

УДК 533.697

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАВНОВЕСНОЙ КОНДЕНСАЦИИ В СВЕРХЗВУКОВЫХ СОПЛАХ И СТРУЯХ

Л. М. ДАВЫДОВ

(Москва)

Расчет неравновесной конденсации в соплах в одномерной постановке рассматривался в работах [1, 2] и ряде других.

В данной работе рассматривается применение метода характеристик к расчету течения газа с учетом неравновесного и равновесного протекания процесса конденсации. Предложены рекуррентные соотношения для расчета кинетики конденсации вдоль линии тока, позволяющие значительно упростить схему счета и сократить время счета. Методом характеристик с учетом предложенных рекуррентных соотношений проведено расчетное исследование влияния неравновесности процесса конденсации на течение газа в сверхзвуковых соплах и струях, истекающих в вакуум. Предложен приближенный метод расчета неравновесной конденсации, основанный на интегрировании одномерных уравнений вдоль линии тока с использованием распределения плотности тока ρw вдоль этой линии тока.

1. Основные уравнения. Стационарное плоское и осесимметричное течение невязкого и нетеплопроводного газа с частицами с учетом неравновесного протекания процесса конденсации описывается уравнениями движения

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

неразрывности

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\rho v}{y} + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (1.2)$$

энергии

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \quad (1.3)$$

кинетики

$$\frac{dq}{dt} = f(p, T, q) \quad (1.4)$$

Здесь x, y — прямоугольные координаты; ось x направлена вдоль оси сопла (струи); u, v — проекции скорости на оси x, y ; p, T — давление и температура газа; ρ, h — плотность и удельная энтальпия смеси газ — жидкость; q — массовая доля жидкой фазы; $v = 0$ и 1 соответственно для плоского и осесимметричного случаев.

В уравнениях (1.1) — (1.4) предполагается, что жидкая и газообразная фазы движутся с одинаковыми скоростями. Это предположение оправдано тем, что обычно наблюдаемым перенасыщением газа в соплах и струях соответствуют весьма малые размеры капель $\sim 10^{-6} - 10^{-7}$ см. В работе [3] показано, что скорость капель с радиусом $\sim 10^{-4}$ см отличается от скорости газа не более чем на 1%.

К уравнениям (1.1) — (1.4) нужно добавить уравнения состояния и энтальпии смеси газ — жидкость.

Пусть имеется смесь газов, подчиняющихся уравнению состояния идеального газа и конденсируется одна компонента. Ввиду того что плотность жидкости много больше плотности газа, объемом, занимаемым жидкими частицами, можно пренебречь. Тогда уравнение состояния для этой смеси газов будет иметь вид

$$\rho(p, T, q) = \frac{p}{T(R - R_1 q)} \quad (1.5)$$

где R, R_1 — газовые постоянные начальной смеси газов и конденсирующей компоненты.

Выражение для удельной энтальпии смеси газ — жидкость имеет вид

$$h(p, T, q) = C_p T - C_{p1} q T + h_l q \quad (h_l = C_{p1} T_l - L) \quad (1.6)$$

Здесь h_l — удельная энтальпия жидкой фазы; C_p, C_{p1} — удельная теплоемкость начальной смеси газов и конденсирующейся компоненты газа; T_l — температура капли; L — удельная теплота испарения; из (1.6) получим

$$h = C_p T - Lq + C_{p1} q (T_l - T) \quad (1.7)$$

Третьим членом в правой части уравнения (1.7) можно пренебречь по сравнению с первым.

Рассмотрим типичные случаи:
в начале конденсации

$$q \sim 0.005, \quad (T_l - T) \sim 30^\circ, \quad T \sim 300^\circ \text{ К}$$

после выпадения значительного количества конденсата

$$q \sim 0.1, \quad (T_l - T) \sim 3^\circ, \quad T \sim 250^\circ \text{ К}$$

Так как $C_p \sim C_{p1}$, то

$$\frac{C_p T}{C_{p1} q (T_l - T)} \sim 1000$$

Тогда выражение для h примет вид

$$h = C_p T - Lq \quad (1.8)$$

Уравнения характеристик и соотношения на них для системы (1.1) — (1.4) имеют вид [4]

$$dx = \frac{\beta \mp \zeta}{\beta \zeta \pm 1} dy \quad \left(\beta = \left(\frac{w^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \right) \quad (1.9)$$

$$\frac{y}{1 + \zeta^2} d\zeta \pm \frac{\beta y}{\rho w^2} dp \pm \frac{1}{\beta \zeta \pm 1} \left(v \zeta - \frac{y (1 + \zeta^2)^{1/2} (\rho_T h_q - h_T \rho_q) f}{h_T \rho w} \right) dy = 0 \quad (1.10)$$

$$d\psi = \pm \frac{\rho w y^v (1 + \zeta^2)^{1/2}}{\beta \zeta \pm 1} dy \quad (1.11)$$

$$h_p = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{T, q}, \quad h_T = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{p, q}, \quad h_q = \left(\frac{\partial h}{\partial q} \right)_{p, T}$$

$$\rho_p = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, q}, \quad \rho_T = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, q}, \quad \rho_q = \left(\frac{\partial \rho}{\partial q} \right)_{p, T}$$

Здесь ζ — тангенс угла наклона скорости к оси x ; w, a — скорости газа и звука; ψ — функция тока.

В уравнениях (1.9) — (1.11) верхние знаки соответствуют характеристикам первого семейства, нижние — характеристикам второго семейства. Уравнение линии тока и соотношения на ней имеют вид [5]

$$dy = \zeta dx, \quad f dx = \frac{w}{(1 + \zeta^2)^{1/2}} dq \quad (1.12)$$

$$dT + \left(h_p - \frac{1}{\rho} \right) \frac{dp}{h_T} + \frac{h_q}{h_T} dq = 0, \quad \frac{w^2}{2} + h = \text{const}$$

Определим замороженную скорость звука в смеси газ — жидкость, как [4]

$$a^{-2} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{s, q} = \rho_p + \frac{\rho_T}{h_T} \left(\frac{1}{\rho} - h_p \right) \quad (s\text{-энтропия}) \quad (1.13)$$

Чтобы приведенная здесь формула для скорости звука в газе могла рассматриваться как выражение для скорости звука в смеси газ — жидкость нужно сделать предположение, что $r \ll \lambda$, где λ — длина звуковой волны, r — радиус капель. Можно считать, что в данном случае это условие выполняется.

Уравнения (1.5), (1.8) — (1.10) и последнее уравнение (1.12) можно использовать и для расчета равновесной конденсации в сверхзвуковых потоках (в этом случае q не будет независимой переменной и поэтому $f \equiv 0$); при этом к этим уравнениям нужно добавить уравнения сохранения энтропии и кривой насыщения

$$C_p \ln T - R \ln p - Lq/T = \text{const}, \quad \ln p_1 = d - b/T \quad (1.14)$$

где p_1 — давление конденсирующейся компоненты газа; d, b — постоянные коэффициенты.

Для вычисления равновесной скорости звука в насыщенном паре воспользуемся формулой [4]

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = - \frac{h_p}{h_p - 1/\rho} \quad (1.15)$$

В этом уравнении энтальпия является функцией давления и плотности.

Подставляя выражение $p_1 = \rho R_1 T (c_1 - q)$, где c_1 — начальная концентрация конденсирующейся компоненты газа, из (1.14) получаем

$$\ln (\rho R_1 T (c_1 - q)) = d - b/T \quad (1.16)$$

После некоторых преобразований из (1.5) и (1.16) можно получить выражения для h_p и h_p

$$h_p = \frac{C_p T - L(1 - b/T)(c_1 - q)}{p - p_1(1 - b/T)} \quad (1.17)$$

$$h_p = \frac{1}{\rho((1 - b/T)p_1 - p)} \left(C_p T (p - p_1) + \frac{L b p p_1}{\rho T^2 R_1} \right) \quad (1.18)$$

2. Уравнения кинетики. Найдем теперь выражение для прироста массовой доли жидкой фазы вдоль линии тока, которое входит в уравнения (1.12).

Для описания зарождения и роста ядер конденсации использованы уравнения, полученные в работах [1, 6].

Радиус зародыша, находящегося в состоянии равновесия с окружающей средой, называется критическим и дается формулой Томпсона [6]

$$r^* = \frac{2\sigma}{\rho_l R_1 T \ln(p_1 / p_{1\infty})}, \quad p_{1\infty} = \exp\left(d - \frac{b}{T}\right) \quad (2.1)$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ_l — плотность жидких капель.

Равновесие между газом и зародышем критического размера является неустойчивым [6]: если $r > r^*$, то зародыш будет расти, если $r < r^*$, то он будет испаряться.

Таким образом, существует минимальный критический размер, которым должен обладать зародыш, для того чтобы стать центром конденсации. В связи с тем что зародыши новой фазы образуются за счет флуктуаций плотности и ввиду того что вероятность флуктуаций быстро убывает с возрастанием их размеров, начало фазового перехода определяется вероятностью возникновения зародышей минимально необходимых размеров. Поэтому в расчетах можно учитывать образование зародышей только критического размера.

Число зародышей критического размера, которое образуется в 1 сек в 1 см³, вычислялось по формуле, предложенной в работе [6]

$$I = \left(\frac{p_1}{kT}\right)^2 \frac{1}{\rho_l} \left(\frac{2\sigma\mu}{\pi N_a}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{4\pi(r^*)^2}{3kT}\right) \quad (2.2)$$

Здесь k — постоянная Больцмана, N_a — число Авогадро, μ — молекулярный вес конденсирующейся компоненты.

При вычислении скорости роста капель использовались следующие предположения:

1) давление насыщения считается равным давлению насыщения капли бесконечного радиуса;

2) температуры на поверхности капли и внутри нее равны;

3) температура капли равна температуре насыщения, соответствующей давлению пара;

4) длина свободного пробега много больше размера капли;

5) капли имеют сферическую форму.

С учетом этих предположений можно показать [1], что скорость роста капли будет описываться уравнением

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\gamma p_1}{\rho_l} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi R_1 T}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi R_1 T_l}} \right) \quad (2.3)$$

где γ — коэффициент конденсации.

Температура капли вычислялась по формуле

$$T_l = \frac{b}{(d - \ln p_1)} \quad (2.4)$$

Разобьем линию тока на малые отрезки и найдем прирост массовой доли жидкой фазы на некотором j -м отрезке. Параметрам, относящимся к этапу расчета, на котором происходит образование капель, будем приписывать внизу индекс i , а параметрам, которые относятся к этапу расчета в данный момент, — индекс j .

Число ядер критического размера, которое образуется в единице массы смеси газ — жидкость за время прохождения i -го отрезка, равно

$$N_i = \frac{I_i \Delta l_i}{\rho_i w_i} \quad (2.5)$$

где Δl_i — длина i -го элемента линии тока.

Тогда для прироста массовой доли жидкой фазы в единице массы смеси за время прохождения j -го отрезка вдоль линии тока имеем формулу

$$\Delta q_j = 4\pi\rho_l \left(\sum_{i=1}^{j-1} N_i r_{i,j}^2 \Delta r_j + \frac{N_j (r_j^*)^3}{3} \right) \quad (2.6)$$

где Δr_j — прирост радиуса капли на участке Δl_j .

Введем обозначения

$$A_j = \sum_{i=1}^{j-1} N_i r_{i,j}^2, \quad D_j = \sum_{i=1}^{j-1} N_i, \quad B_j = \sum_{i=1}^{j-1} N_i r_{i,j-1}$$

Учитывая, что $r_{i,j} = r_{i,j-1} + \Delta r_{j-1}$, после некоторых преобразований получаем

$$\Delta q_j = 4\pi\rho_l (A_j \Delta r_j + 1/3 N_j (r_j^*)^3) \quad (2.7)$$

$$D_j = D_{j-1} + N_{j-1} \quad B_j = B_{j-1} + D_{j-1} \Delta r_{j-2}$$

$$A_j = A_{j-1} + N_{j-1} r_{j-1, j-1} + D_j \Delta r_{j-1}^2 + 2B_j \Delta r_{j-1}, \quad r_{j-1, j-1} = r_{j-1}^*$$

Отметим, что соотношения (2.7) имеют силу при условии, что скорость роста капель не зависит от радиуса.

3. Результаты расчета и их анализ. В соответствии с изложенным методом характеристик были составлены программы для расчета на ЭЦВМ равновесной и неравновесной конденсаций в сверхзвуковых соплах и струях, истекающих в вакуум.

Расчет поля течения в сопле велся вдоль линий тока, по слоям, перпендикулярным оси x . Аналогично рассчитывалось поле течения в струе.

В качестве рабочего газа был взят водяной пар. Расчеты проводились при следующих значениях термодинамических величин водяного пара:

$$\begin{aligned} L &= 2.7 \cdot 10^{10} \text{ эрг/г}, & C_p &= 1.85 \cdot 10^7 \text{ эрг/г} \\ \sigma &= 128 - 0.19T \text{ дин/см}, & \ln p_1 &= 28.26 - 5338/T \\ \rho_l &= 1.11 - 0.0004T, & \gamma &= 0.04 \end{aligned}$$

давление измерялось в дин/см^2 .

Расчеты, результаты которых представлены в таблице, проводились для конического сопла с углом полураствора $11^\circ 19'$ и радиусом критического сечения $R_k = 1 \text{ см}$. Горловина сопла имела постоянный радиус кривизны, равный 2 см .

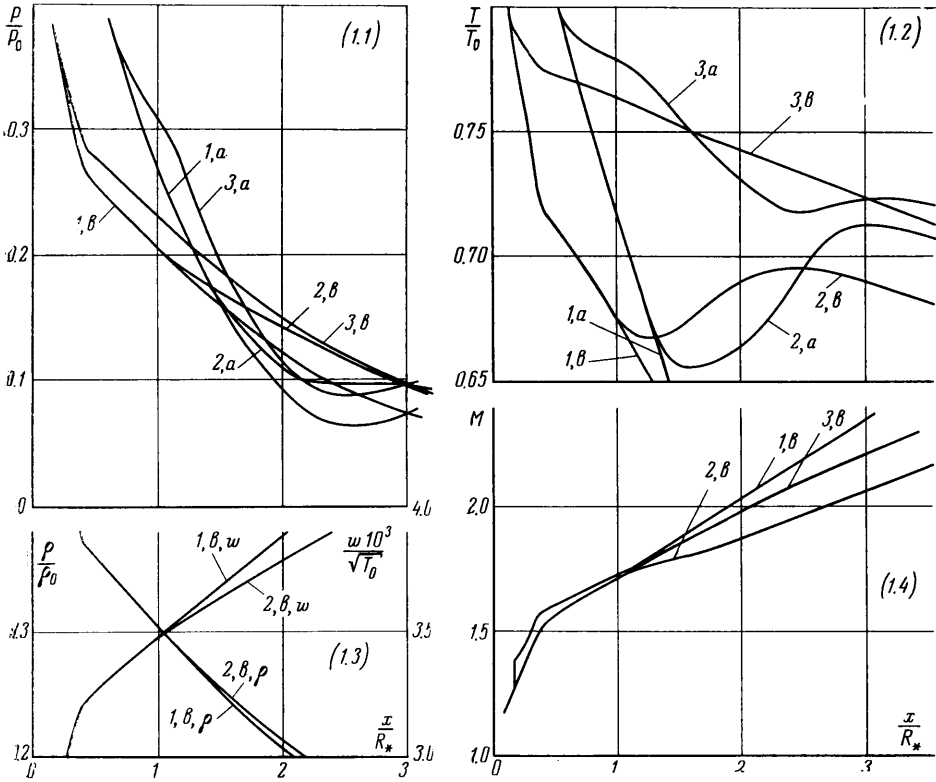
	$p_0, \text{ атм}$	$T_0, \text{ }^\circ\text{K}$	$T_*, \text{ }^\circ\text{K}$	M_*	ΔT_a	ΔT_b	M_a^*	M_b^*
1	2.55	467.0	370	1.259	57.0	58.4	1.75	1.76
2	43.10	941.2	370	3.059	57.2	56.7	3.51	3.50
3	17.92	757.1	370	2.518	57.6	57.5	2.94	2.94
4	17.92	652.7	392	1.99	52.1	51.8	2.39	2.37
5	17.92	900.3	348	3.12	63.0	63.2	3.64	3.64

В таблице приняты следующие обозначения: p_0, T_0 — давление и температура газа в ресивере; T_*, M_* — температура и число Маха в точке насыщения; T^*, M^* — температура и число Маха, при которых начинается неравновесная конденсация; $\Delta T = T^* - T^*$ — переохлаждение газа; индексы b, a относятся соответственно к стенке и оси сопла.

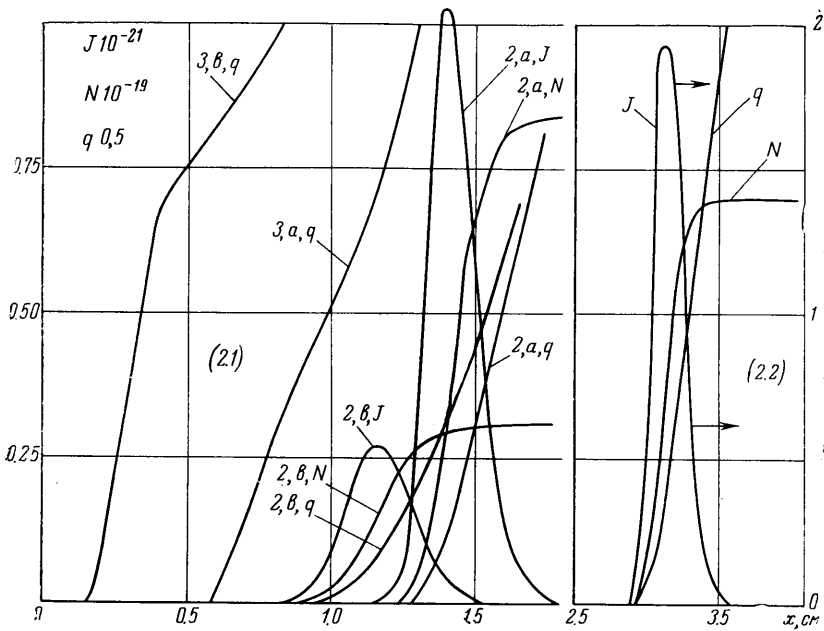
В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $1, 2, 3$ — соответственно замороженный, неравновесный и равновесный расчеты; a, b — распределенные параметров соответственно на оси и стенке сопла.

На фиг. 1.1, 1.2 дано распределение давления и температуры на оси и стенке сопла.

Из этих фигур видно, что при неравновесном протекании процесса конденсации в точке насыщения и на некотором расстоянии вниз по потоку конденсация не наблюдается и параметры течения совпадают с замороженными. Только после дости-



Фиг. 1

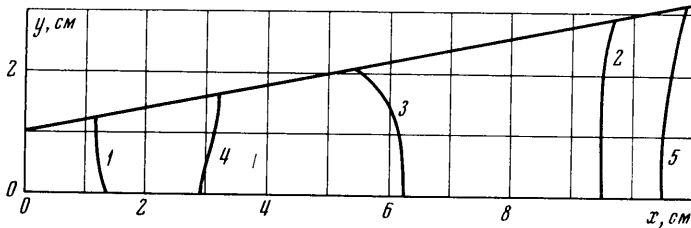


Фиг. 2

жения достаточно большого переохлаждения наблюдается довольно заметное отклонение давления и особенно температуры от замороженных значений. После этого кривые распределения давления и температуры приближаются к равновесным кривым.

Особенностью течения в конических соплах является то, что на оси сопла может наблюдаться повышение давления и температуры (фиг. 1.1, 1.2). На такую особенность течения в конических соплах было указано в работе [7].

На фиг. 2.1 дано распределение на оси и стенке сопла скорости образования ядер конденсации I , общего числа ядер N и массовой доли жидкой фазы q . Из анализа этой фигуры следует, что скорость образования зародышей критического размера вначале быстро растет, достигая больших величин $\sim 10^{21}$ частиц/см³·сек, а потом, после частичного снятия перенасыщения за счет выпадения влаги, быстро падает до нуля. Общее число ядер в начальный период конденсации также быстро растет и достигает величины $\sim 10^{19}$ частиц/г. Следовательно, в начальный период конденсации происходит за счет образования зародышей и их быстрого роста, а после частичного снятия перенасыщения конденсация происходит только за счет роста капель.



Фиг. 3

По сравнению с влиянием на давление и температуру конденсация слабо влияет на плотность и скорость смеси газ — жидкость (фиг. 1.3). Так, например, плотность и скорость смеси за счет конденсации соответственно увеличивается и уменьшается на $\sim 2.5\%$, а давление и температура увеличиваются на $\sim 20\%$.

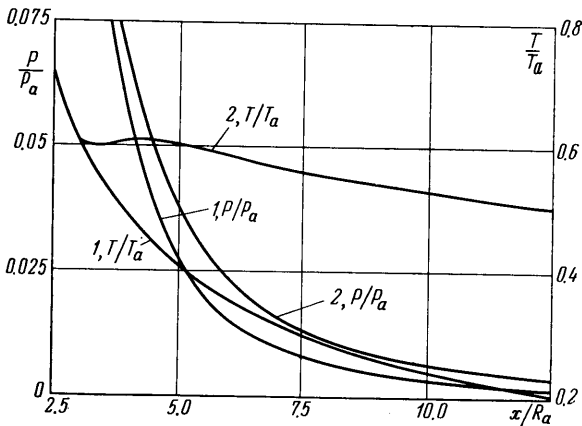
Расчеты показывают, что конденсация газа практически не влияет на положение линий тока в сопле и плотность тока ρw . Следовательно, получив из двумерного замороженного расчета

распределение ρw вдоль произвольной линии тока, можно в одномерной постановке рассчитать процесс конденсации вдоль этой линии тока.

Как и следовало ожидать, конденсация газа понижает замороженное число Маха по сравнению с замороженным течением. В точке насыщения равновесная скорость звука, а значит и равновесное число Маха терпят разрыв (фиг. 1.4).

Проанализируем теперь результаты расчетов, представленные в таблице.

Из расчетов следует, что одной из величин, которая определяет переохлаждение газа, является температура насыщения. В расчетах 1—3 температура насыщения была во всех случаях одинаковой и, несмотря на то что p_0 и T_0 сильно отличались, переохлаждение газа отличалось не более чем на 2° . Из таблицы видно незначительное отличие в переохлаждении газа на оси и стенке сопла. Это еще раз подтверждает тот факт, что температура насыщения является важным параметром. Это можно объяснить тем, что важнейшим параметром, определяющим начало конденсации, является скорость образования зародышей [2], и необходимо незначительное увеличение переохлаждения для того, чтобы скорость образования зародышей увеличилась в несколько раз. Если температура насыщения будет постоянна, то необходимо одно и то же переохлаждение, чтобы достичь заданную скорость образования ядер.



Фиг. 4

Из расчетов следует (таблица), что линии начала неравновесной конденсации практически совпадают с линиями равных чисел Маха и переохлаждение газа для разных линий тока примерно одинаково. На фиг. 3 показаны линии начала неравновесной конденсации в сопле для различных вариантов.

Рассмотрим теперь влияние неравновесной конденсации на течение в струях, истекающих в вакуум.

На фиг. 4 дано распределение давления и температуры на оси струи водяного пара, истекающего в вакуум. Расчет проводился при следующих параметрах на срезе сопла:

$$p_a = 3 \text{ атм}, \quad T_a = 500^\circ \text{ К}, \quad R_a = 1 \text{ см}$$

Здесь R_a — радиус среза сопла.

На фиг. 2.2 дано распределение на оси струи скорости образования ядер, общего числа ядер и массовой доли жидкой фазы.

Все выводы, полученные из анализа расчетов неравновесной конденсации в сопле, имеют силу и для струй, за исключением области, близкой к кромке сопла, где градиенты достигают сколь угодно больших величин.

Из фиг. 2.1, 2.2 видно, что максимальная скорость образования ядер в соплах и струях имеет один и тот же порядок 10^{21} частиц/см³·сек.

Автор благодарит У. Г. Пирумова за руководство работой.

Поступило 2 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Hill P. G. Condensation of water vapour during supersonic expansion in nozzles. *J. Fluid Mech.*, 1966, vol. 25, pt 3, pp. 593—620.
2. Griffin J. L., Sherman P. M. Computer analysis of condensation in highly expandid flows. *AIAA Journal*, 1965, vol. 3, No. 10.
3. Вегенер П. П., Мак Л. М. Конденсация в сверхзвуковых и гиперзвуковых аэродинамических трубах. В сб. «Проблемы механики», вып. 3, М., Изд-во иностр. лит., 1961.
4. Вроер L. J. F. Characteristics of equations of motion of a reacting gas. *J. Fluid Mech.*, 1958, vol. 4, pt. 3, pp. 276—482.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, Изд. 2. М., Гостехиздат, 1954.
6. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1945.
7. Жигулева И. С., Пирумов У. Г. Исследование распространения малых возмущений в сверхзвуковых конических соплах. М., Оборонгиз, 1959.