№ 3 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1971

УДК 532.516.2 : 533

О РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗОВОЙ СМАЗКИ

Н. А. СЛЕЗКИН

(*Москва*)

Используемый основной вид дифференциальных уравнений Рейнольдса для течения смазки основан на предположении, что порядок величин скоростей в двух из трех направлений одинаков. В статье устанавливаются дифференциальные уравнения пространственных течений газовой смазки в предположении, что порядки величин скоростей во всех трех направлениях различны для случая, когда за основную скорость взята линейная скорость на боковой поверхности вращающегося цилиндра и когда зазор по торцовым сечениям и боковой поверхности исчисляется в микронах.

Различие порядков величин первых производных от характеристик течения жидкости по трем координатам послужило основанием для упрощения общих дифференциальных уравнений Навье — Стокса. Впервые такое упрощение было проведено Рейнольдсом при выводе приближенных дифференциальных уравнений для течения несжимаемой жидкости в смазочном слое. Затем этот же способ был использован Прандтлем при выводе приближенных дифференциальных уравнений для течения жидкости в пограничном слое. В статье [1] для вывода приближенных дифференциальных уравнений Рейнольдса и Прандтля был использован один и тот же формальный прием, основанный на введении разных масштабов: длины для координат и скорости для проекций вектора скорости на координатные оси.

Этим приемом было показано, что различие исходных предположений при выводе уравнений Рейнольдса и Прандтля проявляется лишь в порядке величин соответственных чисел Рейнольдса и Эйлера, произведение же этих чисел для обоих случаев является одним и тем же. При этом было обращено внимание на то, что уравнения Рейнольдса справедливы не только для чисел Рейнольдса порядка единицы, как это считалось ранее, но и для чисел Рейнольдса, имеющих порядок ε^{-1} и даже несколько выше, где ε — малый параметр порядка отношения средней величины зазора к величине продольной протяженности слоя, а число Рейнольдса определено по величине протяженности слоя.

До настоящего времени и для течения несжимаемой жидкости и для течения газа в смазочном слое использовался один и тот же тип дифференциальных уравнений Рейнольдса, который будем в дальнейшем именовать основным видом уравнений Рейнольдса. При выводе этого основного вида уравнений выбор масштабов длин и скоростей подчинялся двум требованиям: сохранения всех слагаемых в уравнении неразрывности и сохранения в уравнении для течения в основном продольном направлении слагаемого с давлением и главного слагаемого от вязкости при обращении малого параметра в нуль. Первое требование удается выполнить лишь тогда, когда два масштаба длин и скоростей в продольных направлениях одинаковы. Второе требование выполняется при помощи выбора порядка чисел Рейнольдса и Эйлера по отношению к малому параметру, в качестве которого принималось отношение средней величины зазора к величине продольной протяженности слоя. В статье [1] уточнение решений основного вида уравнений Рейнольдса проводилось при помощи разложения искомых функций по целым степеням малого параметра.

Если обратиться к пространственным течениям газовой смазки в подшипниках специального назначения [2], то можно обнаружить некоторые особенности. вследствие которых исходные предположения в работе [1] при выводе основного вида уравнений Рейнольдса не могут считаться справедливыми.

Во-первых, если два масштаба длины в двух продольных направлениях могут считаться одинаковыми, то не всегда возможно считать одинаковыми масштабы скоростей в этих направлениях. А тогда в нулевом приближении нельзя сохранить все слагаемые в уравнении неразрывности, за исключением случаев плоскопараллельного и осесимметричного течений.

Во-вторых, в качестве малого параметра нельзя выбрать отношение средней величины зазора к протяженности слоя в радиальном направлении и одновременно удовлетворить условию принимаемого порядка произведения чисел Рейнольдса и Эйлера и принимаемых порядков величин каждого из этих чисел в отдельности. В самом деле, величина зазора — один или два десятка микрон, радиус и длина ротора — несколько сантиметров, а число оборотов ротора меняется от $6 \cdot 10^3$ до $6 \cdot 10^4$ и более в минуту. Принимая, например, относительный зазор равным $4 \cdot 10^{-4}$, радиус ротора — 2.5 *см* и кинематический коэффициент вязкости равным $1.5 \cdot 10^{-5}$ *м/сек*^{2}, получаем для числа Рейнольдса значения от $2 \cdot 10^4$ до $2 \cdot 10^5$, а для числа Эйлера — от 300 до 3. Произведение этих чисел будет меняться от $6 \cdot 10^6$ до $6 \cdot 10^5$; квадрат же обратной величины относительного зазора будет равен $6 \cdot 10^6$.

Таким образом, принимаемое в статье [1] равенство порядка величины произведений чисел Рейнольдса и Эйлера квадрату обратной величины малого параметра будет выполняться только при числе оборотов $6 \cdot 10^3$ в минуту; при увеличении числа оборотов в десять раз оно уже не будет справедливым. Еще более значительными будут отклонения приведенных выше значений чисел Рейнольдса и Эйлера от величины обратного значения малого параметра ($2.5 \cdot 10^3$). И, наконец, принятие за малый параметр приведенного выше значения относительного зазора лишает практического смысла проведение уточнения решений основного вида дифференциальных уравнений Рейнольдса при помощи разложения искомых функций по степеням малого параметра.

Отмеченные выше обстоятельства приводят к необходимости пересмотра принятых ранее предварительных оценок масштабов длин и скоростей, порядков величин характеристических чисел для течения газа, а также выбора малого параметра. Цель такого пересмотра должна заключаться в том, чтобы оценочные значения чисел Рейнольдса и Эйлера привести в согласование с действительными их значениями в пространственных течениях газовой смазки, а также и в том, чтобы учесть различие порядков скоростей в двух продольных направлениях и установить практическую возможность проведения уточнений укороченных уравнений Рейнольдса.

1. Преобразование уравнения неразрывности в цилиндрических координатах к безразмерному виду. Обозначая в цилиндрических координатах r, α и z составляющие вектора скорости через v_r, v_α и v_z, получаем уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\rho v_\alpha) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \tag{1.1}$$

Обозначим радиус ротора через a, а малый параметр через ε. Размерные координаты r и z представим в виде

$$r = a(\eta + \varepsilon^{k_1} r_1), \qquad z = a\varepsilon^{k_2} z_1 \tag{1.2}$$

где η — безразмерный параметр, который для течения газа в радиальном подшипнике равен единице, для течения газа в упорном подшипнике равен нулю, k_1 и k_2 — пока произвольные числа. Обозначим максимальное значение скорости v_α через U и представим v_r, v_α и v_z в виде

$$v_r = \varepsilon^{m_1} U u_1, \qquad v_\alpha = U u_2, \qquad v_z = \varepsilon^{m_2} U u_3 \tag{1.3}$$

где показатели m_1 и m_2 — произвольные числа. За единицу измерения плотности возьмем плотность ρ_0 газа в равновесии, а единицу времени обозначим через t_0. Вводя число Струхаля

$$S = a / U t_0 \tag{1.4}$$

и используя равенства (1.2) и (1.3), представляем уравнение неразрывности (1.1) в виде

$$S \frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + \varepsilon^{m_1 - k_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (\rho_1 u_1) + \frac{\varepsilon^{m_1} \rho_1 u_1}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} +$$
$$+ \frac{1}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\rho_1 u_2) + \varepsilon^{m_2 - k_2} \frac{\partial}{\partial z_1} (\rho_1 u_3) = 0 \tag{1.5}$$

В радиальном подшипнике малый зазор служит продолжением радиуса r, и по этой причине показатель k_1 не может быть нулем, а параметр η равен единице. Следовательно, для такого подшипника подбором показателей k_1, k_2, m_1 и m_2 нельзя уравнять порядок всех слагаемых в уравнении (1.5); третье слагаемое в нулевом приближении должно быть отброшено, а между показателями должна быть связь

$$m_1 - k_1 = m_2 - k_2 \tag{1.6}$$

При выполнении условия (1.6) уравнение неразрывности в безразмерном виде будет иметь вид

$$S\frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + \varepsilon^{m_1-k_1}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\rho_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_1 u_3)\right] + \\ + \frac{1}{1+\varepsilon^{k_1}r_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}(\rho_1 u_2) + \frac{\varepsilon^{m_1}\rho_1 u_1}{1+\varepsilon^{k}r_1} = 0 \tag{1.7}$$

При замене $(1+\varepsilon^{k_1}r_1)d\alpha$ на dx_1 и отбрасывании слагаемого с ε^{m_1} уравнение (1.7) переходит в уравнение неразрывности в декартовых координатах, используемое в основном виде уравнений Рейнольдса.

Несколько иначе будет обстоять дело для упорного подшипника, в котором протяженность малого зазора параллельна оси z и показатель k_2 не может быть нулем. В этом случае при $\eta = 0$ равенство (1.6) обеспечивает одинаковый порядок слагаемых в (1.5) только для осесимметричного течения, когда

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\rho_1 u_2) = 0 \tag{1.8}$$

и при этом показатель k_1 должен быть отличен от нуля. Однако последнее условие невозможно. Полагая в (1.5) $\eta \neq 0$ и $k_1 = 0$, получаем

$$S\frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + \varepsilon^{m_1}\left[\frac{\partial}{\partial r_1}(\rho_1 u_1) + \frac{\rho_1 u_1}{r_1}\right] + \frac{1}{r_1}\frac{\partial(\rho_1 u_2)}{\partial \alpha} + \varepsilon^{m_2-k_2}\frac{\partial}{\partial z_1}(\rho_1 u_3) = 0 \tag{1.9}$$

Если принять $m_1 = 0$, то из первого равенства (1.3) получили бы, что радиальная скорость имеет тот же порядок величины, что и тангенциальная скорость за счет вращения ротора, чего быть не может. Таким образом, для упорного подшипника можно положить разность показателей m_2 и k_2 равной нулю, и для нулевого приближения ($\varepsilon = 0$) уравнение неразрывности брать в виде

$$S\frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}(\rho_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial z_1}(\rho_1 u_3) = 0 \tag{1.10}$$

В упорном подшипнике V_z имеет наименьший порядок величины, по этой причине показатель m_2 должен быть больше m_1. В радиальном же подшипнике будет наоборот, $m_1 > m_2$, а показатель k_2 должен быть нулем, но тогда равенство (1.6) не может быть приравнено нулю. Следовательно, уравнение неразрывности для радиального подшипника в нулевом приближении будет представляться в виде

$$S\frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + \frac{\partial}{r_1 \partial \alpha}(\rho_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial r_1}(\rho_1 u_1) = 0 \tag{1.11}$$

Итак, общее уравнение неразрывности в безразмерном виде представлено равенством (1.5), его частные виды представлены равенствами (1.7) и (1.9) и еще более частные виды для нулевого приближения — равенствами (1.10) и (1.11).

2. Преобразование дифференциальных уравнений движения газа к безразмерному виду. Если воспользоваться равенствами (1.2) и (1.3), то для дивергенции вектора скорости в безразмерном виде получается

$$\theta_1 = \varepsilon^{m_1-k_1} \frac{\partial u_1}{\partial r_1} + \frac{\varepsilon^{m_1} u_1}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} + \frac{1}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \varepsilon^{m_2-k_2} \frac{\partial u_3}{\partial z_1} \tag{2.1}$$

Вводим два числа Рейнольдса и число Эйлера следующими равенствами:

$$R = \frac{aU\rho_0}{\mu_0}, \qquad R_\lambda = \frac{aU\rho_0}{\lambda_0'}, \qquad E = \frac{p_0}{\rho_0 U^2} \tag{2.2}$$

При использовании формул (1.2) и (1.3) дифференциальные уравнения движения в цилиндрических координатах без учета массовых сил представятся в виде

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{k_1} R\rho_1 \left[S\varepsilon^{m_1} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + \varepsilon^{2m_1-k_1} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial r_1} + \frac{\varepsilon^{m_1}}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \right.\\
&\left. + \varepsilon^{m_1+m_2-k_2} u_3 \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{u_2^2}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \right] = -RE \frac{\partial p_1}{\partial r_1} + \varepsilon^{m_1-k_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(2\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial r_1} \right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial r_1} \left[\left(\frac{R}{R_\lambda} \lambda_1' - \frac{2}{3} \mu_1 \right) \theta_1 \right] + \\
&+ \frac{1}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\mu_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial r_1} - \frac{u_2 \varepsilon^{k_1}}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} + \frac{\varepsilon^{m_1+k_1}}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} \right) \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\mu_1 \left(\varepsilon^{m_2-k_2} \frac{\partial u_3}{\partial r_1} + \varepsilon^{m_1+k_1-2k_2} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \right) \right] + \\
&+ \frac{2\mu_1}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \left(\varepsilon^{m_1} \frac{\partial u_1}{\partial r_1} - \varepsilon^{m_1+k_1} \frac{u_1}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} - \frac{\varepsilon^{k_1}}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{2k_1} R\rho_1 \left[S \frac{\partial u_2}{\partial t_1} + \varepsilon^{m_1-k_1} u_1 \frac{\partial u_2}{\partial r_1} + \frac{u_2}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \right.\\
&\left. + \varepsilon^{m_2-k_2} u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z_1} + \frac{\varepsilon^{m_1} u_1 u_2}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \right] = - \frac{RE\varepsilon^{2k_1}}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial r_1} \left[\mu_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial r_1} - \frac{u_2 \varepsilon^{k_1}}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} + \frac{\varepsilon^{m_1+k_1}}{\eta + \varepsilon^{k_2} r_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} \right) \right] + \\
&+ \frac{2}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\mu_1 \left(\frac{\varepsilon^{2k_1}}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\varepsilon^{m_1+2k_1}}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} u_1 \right) \right] + \\
&+ \frac{\varepsilon^{2k_1}}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\left(\frac{R}{R_\lambda} \lambda_1' - \frac{2\mu_1}{3} \right) \theta_1 \right] + \\
&+ \varepsilon^{2k_1-2k_2} \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\mu_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z_1} + \frac{\varepsilon^{m_2+k_2}}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} \right) \right] + \\
&+ \frac{2\mu_1 \varepsilon^{k_1}}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \left[\frac{\partial u_2}{\partial r_1} - \frac{u_2 \varepsilon^{k_1}}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} + \frac{\varepsilon^{m_1+k_1}}{\eta + \varepsilon^{k_1} r_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{2k_1+m_2}R\rho_1\left[S\frac{\partial u_3}{\partial t_1}+\varepsilon^{m_1-k_1}u_1\frac{\partial u_3}{\partial r_1}+\frac{u_2}{\eta+\varepsilon^{k_1}r_1}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha}+\varepsilon^{m_2-k_2}u_3\frac{\partial u_3}{\partial z_1}\right]= \\
&=-\varepsilon^{2k_1-k_2}ER\frac{\partial p_1}{\partial z_1}+\varepsilon^{k_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left[\mu_1\left(\varepsilon^{m_2-k_1}\frac{\partial u_3}{\partial r_1}+\varepsilon^{m_1-k_2}\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)\right]+ \\
&+\frac{\varepsilon^{2k_1}}{\eta+\varepsilon^{k_1}r_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\mu_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial z_1}\varepsilon^{-k_2}+\frac{1}{\eta+\varepsilon^{k_1}r_1}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha}\varepsilon^{m_2}\right)\right]+\varepsilon^{2k_1+m_2-2k_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(2\mu_1\frac{\partial u_3}{\partial z_1}\right)+ \\
&+\varepsilon^{2k_1-k_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\left(\lambda_1'\frac{R}{R_\lambda}-\frac{2\mu_1}{3}\right)\theta_1\right]+\frac{\mu_1\varepsilon^{k_1}}{\eta+\varepsilon r^{k_1}{}_1}\left(\varepsilon^{m_2}\frac{\partial u_3}{\partial r_1}+\varepsilon^{m_1+k_1-k_2}\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)
\end{aligned}
\qquad (2.3)
$$

Как уже было указано в п. 1, выбор порядка величины произведения чисел Рейнольдса и Эйлера предопределяется требованием сохранения в уравнениях для основного продольного течения газа слагаемого с давлением и наибольшего по своему порядку величины слагаемого от вязкости. Для радиального подшипника основным продольным течением следует считать течение в направлении изменения угла α. Полагая во втором уравнении (2.3) $\eta=1$ и $k_2=0$ и приравнивая соответственные коэффициенты при слагаемых наибольшего порядка, получаем

$$RE=\varepsilon^{-2k_1} \qquad (2.4)$$

Если приравнять соответственные коэффициенты при слагаемых наибольшего порядка в третьем уравнении (2.3), то получим

$$ER=\varepsilon^{m_2-2k_1} \qquad (2.5)$$

Для упорного подшипника давление по углу α может изменяться либо за счет спиральных или других канавок, либо за счет несимметричной подачи газа. В этом случае можно провести приравнивание соответственных коэффициентов при слагаемых наибольшего порядка во втором уравнении (2.3) с учетом того, что $\eta=0$ и $k_1=0$. Тогда получим

$$ER=\varepsilon^{-2k_2} \qquad (2.6)$$

Если же изменение давления по углу α будет незначительным, то приравнивание коэффициентов при слагаемых наибольшего порядка придется проводить в первом уравнении и тогда будем иметь

$$ER=\varepsilon^{m_1-2k_2} \qquad (2.7)$$

Если подшипник одновременно будет и радиальным и упорным (по своим торцам), то для него одновременно должны приниматься либо равенства (2.4) и (2.6), либо (2.5) и (2.7). В первом случае будем иметь $k_1=k_2$, т. е. средние величины зазоров по торцам и по боковой поверхности должны быть одинаковыми. Во втором случае будем иметь

$$m_2-2k_1=m_1-2k_2 \qquad (2.8)$$

Таким образом, различие средних величин зазоров $(k_1\neq k_2)$ должно сопровождаться различием показателей m_1 и m_2.

Предварительное определение порядка величины отдельного числа Рейнольдса при составлении дифференциальных уравнений Рейнольдса проводится при помощи требования исключения в нулевом приближении большинства слагаемых от ускорения в уравнениях движения в продольных направлениях. При использовании равенства (2.4) слагаемые от ускорения в уравнении для u_2 будут выпадать (при $\varepsilon\to 0$), если положить

$$R\varepsilon^{2k_1}=\varepsilon^{k_3} \qquad (2.9)$$

где k_3 — положительное число. При использовании (3.7) слагаемые от ускорения в этом же уравнении будут выпадать, если принять

$$R\varepsilon^{2k_2-m_1} = \varepsilon^{k_4} \tag{2.10}$$

где k_4 — также положительное число.

Таким образом, для получения основного вида дифференциальных уравнений Рейнольдса для радиального подшипника необходимо положить

$$\eta = 1,\ k_2 = 0,\ m_2 = 0,\ m_1 = k_1,\ R = \varepsilon^{-2k_1+k_3},\quad E = \varepsilon^{-k_3} \tag{2.11}$$

и тогда уравнения нулевого приближения в безразмерном виде представятся в обычном виде

$$S\frac{\partial\rho_1}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r_1}(\rho_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial\alpha}(\rho_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial z_1}(\rho_1 u_3) = 0,\quad \frac{\partial p_1}{\partial r_1} = 0 \tag{2.12}$$
$$RE\varepsilon^{2k_1}\frac{\partial p_1}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\mu_1\frac{\partial u_2}{\partial r_1}\right),\qquad RE\varepsilon^{2k_1}\frac{\partial p_1}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\mu_1\frac{\partial u_3}{\partial r_1}\right)$$

Если же принять

$$\eta = 1,\ k_2 = 0;\ m_2 \neq 0;\ m_1 = k_1,\ R = \varepsilon^{-2k_1+m_2+k_3},\ E = \varepsilon^{-k_3} \tag{2.13}$$

то получим новые дифференциальные уравнения для радиального подшипника, которые в безразмерном виде в нулевом приближении будут иметь вид

$$S\frac{\partial\rho_1}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r_1}(\rho_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial\alpha}(\rho_1 u_2) = 0,\qquad \frac{\partial p_1}{\partial r_1} = 0 \tag{2.14}$$
$$\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\mu_1\frac{\partial u_2}{\partial r_1}\right) = 0,\qquad \varepsilon^{2k_1-m_2}RE\frac{\partial p_1}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\mu_1\frac{\partial u_3}{\partial r_1}\right)$$

Если при составлении основного вида дифференциальных уравнений Рейнольдса для упорного подшипника будем исходить из предположения, что масштабы длин для продольных направлений одинаковы и масштабы скоростей для этих направлений одинаковы, то надо положить

$$\eta = 0,\ k_1 = 0,\ m_1 = 0,\ m_2 = k_2,\ R = \varepsilon^{-2k_2+k_4},\quad E = \varepsilon^{-k_4} \tag{2.15}$$

и тогда для нулевого приближения получим следующие безразмерные уравнения:

$$S\frac{\partial\rho_1}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r_1}(\rho_1 u_1) + \frac{\rho_1 u_1}{r_1} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\rho_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial z_1}(\rho_1 u_3) = 0,\quad \frac{\partial p_1}{\partial z_1} = 0 \tag{2.16}$$
$$RE\varepsilon^{2k_2}\frac{\partial p_1}{r_1\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\mu_1\frac{\partial u_2}{\partial z_1}\right),\qquad RE\varepsilon^{2k_2}\frac{\partial p_1}{\partial r_1} = \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)$$

Если же исходить из допущения, что масштабы длин и скоростей в двух продольных направлениях различны, то надо положить

$$\eta = 0,\ k_1 = 0,\ m_1 \neq 0,\ m_2 = k_2,\ R = \varepsilon^{-2k_2+m_1+k_5},\quad E = \varepsilon^{-k_5} \tag{2.17}$$

и тогда уравнения Рейнольдса в нулевом приближении в безразмерном виде представятся в виде

$$S\frac{\partial \rho_1}{\partial t_1}+\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}(\rho_1 u_2)+\frac{\partial}{\partial z_1}(\rho_1 u_3)=0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial z_1}=0 \tag{2.18}$$

$$RE\varepsilon^{2k_2-m_1}\frac{\partial p_1}{\partial r_1}=\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)+\rho_1\varepsilon^{k_5}\frac{u_2^2}{r_1}, \quad \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\mu_1\frac{\partial u_2}{\partial z_1}\right)=0$$

Чтобы привести в совпадение порядок чисел Рейнольдса и Эйлера, представленных равенствами (2.11) и (2.15), с порядком этих чисел, принятом в статье [1], необходимо положить

$$k_1=1, \quad k_3=1, \quad k_2=1, \quad k_4=1 \tag{2.19}$$

При значении малого параметра, равном величине относительного зазора

$$\varepsilon=4\cdot 10^{-4} \tag{2.20}$$

Значения чисел Рейнольдса и Эйлера будут

$$R=10^4, \qquad E=10^4 \tag{2.21}$$

Как уже было указано ранее, эти значения находятся в противоречии с обычными их значениями для течения газовой смазки. Таким образом, предположения (2.19) и (2.20) для течений газовой смазки не пригодны.

Возьмем за малый параметр квадратный корень из относительной величины зазора, т. е.

$$\varepsilon=\sqrt{h^*/a}=2\cdot 10^{-2} \tag{2.22}$$

При использовании равенств (2.11) положим

$$k_1=2, \qquad k_3=1 \tag{2.23}$$

тогда получим

$$R=\varepsilon^{-3}=1.2\cdot 10^{+5}, \quad E=\varepsilon^{-1}=0.5\cdot 10^{+2} \tag{2.24}$$

При использовании же равенств (2.13) положим

$$k_1=2, \quad m_2=1, \quad k_3=0 \tag{2.25}$$

Тогда будем иметь

$$R=\varepsilon^{-3}=1.2\cdot 10^{+5}, \qquad E=1 \tag{2.26}$$

Таким образом, приходим к следующим выводам.

1. Для течений газовой смазки при больших числах оборотов вала или ротора за малый параметр необходимо брать не саму величину относительного зазора, а, например, квадратный корень из него.

2. При использовании основного вида дифференциальных уравнений для течения газовой смазки выбором показателей на основании (2.23) можно добиться согласования порядка числа Рейнольдса с его действительным значением, но при этом получаемый порядок числа Эйлера будет отличаться от действительного его значения и это различие будет увеличиваться по мере повышения числа оборотов.

3. При использовании для радиального подшипника уравнений (2.14), а для упорного подшипника — (2.18) подбором показателей в соответствии с равенствами (2.25) можно добиться полного согласования порядков значений обоих чисел Рейнольдса и Эйлера с их действительными значениями.

4. Для уточнения решения нулевого приближения применяется разложение искомых функций по степеням малого параметра. При этом такое уточнение проще проводить для уравнений (2.14) и (2.18), чем для основного вида дифференциальных уравнений (2.12) и (2.16).

3. Преобразование уравнения энергии к безразмерному виду. Если рассматривать совершенный газ, подчиняющийся уравнению Клайперона

$$p = C_p(1-\gamma^{-1})\rho T \tag{3.1}$$

с постоянными коэффициентами теплоемкости C_p и C_v, то уравнение энергии в цилиндрических координатах представится в виде

$$C_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{v_\alpha}{r}\frac{\partial T}{\partial \alpha}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\frac{\partial p}{\partial t}+v_r\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{v_\alpha}{r}\frac{\partial p}{\partial \alpha}+v_z\frac{\partial p}{\partial z}+$$
$$+\Phi+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\varkappa r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right)+r\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right] \tag{3.2}$$

где Φ — функция рассеивания; для этой функции используя (1.2) и (1.3), получим следующее выражение:

$$\Phi=\frac{\rho_0U^3}{a}\Phi_1=\frac{1}{R}\frac{\rho_0U^3}{a}\left\{\left(\frac{R}{R_\lambda}\lambda_1'-\frac{2}{3}\mu_1\right)\theta_1^2+\mu_1\left[2\varepsilon^{2m_1-2k_1}\left(\frac{\partial u}{\partial r_1}\right)^2+\right.\right.$$
$$+2\varepsilon^{2m_2-2k_2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial z_1}\right)^2+2\left(\frac{1}{\eta+\varepsilon^{k_1}r_1}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha}+\frac{\varepsilon^{m_1}}{\eta+\varepsilon^{k_1}r_1}u_1\right)^2+ \tag{3.3}$$
$$+\left(\frac{\varepsilon^{m_1}}{\eta+\varepsilon^{k_1}r_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha}+\varepsilon^{-k_1}\frac{\partial u_2}{\partial r_1}-\frac{u_2}{\eta+\varepsilon^{k_1}r_1}\right)^2+$$
$$\left.\left.+\left(\varepsilon^{m_2-k_1}\frac{\partial u_3}{\partial r_1}+\varepsilon^{m_1-k_2}\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)^2+\left(\varepsilon^{-k_2}\frac{\partial u_2}{\partial z_1}+\frac{\varepsilon^{m_2}}{\eta+\varepsilon^{k_1}r_1}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha}\right)^2\right]\right\}$$

В качестве масштаба для температуры выберем температуру газа при его равновесном состоянии, т. е. положим

$$T=T_0T_1,\qquad T_0=\frac{p_0}{\rho_0C_p(1-\gamma^{-1})} \tag{3.4}$$

и введем число Прандтля

$$P=C_p\frac{\mu_0}{\varkappa_0} \tag{3.5}$$

Тогда уравнение (3.2) в безразмерном виде в общем случае примет следующий вид:

$$\frac{E\rho_1}{1-\gamma^{-1}}\left(S\frac{\partial T_1}{\partial t_1}+\varepsilon^{m_1-k_1}u_1\frac{\partial T_1}{\partial r_1}+\frac{u_2}{\eta+\varepsilon^{k_1}r_1}\frac{\partial T_1}{\partial \alpha}+\varepsilon^{m_2-k_2}u_3\frac{\partial T_1}{\partial z_1}\right)=$$
$$=E\left(S\frac{\partial p_1}{\partial t_1}+\varepsilon^{m_1-k_1}u_1\frac{\partial p_1}{\partial r_1}+\frac{u_2}{\eta+\varepsilon^{k_1}r_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}+\varepsilon^{m_2-k_2}u_3\frac{\partial p_1}{\partial z_1}\right)+$$
$$+\Phi_1+\frac{E}{PR(1-\gamma^{-1})}\left[\varepsilon^{-2k_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\varkappa_1\frac{\partial T_1}{\partial r_1}\right)+\varepsilon^{-k_1}\varkappa_1\frac{\partial T_1}{\partial r_1}+\right. \tag{3.6}$$
$$\left.+\frac{1}{(\eta+\varepsilon^kr_1)^2}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\varkappa_1\frac{\partial T_1}{\partial \alpha}\right)+\varepsilon^{-2k_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\varkappa_1\frac{\partial T_1}{\partial z_1}\right)\right]$$

Для радиального подшипника ($\eta=1$, $m_1=k_1=2$, $m_2=0$, $k_2=0$) при выполнении равенств (2.24) наибольший порядок величины будет иметь первое слагаемое в квадратной скобке. Приравнивая соответственный множитель при этом слагаемом нулю, получаем в нулевом приближении следующее энергетическое уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\varkappa_1\frac{\partial T_1}{\partial r_1}\right)=0 \tag{3.7}$$

Для упорного подшипника ($\eta = 0$, $k_1 = 0$, $m_1 = 0$, $m_2 = 2$, $k_2 = 2$) при выполнении тех же равенств (2.24) наибольший порядок величины будет иметь последнее слагаемое в квадратной скобке. Тогда уравнение энергии в нулевом приближении примет вид

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\varkappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial z_1}\right) = 0 \tag{3.8}$$

Если же исходить из равенств (2.25) и (2.26), то для радиального подшипника наибольший порядок величины $1/\varepsilon$ будет иметь не только первое слагаемое в квадратной скобке (3.6), но и слагаемое с $(\partial u_2/\partial r_1)^2$ в (3.3), а для упорного подшипника порядок величины $1/\varepsilon$ будут иметь последнее слагаемое в (3.6) и слагаемое с $(\partial u_2/\partial z_1)^2$ в (3.3). Таким образом энергетическое уравнение в нулевом приближении будет иметь вид для радиального подшипника

$$\mu_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial r_1}\right)^2 + \frac{E}{P(1-\gamma^{-1})}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\varkappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial r_1}\right) = 0 \tag{3.9}$$

для упорного подшипника

$$\mu_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial z_1}\right)^2 + \frac{E}{P(1-\gamma^{-1})}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\varkappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial z_1}\right) = 0 \tag{3.10}$$

Уравнения (3.7) и (3.8) означают, что по толщине слоя поток тепла не изменяется.

Более полное уравнение энергии с учетом конвективных слагаемых от давления и температуры и основного слагаемого функции рассеивания можно получить из (3.6) и (3.3), если бы для порядка величин чисел Рейнольдса и Эйлера принять равенства

$$R = \varepsilon^{-4}, \qquad E = 1 \tag{3.11}$$

Но такого рода равенства будут находиться в противоречии с предположениями (2.24), которые потребовались для вывода основного вида дифференциальных уравнений Рейнольдса, с предположениями (2.25), которые были использованы для вывода укороченных дифференциальных уравнений Рейнольдса, и с действительными значениями числа Рейнольдса.

При другом выборе малого параметра допущение (3.11) можно будет согласовать с действительными значениями числа Рейнольдса и числа Эйлера для больших чисел оборотов, но тогда следует использовать не уравнения Рейнольдса, а уравнения Прандтля для пограничного слоя или новые разновидности этих уравнений.

Чтобы возместить выпадение слагаемых из уравнения неразрывности и уравнения энергии, целесообразно провести уточнение решений уравнений нулевого приближения при помощи разложения искомых функций по дробным степеням выбранного малого параметра или по целым степеням другого большого параметра при замене равенства (3.22) другим с большим значением показателя корня.

Поступило 20 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н. А. К вопросу об уточнении решения уравнений Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1946, т. 54, № 2.
2. Подшипники с газовой смазкой. М., «Мир», 1966.