горячей» стенки газ течет в сторону вершины, около холодной — в противоположную сторону.

4. Полученное в п. 3 точное решение является «уникальным», так как система уравнений для рассматриваемого класса течений очень сложная. Поэтому здесь и в п. 5 рассматриваются задачи, получаемые возмущениями краевых условий относительно простой исходной задачи. Простейшей является задача о теплопередаче между двумя параллельными стенками с заданными температурами

$$T(y=0) = 1, \quad T(y=1) = \tau > 1 \quad (4.1)$$

Решение задачи с возмущениями ищется в виде

$$T = T_0(y) + \varepsilon T_1(x, y), \quad \varepsilon \ll 1 \quad (4.2)$$

$$\Pi = \Pi_0(y) + \varepsilon \Pi_1(x, y), \quad v_x = \varepsilon v_x^*(x, y), \quad v_y = \varepsilon v_y^*(x, y)$$

Далее в этом и следующем пунктах звездочки сверху опускаются.

В нулевом приближении $v = 0$, температурные напряжения уравниваются давлением, так что в отличие от решения задачи в рамках уравнений Навье — Стокса $p = p(y)$. Из уравнения энергии (3.5) последовательно получаем

$$d^2 T_0^2 / dy^2 = 0, \quad T_0 = [(\tau^2 - 1)y + 1]^{1/2} \quad (4.3)$$

Уравнения для возмущенных величин, в которых пренебрегается величинами $O(\varepsilon)$ по сравнению с единицей, имеют следующий вид:

$$\nabla v = \frac{v_y}{T_0} \frac{dT_0}{dy} \quad (4.4)$$

$$T_0 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (T_0 T_1) = \frac{2}{3} \frac{v_y}{T_0} \frac{dT_0}{dy} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} T_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + 2T_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{dT_0}{dy} \right)^2 \frac{\partial T_1}{\partial x} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial y} = T_0 \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(T_0 \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - \frac{9}{2} \left(\frac{\partial T_0}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial T_1}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial T_0}{\partial y} \right)^2 \frac{v_y}{T_0} \quad (4.7)$$

В уравнениях (4.6), (4.7) конвективные члены опущены. Они порядка ε по сравнению с остальными. При решении указанной задачи удобно вводить переменную, аналогичную переменной Дородницына

$$\eta = \int_0^y \frac{dy}{T_0} \quad (4.8)$$

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть нижняя и верхняя стенки даются уравнениями

$$y = \varepsilon \gamma_0 \sin x, \quad y = 1 + \varepsilon \gamma_1 \sin x \quad (4.9)$$

где γ_i — заданные коэффициенты порядка единицы.

Возникающее за счет малого искривления стенок движение есть следствие термострессовой конвекции. В рамках уравнений Навье — Стокса $\mathbf{v} = 0$ в силу условий прилипания.

Будем использовать преобразование (4.8), так что

$$T_0 = a\eta + 1, \quad a = 1/2(\tau^2 - 1) \quad (4.10)$$

Решение возмущенной задачи ищем в виде, подсказываемом граничными условиями и уравнением (4.4)

$$T_1 = -t(\eta) \sin x, \quad v_x = \psi'(\eta) \cos x, \quad v_y = T_0 \psi(\eta) \sin x \quad (4.11)$$

Здесь $(\quad)' = d(\quad)/d\eta$. Используя (4.8), (4.10), (4.11), убеждаемся, что уравнение (4.4) удовлетворяется тождественно. Исключая далее Π_1 из уравнений (4.6), (4.7), будем иметь искомую систему уравнений

$$\begin{aligned} \psi^{IV} - aT_0^{-1}\psi'''' - 2T_0^2\psi'' - 3aT_0\psi' + (T_0^4 - 2a^2)\psi &= \\ &= 3a^2T_0^{-1}t' + 3a^3T_0^{-2}t \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$t'' + aT_0^{-1}t' - (T_0^2 + a^2T_0^{-2})t + 2/3a\psi = 0 \quad (4.13)$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$t(0) = a\gamma_0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0$$

$$t(\eta_*) = a\gamma_1/\tau, \quad \psi(\eta_*) = 0, \quad \psi'(\eta_*) = 0, \quad \eta_* = \eta(1) = 2(\tau + 1)^{-1} \quad (4.14)$$

Для получения наглядной качественной картины разложим уравнения (4.12), (4.13) в ряд по a и ограничимся главными членами этого разложения. Из (4.14) получим

$$t'' - t = 0, \quad t(0) = a\gamma_0, \quad t(1) = a\gamma_1 \quad (4.15)$$

Здесь и ниже производные берутся уже по y . Отсюда

$$t = \frac{a(C_1 e^y - C_2 e^{-y})}{e^2 - 1}, \quad C_1 = \varepsilon\gamma_1 - \gamma_0, \quad C_2 = \gamma_1 - \varepsilon\gamma_0 \quad (4.16)$$

Подставляя (4.16) в (4.12), получаем

$$\psi^{IV} - 2\psi'' + \psi = 3a^3(e^2 - 1)^{-1}(C_1 e^y + C_2 e^{1-y}) \quad (4.17)$$

Решение этого уравнения с граничными условиями прилипания при $y = 0$ и 1 запишем так:

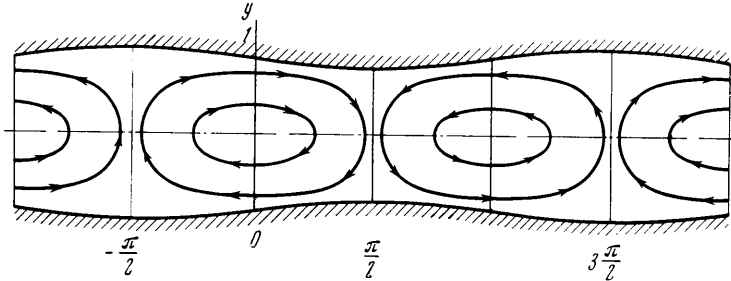
$$\begin{aligned} \psi &= 3ea^3 [8\Delta(e^2 - 1)]^{-1} \varphi(y) \\ \varphi(y) &= (\alpha_0 + 2\alpha_1 y + C_1 \Delta e^{-1} y^2) e^y + (2\beta_1 y - \alpha_0 + C_2 \Delta y^2) e^{-y} \\ \Delta &= e^4 - 6e^2 + 1, \quad \alpha_0 = 4e\gamma_0 + (e^4 - 4e^2 - 1)\gamma_1 \\ \alpha_1 &= e(e^2 - 7)\gamma_0 + (5e^2 + 2 - e^4)\gamma_1, \quad \beta_1 = e(3 - e^2)\gamma_0 - (1 + e^2)\gamma_1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

В этом приближении

$$v_x = \psi'(y) \cos x, \quad v_y = \psi(y) \sin x \quad (4.19)$$

где ψ дается формулами (4.18).

На фиг. 3 приведены линии тока течения (4.19) при $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = -1$ (форма стенок показана условно). Аналогичные движения, вызванные термострессовой конвекцией, могут иметь место в мелких «лакунах», которые образуются между шероховатыми поверхностями соприкасающихся тел с различной температурой.



Фиг. 3

5. В предыдущем пункте было рассмотрено возмущение границы в задаче о теплопроводности между стенками. Теперь решим задачу, в которой возмущаются граничные условия, а геометрия задачи сохраняется. Зададим температуру параллельных стенок в следующем виде:

$$T(y=0) = 1 + \varepsilon\gamma_0 x, \quad T(y=1) = \tau + \varepsilon\gamma_1 x \quad (5.1)$$

Обозначения имеют тот же смысл, что и в (4.9). Тогда условия скольжения на стенках имеют вид

$$v_x(y=0) = \beta\gamma_0, \quad v_x(y=1) = \beta\gamma_1 \tau \quad (5.2)$$

Будем искать «слоистое» решение задачи, т. е. положим $v_y = 0$. Из уравнения неразрывности (4.4) имеем $v_x = v_x(y)$. Учитывая структуру граничных условий для температуры, возмущенное значение температуры разыскиваем в виде

$$T_1(x, y) = xt(y) \quad (5.3)$$

Тогда уравнение энергии и граничные условия принимают следующую форму:

$$\frac{d^2(T_0 t)}{dy^2} = 0, \quad t(0) = \gamma_0, \quad t(1) = \gamma_1 \quad (5.4)$$

Отсюда

$$t = T_0^{-1}(\alpha y + \gamma_0) \quad (\alpha = \gamma_1 \tau - \gamma_0) \quad (5.5)$$

После этого уравнения движения приводятся к виду

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = \frac{d}{dy} \left(T_0 \frac{dv_x}{dy} \right) - \frac{3}{2} t \left(\frac{dT_0}{dy} \right)^2 \quad \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} = - \frac{9x}{2} \frac{dt}{dy} \left(\frac{dT_0}{dy} \right)^2 \quad (5.6)$$

Принимая во внимание выражения (4.3) и (5.5) для T_0 и t , исключая Π_1 из системы (5.6), проинтегрируем полученное уравнение для v_x и, удовлетворяя граничным условиям скольжения, получим

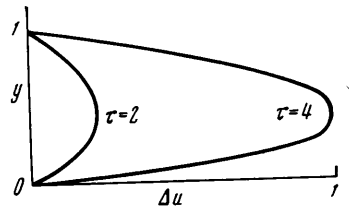
$$v_x = \beta \left[\gamma_0 + \alpha \frac{T_0 - 1}{\tau - 1} \right] - 3\alpha \left(\frac{T_0 - 1}{\tau - 1} - y \right) + A(T_0 - 1)(T_0 - \tau)(T_0 + \tau + 1) \quad (5.7)$$

где постоянная A определяется из дополнительного условия на расход газа или на продольный градиент давления в канале. В формуле (5.7) первый член является решением уравнений Навье — Стокса с нулевым перепадом давления вдоль канала и граничными условиями скольжения на стенке. Именно с этим решением и сравним (5.7). Тогда естественно в качестве дополнительного поставить одно из условий

$$\int_0^1 \frac{\partial p}{\partial x} dy = \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \int_0^1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} dy = 0 \quad (5.8)$$

Последнее при отсутствии барнеттовских напряжений также сводится к условию $\partial p / \partial x = 0$. Постоянная A при условиях (5.8) принимает соответственно вид

$$A \equiv A_1 = 0, \quad A \equiv A_2 = \frac{\gamma_0}{2\tau(\tau + 1)} - \frac{\alpha(3\tau + 1)}{2\tau(\tau - 1)(\tau + 1)^2} \quad (5.9)$$



Фиг. 4

В первом случае форма профиля скорости отличается от навье-стоксовского; максимальная скорость, вызванная барнеттовскими напряжениями, становится равной скорости скольжения при $\tau \approx 4$ ($\gamma_0 = 0$, $\beta = 0.84$). Для иллюстрации второго из условий (5.8) рассмотрим для наглядности простейший случай

$$\alpha = 0, \quad A_2 = \frac{1}{2} \gamma_0 \tau^{-1} (\tau + 1)^{-1}$$

При этом в отсутствие барнеттовских напряжений $v_x = \beta \gamma_0$, т. е. скорость постоянна по сечению и равна скорости скольжения на стенках. Тогда величина $\Delta u = 2(1 - v_x / \beta \gamma_0)$, профили которой при $\beta = 0.84$ и $\tau = 2,4$ приведены на фиг. 4, характеризует вклад барнеттовских напряжений.

Поступило 22 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С., Коган М. Н., Фридлиндер О. Г. О некоторых кинетических эффектах в течениях сплошной среды. Изв. АН СССР, МЖТ, 1970, № 3, стр. 14—21.
2. Жданов В., Каган Ю., Сазыкин А. Влияние вязкого переноса импульса на диффузию в газовой смеси. ЖЭТФ, 1962, т. 42, № 3, стр. 857—867.
3. Чудновский А. Ф. Теплообмен в дисперсных средах. М., Гостехиздат, 1954.
4. Лыков А. В. Явления переноса в капиллярно-пористых средах. М., Гостехиздат, 1954.