

УДК 533.6.011.8

## ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО РЕЛАКСИРУЮЩЕГО ГАЗА

В. Н. АРХИПОВ, А. Н. ПОЛЕНОВ

(Москва)

Рассматривается задача об обтекании сферы гиперзвуковым потоком вязкого газа при наличии в ударном слое около тела неравновесных химических реакций. Решаются упрощенные уравнения Навье — Стокса, описывающие течение около оси симметрии. Исследуются особые точки этих уравнений. Показывается, что характер особых точек является причиной неустойчивости стандартных численных методов при решении рассматриваемой задачи. Рекомендуется устойчивый численный процесс для построения непрерывного решения от невозмущенного набегающего потока до поверхности тела, включая структуру ударной волны. Конкретные расчеты проведены для воздуха, рассматриваемого как смесь пяти компонент, между которыми протекают пять химических реакций.

Влияние эффектов переноса на обтекание тел гиперзвуковым потоком сосредоточено в области пограничного слоя, примыкающей к телу, и в области ударной волны. При малых числах Рейнольдса  $R$  пограничный слой сливается с ударной волной, так что ударная волна непрерывно переходит с одной стороны в вязкий ударный слой у поверхности, а с другой — в невозмущенный набегающий поток. При этом обычные приближения теории пограничного слоя несправедливы. Если числа  $R$  таковы, что ударный слой можно еще рассматривать в рамках теории сплошной среды, то для расчета структуры этого слоя в первом приближении можно использовать уравнения Навье — Стокса [1, 2]. При больших числах Маха ударный слой тонкий, что позволяет упростить эти уравнения (см., например, [1, 3]).

**1. Основные уравнения. Граничные условия.** Рассмотрим течение газа около оси симметрии. Это течение можно считать [1, 2] локально-автомоделным, так что

$$\begin{aligned} u^* &= u_0^*(y^*) \sin \varphi, & v^* &= v_0^*(y^*) \cos \varphi, & \rho^* &= \rho_0^*(y^*) \\ h^* &= h_0^*(y^*) \cos^2 \varphi + h_2^*(y^*) \sin^2 \varphi, & \mu^* &= \mu_0^*(y^*) \cos \varphi \\ p^* &= p_\infty^* + [p_0^*(y^*) - p_\infty^*] \cos^2 \varphi + [p_2^*(y^*) - p_\infty^*] \sin^2 \varphi \\ T^* &= T_0^*(y^*) \cos^2 \varphi + T_2^*(y^*) \sin^2 \varphi, & c_i &= c_i(y^*), & y^* &= r^* - r_b^* \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $r^*$ ,  $\varphi$  — сферические полярные координаты;  $u^*$ ,  $v^*$  — трансверсальная и радиальная компоненты скорости;  $r_b^*$  — радиус сферы;  $\rho^*$  — плотность;  $h^*$  — энтальпия;  $\mu^*$  — коэффициент вязкости;  $p^*$  — давление;  $T^*$  — температура;  $c_i$  — массовая доля  $i$ -й компоненты смеси; индексом  $\infty$  обозначены параметры невозмущенного набегающего потока.

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} v &= \frac{v_0^*}{v_\infty^*}, & u &= \frac{u_0^*}{v_\infty^*}, & p &= \frac{p_0^*}{\rho_\infty^* v_\infty^{*2}}, & p_2 &= \frac{p_2^*}{\rho_\infty^* v_\infty^{*2}} \\ \rho &= \frac{\rho_0^*}{\rho_\infty^*}, & h &= \frac{h_0^*}{v_\infty^{*2}}, & T &= \frac{T_0^*}{T_\infty^*}, & \mu &= \frac{\mu_0^*}{\mu_\infty^*}, & y &= \frac{y^*}{r_b^*} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Предположим, что колебательные степени свободы везде находятся в равновесии с поступательными и вращательными степенями свободы. Тогда в координатах (1.2) уравнения движения газа в тонком ударном слое вбли-

зи оси симметрии можно записать в виде

$$\frac{dv}{dy} = V, \quad \frac{du}{dy} = U, \quad \frac{dh}{dy} = H, \quad \frac{dc_i}{dy} = C_i, \quad \frac{dT}{dy} = \theta$$

$$\frac{d\rho}{dy} = -\frac{\rho V + 2\rho(u+v)}{v}, \quad \frac{dp_2}{dy} = \rho u(u+v)$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{R_\infty}{4/3\mu} \left\{ \sigma_\infty A_\infty \left[ -\frac{\rho V + 2\rho(u+v)}{v} T \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{M_i} + \right. \right.$$

$$\left. + \rho\theta \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{M_i} + \rho T \sum_{i=1}^N \frac{1}{M_i} C_i \right] + \rho v V \left\} - \right. \quad (1.3)$$

$$\left. - \frac{1}{\mu} (V-u) \left[ \theta \frac{\partial \mu}{\partial T} + \sum_{i=1}^N C_i \frac{\partial \mu}{\partial c_i} \right] - \frac{1}{2} U \equiv -\frac{W}{v} \right.$$

$$\frac{d(\mu U)}{dy} = R_\infty \left[ 2p_2 - 2\sigma_\infty A_\infty \rho T \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{M_i} + \rho v U + \rho u(u+v) \right]$$

$$M_i = \frac{M_i^*}{M_\infty^*}, \quad R_\infty = \frac{\rho_\infty^* v_\infty^* r_b^*}{\mu_\infty^*}, \quad \sigma_\infty = \frac{\gamma_\infty - 1}{\gamma_\infty}$$

$$\frac{d(\mu H)}{dy} = P \left\{ R_\infty \left[ \rho v H + \sigma_\infty A_\infty \rho \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{M_i} (TV + 2Tu + \right. \right.$$

$$\left. + 2Tv - v\theta) - \frac{\sigma_\infty A_\infty \rho v T}{\mu} \sum_{i=1}^N \frac{1}{M_i} C_i \right] - \frac{4}{3} \mu V^2 -$$

$$\left. - \frac{4}{3} uv \left( \theta \frac{\partial \mu}{\partial T} + \sum_{i=1}^N C_i \frac{\partial \mu}{\partial c_i} \right) + \frac{2}{3} Uv \right\}$$

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{\mu}{S} C_i \right) = R_\infty (\rho v C_i - \sigma_i),$$

$$\mu = \mu(T, c_i), \quad \sigma_i = \sigma_i(\rho, T, c_i), \quad A_\infty = \frac{\rho_\infty^*}{(\gamma_\infty - 1) \gamma_\infty \rho_\infty^*}$$

$$H = \theta \sum_{i=1}^N c_i \frac{dh_i}{dT} + \sum_{i=1}^N h_i C_i, \quad h_i = h_i(T)$$

Здесь  $M^*$  и  $M_i^*$  — молекулярный вес смеси и  $i$ -й компоненты смеси;  $h_i$  — энтальпия  $i$ -й компоненты смеси;  $P, S$  — числа Прандтля и Шмидта;  $\sigma_i$  — массовая скорость образования вследствие химических реакций  $i$ -й компоненты в единице объема;  $N$  — число компонент смеси;  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей ( $\gamma = c_p / c_v$ ). Предполагается, что все бинарные числа Льюиса  $L_{ij}$  одинаковы,  $L_{ij} = L$ , и что  $L = 1$ . В дальнейшем полагается  $P = 3/4$ . Термо- и бародиффузия не учитываются.

В набегающем потоке ( $y = \infty$ )

$$u = 1, \quad v = -1, \quad T = \rho = 1, \quad h = h_\infty \quad (1.4)$$

$$\rho = p_2 = p_\infty, \quad c_i = c_{i\infty}, \quad \theta = U = V = H = C_i = 0$$

На теле ( $y = 0$ )

$$u = v = 0. \quad (1.5)$$

Поверхность предполагается нетеплоизолированной и идеально каталитической, так что на ней

$$T = T_b, \quad c_i = c_{ibe} \quad (1.6)$$

Индексом  $b$  обозначены параметры на поверхности;  $e$  — равновесные значения параметров.

При численном решении задачи об обтекании тела в рамках уравнений Навье — Стокса обнаружена сильная неустойчивость стандартных численных методов (см., например, [3, 4]).

**2. Особые точки.** Для набегающего потока правые части уравнений системы (1.3) обращаются в нули. Это значит, что в фазовом пространстве переменных  $v, u, H, h, c_i, T, \rho, p_2, V, U, \theta, C_i$  точка, соответствующая набегающему потоку, является особой.

Из уравнения неразрывности следует, что на поверхности тела  $V = 0$ . Так как там, кроме того,  $u = v = 0$ , то производные  $d\rho/dy$  и  $dV/dy$  неопределенны при  $y = 0$ . Следовательно, точка, соответствующая поверхности, является особой в фазовом пространстве переменных  $v, u, H, h, c_i, T, \rho, p_2, V, U, \theta, C_i, y$ .

Решению задачи соответствует интегральная кривая, проходящая через особые точки. По аналогии с задачей о структуре прямого скачка уплотнения [5, 6] можно предположить, что эта кривая — сепаратриса. Из-за неопределенности  $d\rho/dy$  и  $dV/dy$  при  $y = 0$  численное интегрирование системы (1.3) приходится начинать от точки  $y = y_0$ , где  $y_0$  — малая величина. Параметры газа в точке  $y = y_0$  определяются из решения линеаризованной системы.

**3. Решение в окрестности точки  $y = 0$ .** Рассмотрим малую область (с поперечным размером  $\sim \varepsilon$ ), прилегающую к поверхности. В этой области  $u \approx U_b y$ ,  $v \approx V_b' y^2$ , т. е.  $u \sim \varepsilon$ ,  $v \sim \varepsilon^2$ . Так же можно оценить другие параметры газа в этой области. Сохраняя в системе (1.3) только наибольшие по порядку величины слагаемые, получим для функции  $V$  уравнение

$$\frac{dV}{dy} = \frac{aV}{y^2} + \frac{b}{y} \quad (3.1)$$

$$a = -\frac{3\sigma_\infty A_\infty R_\infty T_b \rho_b}{2v_b'' \mu_b} \sum_{i=1}^N \frac{c_{ib}}{M_i}, \quad b = 2aU_b \quad (3.2)$$

Общее решение уравнения (3.1) таково:

$$V = C \exp\left(-\frac{a}{y}\right) - b \exp\left(-\frac{a}{y}\right) \text{Ei}\left(\frac{a}{y}\right) \quad (3.3)$$

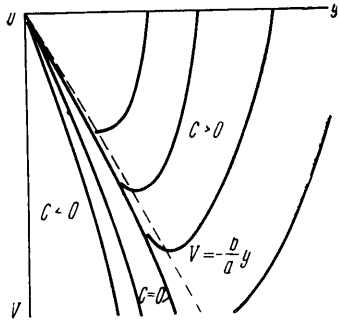
Здесь  $\text{Ei}(a/y)$  — интегральная показательная функция,  $C$  — произвольная постоянная. При малых  $y$  можно применить асимптотическое разложение этой функции и ограничиться первым слагаемым; тогда

$$V \approx C \exp\left(-\frac{a}{y}\right) - \frac{b}{a} y \quad (3.4)$$

Так как  $a > 0$ , то  $V = 0$  при  $y = 0$  для любого  $C$ . Это значит, что в плоскости  $Vy$  особая точка  $y = 0$  — узел. Вдоль сепаратрисы ( $C = 0$ )

$$V \approx -by/a \quad (3.5)$$

Уравнение (3.1) можно рассматривать как модельное для восьмого уравнения (1.3). Интегральные кривые уравнения (3.1) изображены на фиг. 1. Пунктиром показана прямая  $V = -by/a$  — геометрическое место стационарных точек уравнения (3.1). Интегрирование от тела к набегающему потоку проводится в направлении, в котором интегральные кривые расходятся. Это само по себе может служить причиной неустойчивости счета вдоль сепаратрисы методами типа методов Эйлера и Рунге — Кутты. Положение осложняется тем, что в области интегрирования сепаратриса практически совпадает с геометрическим местом стационарных точек. Это обстоятельство еще уменьшает точность стандартных методов при численном определении сепаратрисы. Можно, однако, указать способ устойчивого численного интегрирования уравнения (3.1) от узла  $y = 0$ , дающий решение (3.5). Для этого нужно перейти к системе



Фиг. 1

$$\frac{dV}{dt} = aV + by, \quad \frac{dy}{dt} = y^2 \tag{3.6}$$

и интегрировать ее по переменной  $t$ , имеющей смысл времени. Запишем неявную схему численного решения первого уравнения

$$V_{n+1} - V_n = s(aV_n + by_n)\Delta t + (1 - s)(aV_{n+1} + by_{n+1})\Delta t \tag{3.7}$$

Решение разностного уравнения (3.7) имеет вид

$$V_{n+1} = \left[ \frac{1 + sa \Delta t}{1 - (1 - s)a \Delta t} \right]^{n+1} \times \left\{ V_0 + \Delta t \sum_{k=0}^n [b s y_k + b(1 - s)y_{k+1}] \frac{[1 - (1 - s)a \Delta t]^k}{(1 + sa \Delta t)^{k+1}} \right\} \tag{3.8}$$

$$V_0 = V(y_0)$$

Разностная схема, дающая численное решение второго уравнения (3.6), которое совпадает с точным, имеет вид

$$y_{n+1} - y_n = y_n y_{n+1} \Delta t \tag{3.9}$$

При  $s = K / \Delta t$ ,  $|K| \gg 1/a$ ,  $|K| \gg |\Delta t|$  из (3.8) получаем

$$V_{n+1} = -\frac{b}{a} y_{n+1} \tag{3.10}$$

Значит, при больших  $|K|$  схема (3.7) дает численное решение, близкое к точному.

Подходящей схемой интегрирования уравнения  $dx/dy = V$ , дающей численное решение, близкое к точному, является схема

$$v_{n+1} - v_n = 1/2 (V_{n+1} + V_n) (y_{n+1} - y_n) \tag{3.11}$$

причем последовательность  $\{y_n\}$  берется из решения (3.9), т. е.  $\Delta y \neq \text{const}$ .

По аналогии с (3.7), (3.9) и (3.11) используем для численного определения функций  $V$ ,  $v$  и  $y$  схемы

$$y_{n+1} - y_n = \sqrt{-v_{n+1}} \sqrt{-v_n} \Delta t, \quad V_{n+1} - V_n = [sW_n + (1-s)W_{n+1}] \Delta t$$

$$v_{n+1} - v_n = 1/2 (V_{n+1} + V_n) (y_{n+1} - y_n), \quad s = \frac{K}{\Delta t}, \quad |K| \gg 1/a$$

$$|K| \gg |\Delta t|$$

Для остальных уравнений, имеющих вид

$$df/dy = F(u, v, V, \dots)$$

применяются неявные численные схемы

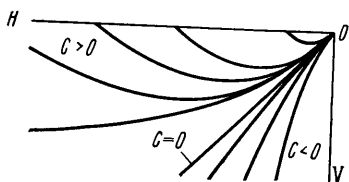
$$f_{n+1} - f_n = sF_n \Delta y + (1-s)F_{n+1} \Delta y \quad (3.13)$$

причем последовательность  $\{y_n\}$  берется из решения первого уравнения (3.12), а  $s$  подбираются путем анализа линеаризованных уравнений и численного эксперимента.

Указанные схемы сводят решение системы (1.3) к решению системы нелинейных алгебраических уравнений на каждом шаге интегрирования.

Последняя решается методом Ньютона — Рафсона. Подобным образом можно проводить расчет до области ударной волны.

**4. Численное интегрирование от набегающего потока.** При интегрировании системы (1.3) от невозмущенного набегающего потока в области ударной волны прежде всего нужно определить собственные значения и собственные векторы в особой точке фазового пространства переменных



Фиг. 2

$v, u, h, c_i, T, \rho, p_2, V, U, H, \theta, C_i$ , соответствующей набегающему потоку. Для этого нужно рассмотреть систему, получающуюся при линеаризации системы (1.3) в окрестности этой особой точки. Для функций  $V$  и  $H$ , например, получаем

$$\frac{dH}{dy} = \Gamma H, \quad \frac{dV}{dy} = \alpha V + \frac{\beta}{c_{p\infty}} H \quad (4.1)$$

$$\Gamma = P \left( \frac{4}{3} \frac{\beta}{c_{p\infty}} - R_\infty \right), \quad \alpha = \frac{4}{3} R_\infty (\sigma_\infty A_\infty - 1), \quad \beta = \frac{3}{4} \times$$

$$\times R_\infty \sigma_\infty A_\infty + \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_\infty$$

Точное решение первого уравнения (4.1) имеет вид

$$H = H^0 e^{\Gamma y} \quad (4.2)$$

Здесь и ниже градусы обозначают параметры в неособой точке, которая расположена вблизи особой на собственном векторе, соответствующем решению задачи, в упомянутом фазовом пространстве; эти параметры определяются по линейному закону при задании одного из них. В плоскости  $VH$  особая точка — узел. Фазовая картина приведена на фиг. 2. Интегрирование от набегающего потока проводится в направлении, в котором интегральные кривые расходятся. Это и является причиной неустойчивости стандартных численных методов при интегрировании вдоль сепаратрисы.

Рассмотрим следующую разностную аппроксимацию первого уравнения (4.1):

$$H_{n+1} - H_n = [sH_n + (1-s)H_{n+1}] \Gamma \Delta y \quad (4.3)$$

Решение уравнения (4.3) таково:

$$H_{n+1} = H^0 \left[ \frac{1 + s\Gamma \Delta y}{1 - (1 - s)\Gamma \Delta y} \right]^{n+1} \quad (4.4)$$

При  $|\Delta y| < 1/|\Gamma|$  численное решение (4.4) совпадает с точным решением первого уравнения (4.1) с точностью по крайней мере до величин первого порядка малости по  $\Delta y$ .

Точное решение второго уравнения (4.1) вдоль сепаратрисы имеет вид

$$V = \frac{\beta}{c_{p\infty}(\Gamma - \alpha)} H \quad (4.5)$$

Можно показать, что явные и неявные аппроксимации второго уравнения (4.1) дают неустойчивые численные результаты. Для получения устойчивых результатов нужно перейти в системе (4.1) к каноническим переменным  $\xi, \eta$  таким, что

$$\frac{d\xi}{dy} = \lambda_1 \xi, \quad \frac{d\eta}{dy} = \lambda_2 \eta \quad (4.6)$$

Здесь

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \Gamma, \quad \eta = H, \quad \xi = V - \frac{\beta}{c_{p\infty}(\Gamma - \alpha)} H \quad (4.7)$$

Из (4.5) видно, что при численном интегрировании вдоль сепаратрисы  $\xi$  должно стремиться к нулю в процессе счета. Аппроксимируем первое уравнение (4.6) следующим образом:

$$\xi_{n+1} - \xi_n = \alpha [s_1 \xi_n + (1 - s_1) \xi_{n+1}] \Delta y \quad (4.8)$$

Решение этого разностного уравнения таково:

$$\xi_{n+1} = \xi^0 \left[ \frac{1 + s_1 \alpha \Delta y}{1 - (1 - s_1) \alpha \Delta y} \right]^{n+1} \quad (4.9)$$

Если  $s_1 = K_1 / \Delta y$ ,  $|K_1| > 2/|\alpha|$ ,  $|K_1| \gg |\Delta y|$ , то  $\xi_{n+1} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что устойчивое решение системы (4.1) вдоль сепаратрисы получается путем перехода к каноническим переменным и использования неявных схем (4.3) и (4.8), причем

$$|\Delta y| < \frac{1}{|\Gamma|}, \quad |K_1| > \frac{2}{|\alpha|}, \quad |K_1| \gg |\Delta y| \quad (4.10)$$

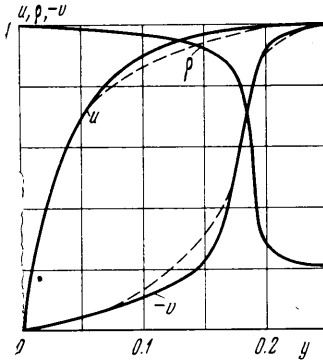
В нелинейной системе (1.3) переходу к каноническим переменным соответствует интегрирование вместо восьмого уравнения (1.3) уравнения энергии, записанного в виде

$$\frac{d}{dy} \left[ \mu \left( \frac{H}{P} + \frac{4}{3} vV \right) \right] = R_\infty \rho v (H + v\vec{V}) \quad (4.11)$$

по схеме (4.8), (4.10).

Численный эксперимент показывает, что неустойчивость при интегрировании системы (1.3) от набегающего потока обусловлена в основном уравнениями для  $H$  и  $V$ . Проводимое по схеме (3.13) численное интегрирование остальных уравнений при  $\Delta y = \text{const}$  устойчиво.

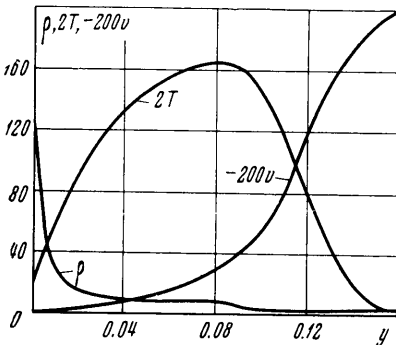
**5. Схема решения задачи.** Интегрирование системы (1.3) от набегающего потока начинается от неособой точки, расположенной в фазовом пространстве вблизи особой точки на собственном векторе, соответствующем ударной волне. Параметры в этой точке определяются по линейному закону. Далее используются схемы п. 4. Так определяется структура ударной волны.



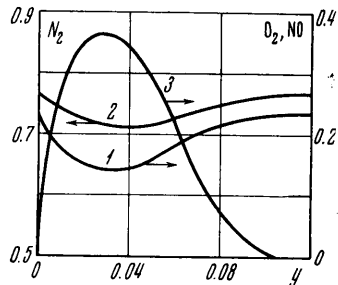
Фиг. 3

Однако, как отмечается в ряде работ (см., например, [1]), эти уравнения являются подходящей моделью, которая удовлетворяет законам сохранения и которая дает достаточно точную картину для профилей макроскопических величин в ударной волне.

**6. Результаты расчетов.** Были проведены расчеты обтекания сферы гиперзвуковым потоком вязкого совершенного газа с  $\gamma = 5/3$ . Результаты расчетов хорошо согласуются с аналогичными результатами, полученными другими численными ме-



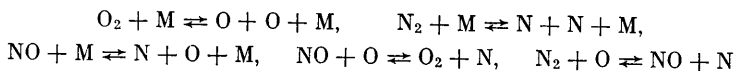
Фиг. 4



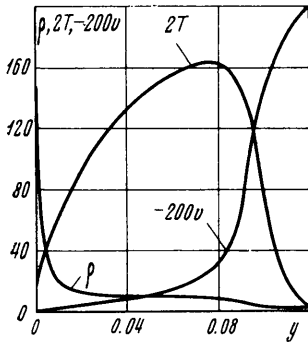
Фиг. 5

тодами [3, 7]. Пример приведен на фиг. 3, где сплошные кривые — распределения скоростей и плотности, полученные описанным выше способом, а пунктирные кривые — результаты работы [3]. Здесь  $R_\infty = 1382$ , число Маха набегающего потока равно 10. Поверхность сферы считалась теплоизолированной.

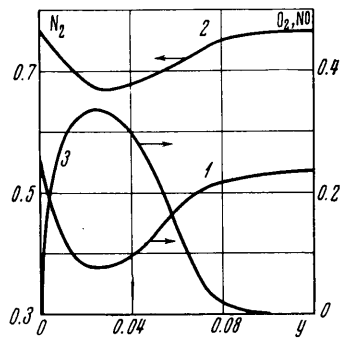
Далее были проведены расчеты обтекания сферы потоком воздуха. Предполагалось, что при высоких температурах в ударном слое протекают следующие неравновесные реакции:



Зависимость от температуры констант скоростей этих реакций достаточно хорошо известна для  $2000 < T^* < 8000^\circ \text{K}$  (см., например, [8, 9]). На более высокие температуры эту зависимость приходится экстраполировать. Зависимость  $\mu = \mu(T, c_i)$  заимствована из [4]. Параметры набегающего потока следующие:  $v_\infty^* = 8000 \text{ м/сек}$ ,  $T_\infty^* = 273^\circ \text{K}$ . Радиус сферы  $r_b^* = 0.02 \text{ м}$ . Поверхность предполагалась нетеплоизолированной и идеально каталитической,  $T_b^* = 1500^\circ \text{K}$ .



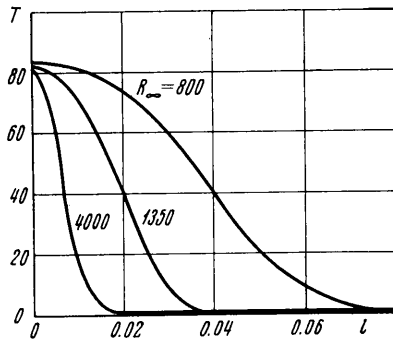
Фиг. 6



Фиг. 7

Результаты расчетов приведены на фиг. 4—8. На фиг. 4 приведены распределения температуры  $T$ , плотности  $\rho$  и скорости  $v$ , а на фиг. 5 — распределения массовых долей  $O_2$  (кривая 1),  $N_2$  (кривая 2) и увеличенной в 10 раз массовой доли NO (кривая 3) для  $R_\infty = 800$ . На фиг. 6 приведены распределения  $T$ ,  $\rho$  и  $v$  для  $R_\infty = 1350$ , а на фиг. 7 — распределения массовых долей  $O_2$  (кривая 1),  $N_2$  (кривая 2) и увеличенной в 5 раз массовой доли NO (кривая 3) для  $R_\infty = 1350$ . Таков же характер распределения этих параметров для других  $R_\infty$ .

Увеличение числа Рейнольдса приводит к увеличению градиентов параметров у поверхности тела, а также к увеличению степени диссоциации кислорода и азота и к повышению массовой доли NO в ударном слое. При небольших числах  $R_\infty$  концентрации окиси азота и атомарных компонент в ударном слое существенно меньше концентраций этих компонент, полученных при расчетах без учета явлений переноса. С увеличением числа  $R_\infty$  уменьшается поперечный размер ударного слоя в целом. Особенно сильно уменьшается толщина ударной волны. Это видно из фиг. 8, на которой приведены распределения температуры в ударных волнах для  $R_\infty = 800, 1350$  и 4000. Безразмерное расстояние  $l$  на этой фигуре отсчитывается от точки, в которой достигается максимум температуры.



Фиг. 8

Поступило 7 VII 1970

## ЛИТЕРАТУРА

- Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. Изд-во иностр. лит., 1962.
- Chung P. M. Hypersonic viscous shock layer of nonequilibrium dissociating gas. NASA TR, R-109, 1961.
- Левинский Е., Иосихара Х. Обтекание сферы гиперзвуковым потоком разреженного газа. В кн. «Исследование гиперзвуковых течений», М., «Мир», 1964.
- Chung P. M., Holt J. F., Liu S. W. Merged stagnation shock layer of nonequilibrium dissociating gas. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 12, pp. 2372—2379.
- Gilbarg D., Paolucci D. The structure of shock waves in the continuum theory of fluids. J. Ration. Mech. and Analysis, 1953, vol. 2, No. 4, pp. 617—630.
- Архипов В. Н., Поленов А. Н. Химическая релаксация в вязком скачке уплотнения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4, стр. 91—96.
- Павлов Б. М. Расчет гиперзвукового вязкого обтекания сферы вблизи линии торможения. В кн. «Вычислительные методы и программирование. Численные методы в газовой динамике», Сб. работ ВЦ МГУ, 1967, вып. 7.
- Рей К. Химическая кинетика воздуха при высокой температуре. В кн. «Исследование гиперзвуковых течений», М., «Мир», 1964.
- Кондратьев В. Н. Константы скоростей газозафазных реакций. М., «Наука», 1970.