

УДК 533.6.011.6

ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ЧИСЛЕННЫХ И АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ БОЛЬШИХ ВДУВАХ

Э. А. ГЕРШБЕИН

(Москва)

Рассматриваются автомоделные решения уравнений ламинарного многокомпонентного изотермического пограничного слоя при интенсивных вдувах. Приводятся асимптотические профили скоростей и толщина пограничного слоя для различных отрицательных градиентов давления ($\beta > 0$). Приводится численное решение уравнений пограничного слоя при вдуве с обтекаемой поверхности смеси газов, состоящей из водорода, азота и углекислого газа. Асимптотическое решение сравнивается с численным и устанавливаются области его применимости. Ранее автомоделные решения уравнений пограничного слоя при больших вдувах исследовались в работах [1-4], неавтомоделные — в работах [4, 5]. В работе [6] были получены асимптотические и численные профили скоростей при течении газа в ударном слое в окрестности сферического ($\beta = 1/2$) и цилиндрического ($\beta = 1$) притупления.

1. Автомоделные уравнения многокомпонентного изотермического пограничного слоя в переменных Дороднищина — Лиза

$$\xi = \int_0^x \mu_e \rho_e u_e r^{2k} dx, \quad \eta = \frac{u_e r^k}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy$$

имеют следующий вид:

$$(lf')' + ff'' + \beta(\rho_e/\rho - f'^2) = 0, \quad X_i' + fc_i' = 0 \quad (i=1, \dots, n-1)$$

$$l(C_i m)' = \sum_{j=1}^n \frac{m^2}{m_j} S_{ij} (C_i X_j - C_j X_i) \quad (i=1, \dots, n-1)$$

$$C_1 + \dots + C_n = 1, \quad X_1 + \dots + X_n = 0$$

Здесь

$$\rho v = -r^k (f \xi_x' + 2\xi \eta_x') (2\xi)^{-1/2}$$

$$f' = \frac{u}{u_e}, \quad X_i = \frac{r^k \sqrt{2\xi}}{\xi_x'} I_i, \quad l = \frac{\mu \rho}{\mu_e \rho_e}, \quad \beta = \frac{2\xi}{u_e} \frac{du_e}{dx}$$

Здесь x, y — координаты, направленные вдоль поверхности тела и по нормали к ней; u и v — составляющие скорости в направлении этих координат; r — расстояние до оси симметрии тела; $k = 0$ для плоскопараллельного течения; $k = 1$ для осесимметричного течения; ρ, μ, m — плотность, вязкость и молекулярный вес газа, состоящего из n химических компонент; C_i и I_i — массовая концентрация и массовый диффузионный поток i -й компоненты; S_{ij} — бинарное число Шмидта; штрих означает дифференцирование по η ; индекс e — внешняя граница пограничного слоя.

Система уравнений (1.1) решается при следующих граничных условиях:

$$f' \rightarrow 1, \quad C_i \rightarrow C_{ie} \quad (i=1, \dots, n-1) \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

$$f = -\alpha, \quad f' = 0, \quad f(C_i - C_i^{(1)}) - X_i = 0 \quad (i=1, \dots, n-1) \quad \text{при } \eta = 0$$

Здесь $C_i^{(1)}$ — массовая концентрация i -й компоненты во вдуваемых газах. Предполагается, что $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $C_i^{(1)}$ — постоянные величины.

2. Рассмотрим сначала асимптотическое решение уравнений (1.1) при больших значениях параметра вдува

$$\alpha = \frac{(\rho v)_w \sqrt{2\xi} r^k}{\xi_x'} \quad (w - \text{поверхность тела})$$

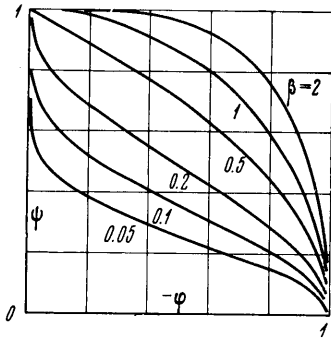
Можно показать [2-5], что при больших значениях параметра α система уравнений (1.1) около поверхности тела в первом приближении сводится к системе уравнений ($\varphi = f/\alpha$)

$$\varphi\varphi'' + \beta(\rho_e/\rho - \varphi'^2) = 0, \quad C_i' = 0 \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (2.1)$$

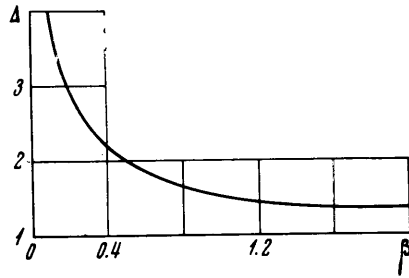
с граничными условиями ($\zeta = \eta/\alpha$)

$$\varphi = -1, \quad \varphi' = 0, \quad C_i = C_i^{(1)} \quad (i=1, \dots, n-1) \quad \text{при } \zeta = 0 \quad (2.2)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной ζ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Из второго уравнения (2.1) и граничных условий (2.2) следует, что в области около тела

$$C_i(\zeta) = C_{iw} = C_i^{(1)} \quad (i=1, \dots, n-1) \quad \rho(\zeta) = \rho_w \quad (2.3)$$

Рассмотрим первое уравнение (2.1). Первый интеграл этого уравнения с учетом равенства (2.3) имеет вид

$$|1 - \psi^2| = |C| \cdot |\varphi|^{2\beta}, \quad \psi = (\rho_w/\rho_e)^{1/2} \varphi' \quad (2.4)$$

Вид интегральных кривых, соответствующих условиям (2.2), для различных значений параметра β приведен на фиг. 1. Точки $(\varphi, \psi) = (0, \pm 1)$ являются особыми точками уравнения (2.1). Вид интегральных кривых, соответствующих другим условиям, приведен в работе [6].

Интегрируя уравнение (2.4) и учитывая условия (2.2), получаем

$$\eta = \alpha \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho_e}} \int_{-1}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - |\varphi|^{2\beta}}} \quad (-1 \leq \varphi \leq 0) \quad (2.5)$$

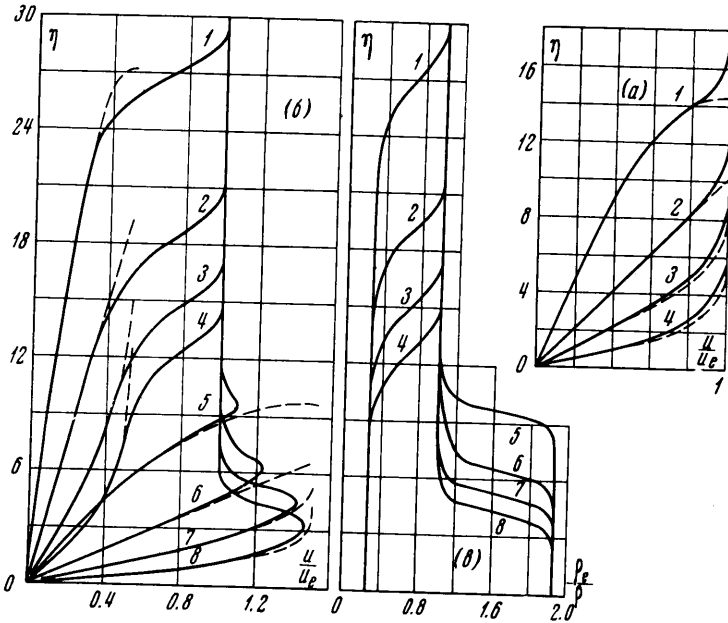
На фиг. 2 приведена зависимость от параметра β толщины η^* внутренней пристеночной области пограничного слоя, определенной как расстояние от $\eta = 0$ до значения η , соответствующего особой точке $(\varphi, \psi) = (0, 1)$, т. е.

$$\eta^* = \alpha \left(\frac{\rho_w}{\rho_e} \right)^{1/2} \Delta, \quad \Delta = \int_{-1}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - |\varphi|^{2\beta}}} \quad (2.6)$$

Профили касательных скоростей u/u_e поперек пограничного слоя приведены (пунктирные линии) на фиг. 3, а ($\rho = \rho_e = \rho_w$) и на фиг. 3, б ($\rho_w \neq \rho_e$).

3. Уравнения (1.1) с граничными условиями (1.2) решались численно на ЭЦВМ аналогично работе [4].

Рассматривалось обтекание тела газом, содержащим водород, азот и углекислый газ в различных концентрациях. С поверхности тела в пограничный слой вдувалась аналогичная смесь газов. Параметры вдува и давления менялись в пределах $0 \leq \alpha \leq 30$, $0.1 \leq \beta \leq 2$.



Фиг. 3

Некоторые результаты расчетов при $\alpha = 5$ приведены на фиг. 3. Кривые 1, 2, 3, 4 на фиг. 3, а также кривые 5, 6, 7, 8 на фиг. 3, б, в соответствуют значениям параметра $\beta = 0.2, 0.5, 1.0, 2.0$.

На фиг. 3, а приведены касательные скорости u/u_e поперек пограничного слоя, полученные при $\rho = \rho_w = \rho_e$.

На фиг. 3, б приведены аналогичные профили, полученные при $\rho_e/\rho_w = 0.28$ (кривые 1, 2, 3, 4) и при $\rho_e/\rho_w = 2.25$ (кривые 5, 6, 7, 8). Пунктирные линии — асимптотическое решение.

На фиг. 3, в приведены профили плотностей ρ_e/ρ поперек пограничного слоя.

Сравнение асимптотического решения с результатами численного показывает, что при увеличении параметра вдува α от $\alpha = 1$ асимптотические профили скоростей сближаются с профилями скоростей, полученными численно, и при $\alpha \approx 2$ совпадают в окрестности стенки, т. е. начиная с вдувов $\alpha \geq 2$, коэффициенты трения на поверхности тела, подсчитанные по асимптотическим формулам [4] и численно, практически совпадают. При этом концентрации компонент на поверхности тела становятся приблизительно равными концентрациям компонент во вдуваемых газах $C_{iw} \approx C_i^{(4)}$.

При дальнейшем увеличении параметра вдува область, в которой концентрации компонент $C_i \approx C_i^{(4)}$ увеличивается. Профили скоростей, по-

лученные численно, совпадают в этой области с асимптотическими профилями скоростей. Интересно отметить, что при $\beta > 0.5$, $\rho \equiv \rho_e = \rho_w$, $\alpha \gtrsim 7$ профили скоростей практически совпадают поперек всего пограничного слоя.

Институт механики МГУ

Поступило 1 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Libby P. A. The homogeneous boundary layer at an axisymmetric stagnation point with large rates of injection. *J. Aero/Space Sci.*, 1962, vol. 29, No. 1.
2. Acrivos A. The asymptotic form the laminar boundary-layer mass-transfer rate for large interfacial velocities. *J. Fluid Mech.*, 1962, vol. 12, No. 3.
3. Kubota T., Fernandez F. L. Boundary-layer with large injection and heat transfer. *AIAA Journal*, 1968, vol. 6, No. 1.
4. Гершбейн Э. А. Ламинарный многокомпонентный пограничный слой при больших вдувах. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1970, № 1.
5. Филимонов В. Н. Асимптотическое решение уравнений несжимаемого пограничного слоя с отрицательным градиентом давления при больших вдувах. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1967, № 5.
6. Гершбейн Э. А., Тирский Г. А. Течение вязкого теплопроводного многокомпонентного газа в ударном слое в окрестности притупления при интенсивных вдувах. *Научн. тр. Ин-та механ. МГУ*, 1970, № 1.