УДК 534.222.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЛАБЛЕНИЯ ВОЛНЫ ДЕТОНАЦИИ С ДВУХФРОНТОВОЙ СТРУКТУРОЙ МЕТОДОМ ПОГРАНИЧНОГО (УДАРНОГО) СЛОЯ

О. Б. ЛАРИН, В. А. ЛЕВИН

(*Москва*)

Рассматривается возможность перехода плоской пересжатой детонационной волны при ее ослаблении к режиму Чепмена — Жуге в двухфронтовой модели с учетом изменения параметров потока в промежутке между фронтами. Для описания течения газа в этом промежутке используется приближенный метод пограничного (ударного) слоя Г. Г. Черного. Применение метода обосновано тем, что скорость распространения детонационной волны велика (порядка нескольких километров в секунду) и газ между скачком уплотнения и фронтом горения является сильно сжатым.

Как известно, бесконечно тонкая плоская волна детонации при ее ослаблении течением разрежения асимптотически переходит к режиму Чепмена — Жуге [1, 2]. Влияние конечной скорости химических реакций на возможность перехода волны к режиму Чепмена — Жуге исследовалось в работах [3, 4], где использовалась двухфронтовая модель течения. Согласно этой модели детонационная волна представляет собой обычный скачок уплотнения и следующий за ним на определенном расстоянии фронт пламени, причем это расстояние определяется временем задержки воспламенения частицы газа, прошедшей скачок уплотнения. В [3] предполагалось, что изменением газодинамических величин в пространстве между фронтами можно пренебречь, а ударная волна считалась сильной. Переход пересжатой волны детонации к режиму Чепмена — Жуге оказался возможным лишь для небольших энергий активации и реакций первого порядка. Для значительных энергий активации и реакций более высокого порядка такой переход был невозможен. В работе [4] учитывалось в линейном приближении изменение параметров потока в зоне между ударной волной и фронтом горения. Установлено, что при ослаблении пересжатой волны возникают колебания, которые либо затухают (причем волна выходит на режим Чепмена — Жуге), либо экспоненциально нарастают со временем. Найденный здесь критерий неустойчивости отличается от полученного в [3], однако выводы обеих работ аналогичны. Этот критерий неустойчивости отличен также от приведенного в [5]; показано, что критерий работы [5] является только достаточным.

Ослабление детонационной волны с протяженной зоной тепловыделения за скачком уплотнения и переход ее к режиму Чепмена — Жуге рассматривались в [6, 7]. Путем численных расчетов удалось установить, что при небольших энергиях активации для принятой модели тепловыделения волна выходит на указанный режим. В противном случае возникают незатухающие колебания ударной волны и газового потока за ней.

Уравнения, описывающие адиабатическое течение газа в области между ударной волной и скачком тепловыделения, имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{p}{\rho^\gamma}+u\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{p}{\rho^\gamma}=0 \tag{1}$$

Переходя к переменным Лагранжа t и m, где m определяется формулой

$$dm=\rho(dx-udt) \tag{2}$$

получим вместо (1) систему

$$\frac{\partial x}{\partial t}=u, \qquad \frac{\partial u}{\partial m}=\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{\rho}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial m}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{p}{\rho^\gamma}=0 \tag{3}$$

Используя идею сильно сжатого слоя [8], ищем решение этой системы в виде рядов по степеням малого параметра μ, характеризующего отношение плотностей в покоящемся и сжатом газе

$$u = u_0 + \mu u_1 + \ldots, \quad p = p_0 + \mu p_1 + \ldots, \quad \rho = \rho_0 / \mu + \rho_1 + \ldots \tag{4}$$
$$\mu = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$$

С помощью известных соотношений на ударной волне нетрудно получить условия, которым должны удовлетворять на скачке уплотнения первые члены разложения искомых функций

$$\begin{gathered} u_{0s} = x_s^{\cdot}(t)\left[1 - \frac{a^{(0)2}}{x_s^{\cdot 2}(t)}\right], \qquad u_{1s} = -u_{0s} \\ p_{0s} = \rho^{(0)} x_s^{\cdot 2}(t), \qquad p_{1s} = -p_{0s} - p^{(0)} \\ \rho_{0s} = \rho^{(0)}\left[1 + \frac{2}{\gamma - 1}\,\frac{a^{(0)2}}{x_s^{\cdot 2}(t)}\right]^{-1}, \qquad \rho_{1s} = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

где величины с индексом s относятся к фронту возмущенной области, величины с индексом (0) вверху — к начальному состоянию газа; a — скорость звука, $x = x_s(t)$ — закон движения ударной волны.

Подставляя ряды (4) в систему (3) и переходя к новой лагранжевой переменной τ — времени пересечения данной частицей ударной волны, можно с учетом граничных условий (5) найти решение в виде

$$\begin{aligned} u_0(t, \tau) &= x^{\cdot}(t)\left[1 - \frac{a^{(0)2}}{x^{\cdot 2}(t)}\right] \\ p_0(t, \tau) &= \rho^{(0)}\left\{x^{\cdot 2}(t) + x^{\cdot\cdot}(t)\left[1 + \frac{a^{(0)2}}{x^{\cdot 2}(t)}\right][x(t) - x(\tau)]\right\} \\ \rho_0(t, \tau) &= \rho^{(0)}\left[1 + \frac{2}{\gamma - 1}\,\frac{a^{(0)2}}{x^{\cdot 2}(t)}\right]^{-1}\left[\frac{p_0(t, \tau)}{\rho^{(0)} x^{\cdot 2}(\tau)}\right]^{1/\gamma} \\ u_1(t, \tau) &= -\rho^{(0)}\int_{\tau}^{t} \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{\rho_0(t, \tau)}\,x^{\cdot}(\tau)\,d\tau - x^{\cdot}(t)\left[1 - \frac{a^{(0)2}}{x^{\cdot 2}(t)}\right] \\ p_1(t, \tau) &= \rho^{(0)}\int_{\tau}^{t} \frac{\partial}{\partial t} u_1(t, \tau)\,x^{\cdot}(\tau)\,d\tau - \rho^{(0)} x^{\cdot 2}(t) - p^{(0)} \\ \rho_1(t, \tau) &= \frac{\rho_0(t, \tau)}{\gamma}\left[\frac{p_1(t, \tau)}{p_0(t, \tau)} + 1 + \frac{a^{(0)2}}{\gamma x^{\cdot 2}(\tau)}\right] \end{aligned} \tag{6}$$

(Здесь и в дальнейшем индекс функции x_s опущен.)

Предположим теперь, что интенсивность рассматриваемой детонационной волны лишь немного превышает интенсивность волны Чепмена — Жуге. Следуя [3], введем для характеристики указанного отклонения два параметра

$$\varepsilon = D_s / D_J - 1, \qquad \delta = D_f / D_J - 1 \tag{7}$$

где D_s, D_f, D_J — скорости распространения ударной волны, фронта горения и детонационной волны Чепмена — Жуге соответственно.

Если при ослаблении детонационной волны окажется, что обе величины ε и δ стремятся к нулю с течением времени, то это будет означать, что детонационная волна асимптотически вырождается в волну Чепмена — Жуге. В противном случае переход к этому режиму не осуществляется.

Величины ε и δ будем считать малыми одного порядка. Сохраняя члены порядка не выше первого относительно переменной ε и ее производных, представим выражения (6) в виде

$$u_0(t,\tau) = D_J\left(1-\frac{1}{M_J^2}\right)\left[1+\frac{M_J^2+1}{M_J^2-1}\varepsilon(t)\right] \qquad \left(M_J=\frac{D_J}{a^{(0)}}\right)$$

$$p_0(t,\tau) = \rho^{(0)}D_J^2\left\{1+2\varepsilon(t)+\frac{1}{D_J}\left(1+\frac{1}{M_J^2}\right)[x(t)-x(\tau)]\,\varepsilon^{\cdot}(t)\right\}$$

$$\rho_0(t,\tau) = \frac{\rho^{(0)}}{\alpha}\left\{1+\frac{2}{\gamma}[\varepsilon(t)-\varepsilon(\tau)]+\frac{4}{\gamma-1}\,\frac{1}{\alpha M_J^2}\varepsilon(\tau)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\gamma D_J}\left(1+\frac{1}{M_J^2}\right)[x(t)-x(\tau)]\,\varepsilon^{\cdot}(t)\right\},\qquad \alpha=1+\frac{2}{\gamma-1}\,\frac{1}{M_J^2}$$

$$u_1(t,\tau) = \frac{\alpha D_J}{\gamma}\left\{\left(3+\frac{1}{M_J^2}\right)(t-\tau)\,\varepsilon^{\cdot}(t)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{D_J}\left(1+\frac{1}{M_J^2}\right)\varepsilon^{\cdot\cdot}(t)\int_\tau^t[x(t)-x(\tau)]\,d\tau\right\}-u_0(t,\tau) \qquad (8)$$

$$p_1(t,\tau) = -\rho^{(0)}D_J^2\left[1+\frac{1}{\gamma M_J^2}+2\varepsilon(t)-\frac{\alpha\lambda}{\gamma}+\left(1+\frac{1}{M_J^2}\right)(t-\tau)\,\varepsilon^{\cdot}(t)\right]$$

$$\lambda = \left(3+\frac{1}{M_J^2}\right)(t-\tau)\,\varepsilon^{\cdot}(t)+\left(2+\frac{1}{M_J^2}\right)(t-\tau)^2\varepsilon^{\cdot\cdot}(t)+$$
$$+\frac{1}{D_J}\left(1+\frac{1}{M_J^2}\right)\varepsilon^{\cdot\cdot\cdot}(t)\int_\tau^t\int_{\tau'}^t[x(t)-x(\xi)]\,d\xi\,d\tau'$$

$$\rho_1(t,\tau) = \frac{\rho^{(0)}}{\gamma^2\alpha}\left\{\frac{2}{M_J^2}[\varepsilon(t)-\varepsilon(\tau)]-\gamma\left(1+\frac{1}{M_J^2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left[t-\tau-\frac{1}{D_J}\left(1+\frac{1}{\gamma M_J^2}\right)(x(t)-x(\tau))\right]\varepsilon^{\cdot}(t)+\alpha\lambda\right\}$$

Для скорости звука находим

$$a^2(t,\tau) = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\alpha\beta D_J^2\left\{1+2\frac{\gamma-1}{\gamma}\varepsilon(t)+\frac{1}{\gamma}\left[\frac{2}{\alpha}\left(1-\frac{2}{M_J^2}\right)+\right.\right. \qquad (9)$$
$$\left.\left.+\frac{\gamma-1}{\beta M_J^2}\right]\varepsilon(\tau)+\frac{\gamma-1}{\gamma D_J}\left(1+\frac{1}{M_J^2}\right)[x(t)-x(\tau)]\,\varepsilon^{\cdot}(\tau)+\frac{(\gamma-1)^2\alpha\rho_1(t,\tau)}{2\beta\rho^{(0)}}\right\}$$

$$\beta = 1-\frac{\gamma-1}{2\gamma}\,\frac{1}{M_J^2}$$

При известном законе движения ударной волны выражения (8), (9) определяют параметры потока в области между фронтами. Для того чтобы найти значения газодинамических величин непосредственно перед скачком тепловыделения, нужно в соответствующих равенствах положить $t=\tau+\tau_*(\tau)$, где $\tau_*(\tau)$ — время задержки воспламенения для фиксированной частицы.

Запишем условия на фронте пламени

$$\rho_{f1} = \frac{\rho_{f2}}{\gamma+1}(\gamma+q-r), \qquad p_{f2} = \frac{p_{f1}}{(\gamma+1)q}(\gamma+q+\gamma r)$$

$$D_f - u_{f2} = \frac{D_f - u_{f1}}{\gamma+1}(\gamma+q-r) \tag{10}$$

$$q = \left(\frac{a_{f1}}{D_f - u_{f1}}\right)^2, \qquad r = \left[(q-1)^2 - \frac{2(\gamma^2-1)Q}{(D_f-u_{f1})^2}\right]^{1/2}$$

Здесь Q — тепловыделение в единице массы газа, индексы $f1$ и $f2$ относятся к величинам непосредственно перед фронтом пламени и за ним.

Для определения скорости детонационной волны Чепмена — Жуге имеем уравнение

$$(1 - M_J^{-2})D_J = \sqrt{2(\gamma^2-1)Q} \tag{11}$$

Из условий (10) для детонационных волн, близких по интенсивности к волне Чепмена — Жуге, с точностью до членов порядка $\sqrt{\varepsilon}$ включительно находим

$$p_{f2} = \frac{\rho^{(0)}D_J{}^1}{\gamma+1}\left(1 + \frac{1}{\gamma M_J{}^2} + h\sqrt{\omega}\right), \qquad u_{f2} = \frac{D_J}{\gamma+1}\left(1 - \frac{1}{M_J{}^2} + h\sqrt{\omega}\right)$$

$$\rho_{f2} = \frac{\rho^{(0)}D_J}{D_f - u_{f2}}, \qquad h = \left(1 - \frac{1}{M_J{}^2}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M_J{}^2}\right)^{-1/2}$$

$$\omega = 4\,\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}\left[1 + \frac{2M_J{}^2+1}{(2\gamma-1)M_J{}^4}\right]\varepsilon(\tau) - \tag{12}$$

$$- 2\,\frac{3\gamma-1}{\gamma-1}\left(1 + \frac{3-\gamma}{3\gamma-1}\,\frac{1}{M_J{}^2}\right)\delta(\tau+\tau_*) + \frac{2\Delta}{\gamma(\gamma+1)}$$

$$\Delta = \alpha(\gamma-1)\Big\{4\gamma\,[\varepsilon(\tau+\tau_*) - \varepsilon(\tau)] + 2\gamma\left(1 + \frac{1}{M_J{}^2}\right)\tau_*\varepsilon^{\cdot}(\tau+\tau_*) +$$

$$+ \alpha\left[\left(3 + \frac{1}{M_J{}^2}\right)\tau_*\varepsilon^{\cdot}(\tau+\tau_*) + \left(2 + \frac{1}{M_J{}^2}\right)\tau_*{}^2\varepsilon^{\cdot\cdot}(\tau+\tau_*) +\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{M_J{}^2}\right)\tau_*{}^3\varepsilon^{\cdot\cdot\cdot}(\tau+\tau_*)\right]\Big\} + \frac{3\gamma-1}{\gamma-1}\left(1 + \frac{3-\gamma}{3\gamma-1}\,\frac{1}{M_J{}^2}\right)\times$$

$$\times\Big\{2\gamma\left(1 + \frac{1}{M_J{}^2}\right)[\varepsilon(\tau+\tau_*) - \varepsilon(\tau)] + \alpha(\gamma-1)\times$$

$$\times\left[\left(3 + \frac{1}{M_J{}^2}\right)\tau_*\varepsilon^{\cdot}(\tau+\tau_*) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{M_J{}^2}\right)\tau_*{}^2\varepsilon^{\cdot\cdot}(\tau+\tau_*)\right]\Big\}$$

Малая величина ω представляет собой функцию, линейную относительно переменной ε, ее производных порядка не выше третьего и величины $\delta(\tau+\tau_*)$.

В работах [1, 2] показано, что для детонационных волн, близких к волне Чепмена — Жуге, с точностью до членов порядка $\sqrt{\omega}$ включительно течение газа за волной является течением с бегущей волной Римана.

Предполагая, что рассматриваемая детонационная волна ослабевает и асимптотически переходит к режиму Чепмена — Жуге, и пристраивая к фронту пламени течение разрежения в виде бегущей волны Римана, получаем для ω следующее уравнение:

$$\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dx_f} = -\frac{2}{x_f} \tag{13}$$

интегрируя которое, находим закон изменения величины ω

$$\omega = \omega_0 x_0^2 / x_f^2 \tag{14}$$

Для того чтобы получить уравнение для ε, воспользуемся формулой, связывающей положение фронтов

$$x_f(\tau + \tau_*) = x_s(\tau) + \int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_*} u(t, \tau)\, dt \tag{15}$$

Продифференцировав это соотношение по τ, получим

$$D_f(\tau + \tau_*) - D_s(\tau) = \{u(\tau + \tau_*, \tau) - D_f(\tau + \tau_*)\}\frac{d\tau_*}{dD_s}\frac{dD_s}{d\tau} + \\ + u(\tau + \tau_*, \tau) - u(\tau, \tau) + \int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_*}\frac{\partial}{\partial\tau}u(t, \tau)\, d\tau \tag{16}$$

Используя точное значение величины ω, а также зависимость (14), приведем (16) к виду

$$A_3\frac{d^3\varepsilon(X)}{dX^3} + A_2\frac{d^2\varepsilon(X)}{dX^2} + A_1\frac{d\varepsilon(X)}{dX} + A_0\varepsilon(X) - \\ - B_1\frac{d\varepsilon(X-1)}{dX} - B_0\varepsilon(X-1) = \frac{C}{(X-1)^2} \tag{17}$$

Здесь $(X - 1)$ — безразмерное расстояние фронта пламени от источника инициирования. В качестве характерного размера взят путь, который проходит детонационная волна Чепмена — Жуге за соответствующее время задержки воспламенения.

Коэффициенты A_i, B_i, C зависят от параметров γ, M_J и задаются формулами

$$\begin{aligned}
&A_0 = 2(2\gamma\varkappa + 1), \qquad \varkappa = \frac{\gamma-1}{3\gamma-1}\left(1 + \frac{3-\gamma}{3\gamma-1}\frac{1}{M_J^2}\right)^{-1} \\
&A_1 = \varkappa\,[2\gamma(1 + M_J^{-2}) + \alpha(\gamma-1)(3 + M_J^{-2})] + 1 + M_J^{-2} \\
&A_2 = \alpha\varkappa(\gamma-1)(2 + M_J^{-2}), \qquad A_3 = {}^1/_6\,\alpha\varkappa(\gamma-1)(1 + M_J^{-2}) \\
&B_0 = A_0 - \varkappa\gamma\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1 + \frac{1}{M_J^2}\right) \\
&B_1 = 1 + \frac{1}{M_J^2} - \gamma D_J\left(\frac{d\ln\tau_*}{dD_s}\right)_{D_J} \\
&C = \frac{\varkappa}{2\alpha}\gamma\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\omega_0 x_0^2}{\tau_*(D_J)^2 D_J^2}
\end{aligned} \tag{18}$$

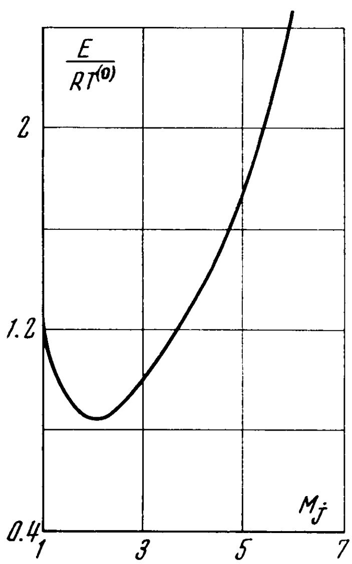
Уравнение для ε является линейным неоднородным дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом. Любое его решение можно представить в виде суммы решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения.

Операционным методом можно показать, что частное решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными данными стремится к нулю при $X \to \infty$.

Рассмотрим теперь однородное уравнение, соответствующее неоднородному. Будем искать решение в виде $\varepsilon(X) = \exp(\Omega X)$. Подставляя это выражение в уравнение (17), для определения Ω получаем характеристическое уравнение

$$L(\Omega) \equiv A_0 + A_1\Omega + A_2\Omega^2 + A_3\Omega^3 - (B_0 + B_1\Omega)e^{-\Omega} = 0 \tag{19}$$

В плоскости комплексного переменного Ω функция $L(\Omega)$ имеет бесчисленное множество корней Ω_ν. Произвольные (сходящиеся) линейные комбинации решений вида $\exp(\Omega_\nu X)$ дают общее решение однородного уравнения. Если все Ω_ν имеют отрицательную действительную часть, то решение, соответствующее совершенно произвольным начальным данным, стремится к нулю при $X \to \infty$. В свою очередь это означает, что детонационная волна переходит к режиму Чепмена — Жуге. Если хотя бы один из корней $L(\Omega)$ имеет положительную действительную часть, то волна неустойчива и переход не возможен.



Таким образом, приходим к задаче отыскания условия, при выполнении которого все корни функции $L(\Omega)$ находятся в левой незамкнутой полуплоскости комплексного переменного Ω (задача Гурвица). Применяя теорию аналитических функций [9, 10], путем довольно сложных алгебраических преобразований можно получить необходимое и достаточное условие положительного решения задачи Гурвица в виде

$$D_J\left(\frac{d\tau_*}{dD_s}\right)_{D_J} + \theta(\gamma, M_J)\,\tau_*(D_J) > 0$$

$$\theta(\gamma, M_J) = \frac{\gamma-1}{3\gamma-1+(3-\gamma)M_J^{-2}}\left[2\left(1 + \frac{1}{M_J^2}\right) + \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(3 + \frac{1}{M_J^2}\right)\left(1 + \frac{2}{\gamma-1}\,\frac{1}{M_J^2}\right) - \frac{1}{6}\,\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\frac{(1+M_J^{-2})^2}{2+M_J^{-2}}\right] \tag{20}$$

При выполнении обратного неравенства появляются корни с неотрицательной вещественной частью, и детонационная волна в этом случае является неустойчивой.

Если взять для времени задержки воспламенения зависимость

$$\tau_* = kp_s^{1-m}\exp(E / RT_s) \tag{21}$$

где k — размерная постоянная, m — порядок реакции, E — энергия активации, R — газовая постоянная, T_s — температура газа на ударной волне, то критерий неустойчивости будет

$$1 - m + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\,\frac{1}{M_J^2}\right)\theta(\gamma, M_J)\,\frac{E}{RT_J}\,\frac{1 + M_J^{-4}/\gamma}{1 + 2M_J^{-2}/(\gamma-1)} \leqslant 0 \tag{22}$$

Для реакций второго порядка и выше неравенство (22) выполняется автоматически.

Для реакций первого порядка оно также выполняется практически для всех случаев ввиду того, что детонирующие смеси обладают большой энергией активации (фигура).

Поступило 7 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Асимптотический закон распространения плоской детонационной волны. Докл. АН СССР, 1967, т. 172, № 3.
2. Левин В. А., Черный Г. Г. Асимптотические законы поведения детонационных волн. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
3. Левин В. А. О переходе плоской пересжатой детонационной волны к режиму Чемпена — Жуге. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 2.
4. Черный Г. Г. Возникновение колебаний при ослаблении волн детонации. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
5. Зайдель Р. М., Зельдович Я. Б. Одномерная неустойчивость и затухание детонации. ПМТФ, 1963, № 6.
6. Strehlow R. A., Hartung W. E. On the early relaxation of an over-driven detonation wave. Combustion and Flame, 1965, vol. 9, No. 4.
7. Медведев С. А. Об ослаблении пересжатых детонационных волн с конечной скоростью реакции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
8. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
9. Понтрягин Л. С. О пулях некоторых элементарных функций. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1942, т. 6.
10. Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н. Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 26. М., Изд-во АН СССР, 1949.