

УДК 532.526.74

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА СЕГМЕНТАЛЬНОМ ТЕЛЕ ПРИ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Г. Н. АНДРЕЕВ, Ю. Д. ШЕВЕЛЕВ

(Москва)

В работе рассмотрены вопросы, связанные с расчетом пространственного пограничного слоя, возникающего при сверхзвуковом обтекании тел сегментальной формы. Решение найдено с помощью конечно-разностного метода, предложенного одним из авторов [1, 2]. Сильное локальное изменение кривизны профиля в окрестности сопряжения сферы и обратного конуса приводит к необходимости выделять три различных области течения газа: течение на сфере, течение в области сильного локального изменения кривизны профиля, течение на поверхности обратного конуса, и в соответствии с этим строить криволинейную расчетную сетку на поверхности тела. Разностные уравнения, аппроксимирующие исходную систему дифференциальных уравнений, записаны для случая произвольных, неравноотстоящих узлов пространственной сетки.

Расчетные данные приведены для величин сопротивления трения на теле, потоков тепла к телу в случае, когда $M_\infty = \infty$, угол атаки $\alpha \sim 15-30^\circ$. Угол обратного конуса β^* равен 30° . Принят линейный закон изменения вязкости в зависимости от температуры. Газ совершенный ($\gamma = 1.4$). Число Прандтля равно единице. Температура стенки задана.

1. Рассмотрим произвольное гладкое пространственное тело в сверхзвуковом потоке газа. Уравнения, которые описывают течение газа в трехмерном ламинарном пограничном слое в случае произвольной криволинейной системы координат, нормально связанной с поверхностью, имеют вид

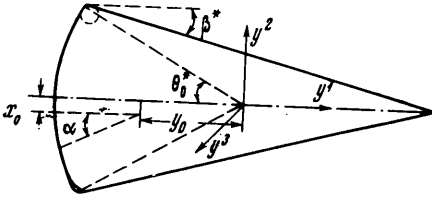
$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} + v \frac{\partial u}{\partial \zeta} + A_1 u^2 + A_2 \omega^2 + A_3 u \omega &= \\ &= A_4 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0 \\ \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + v \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} + B_1 u^2 + B_2 \omega^2 + B_3 u \omega &= \\ &= B_4 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho \left(\frac{g}{g_{11}} \right)^{1/2} u \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho \left(\frac{g}{g_{22}} \right)^{1/2} \omega \right) + \sqrt{g} \frac{\partial \rho v}{\partial \zeta} &= 0 \quad (1.1) \\ \frac{\rho u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\rho \omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial H}{\partial \eta} + \rho v \frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{\mu}{\sigma} \left[\frac{\partial H}{\partial \zeta} + (\sigma - 1) \frac{\partial U^2}{\partial \zeta} \right] \right\} &\text{или} \\ \rho c_p \left(\frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial T}{\partial \eta} + v \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) + \\ + \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right)^2 + 2 \cos \psi_0 \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right] \\ \cos \psi_0 = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}, \quad g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \end{aligned}$$

Первые три уравнения — уравнения количества движения в проекциях на оси координат ξ , ζ , η , полученные при обычных предположениях об анизотропии пограничного слоя в направлении, нормальном к поверхности тела. Далее следует уравнение неразрывности, уравнение для полной энтальпии и уравнение баланса энергии. Система уравнений замыкается уравнением состояния $-p = \rho RT$. Произвольные криволинейные координаты ξ и η выбираются на поверхности тела, а координата ζ направлена по нормали к телу; u , ω , v — составляющие скорости соответственно в направлениях ξ , η и ζ ; p , ρ , H , T обозначают соответственно давление, плотность, полную энтальпию и температуру газа; μ и k — коэффициенты вязкости и теплопроводности; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; σ — число Прандтля; ψ_0 — угол между координатными линиями ξ и η на поверхности тела. Метрические коэффициенты g_{11} , g_{22} , g_{12} ($g_{12} \neq 0$) определяются как обычно. Выражения для коэффициентов A_1 , A_2 , A_3 , B_1 , B_2 , B_3 приведены в работе [1].

Для системы уравнений (1.1) выберем следующие граничные условия:

$$u = \omega = v = 0, H = H_0 \text{ или} \\ T = T_0 \text{ при } \zeta = 0 \quad (1.2)$$

$$u \rightarrow u_e, \omega \rightarrow \omega_e, H \rightarrow H_e = \text{const} \\ \text{или } T \rightarrow T_e \text{ при } \zeta \rightarrow \infty$$



Фиг. 1

На внешней границе пограничного слоя выполняются соотношения

$$\frac{u_e}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u_e}{\partial \xi} + \frac{\omega_e}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial u_e}{\partial \eta} + A_1 u_e^2 + A_2 \omega_e^2 + A_3 u_e \omega_e = A_4 \\ \frac{u_e}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \omega_e}{\partial \xi} + \frac{\omega_e}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \omega_e}{\partial \eta} + B_1 u_e^2 + B_2 \omega_e^2 + B_3 u_e \omega_e = B_4 \\ \rho_e c_p \left(\frac{u_e}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial T_e}{\partial \xi} + \frac{\omega_e}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial T_e}{\partial \eta} \right) = \frac{u_e}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\omega_e}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial p}{\partial \eta} \text{ или } H = H_e = \text{const}$$

2. Рассмотрим тело, передняя часть которого — сфера, а боковая — обратный конус (фиг. 1).

Контур тела аппроксимируется аналитическим выражением

$$R_0^m + \frac{1}{\beta^{*m}} \left(\text{arc tg } \frac{R_0 \sin \theta_0^*}{R_0 \cos \theta_0^* + l} \right)^m = 1, \quad l = \frac{\sin(\theta_0^* - \beta^*)}{\sin \beta^*}$$

Это уравнение задает поверхность сегментального тела в сферической системе координат с центром, расположенным в центре лобовой сферической поверхности. В зависимости от показателя m радиус скругления в окрестности сопряжения сферы и конуса можно сделать достаточно малым. При $m \sim 40$ минимальный радиус скругления составляет $\delta \sim \sim (0.02 - 0.03)D$, где D — диаметр сферы.

При выводе уравнений пространственного пограничного слоя обычно делается предположение о том, что радиус кривизны профиля обтекаемого тела имеет такой же порядок, что и характерная длина тела. При резком изменении кривизны профиля, а также при наличии разрыва кривизны уравнения Прандтля, по крайней мере в окрестности точки сильного изменения кривизны, могут стать слишком грубым приближением

при малых, но конечных числах $1/\sqrt{\text{Re}}$. Поэтому дальнейшее увеличение числа m может привести к тому, что в трехмерных уравнениях газовой динамики и пограничного слоя необходимо будет учитывать характер изменения кривизны профиля и строить в окрестности сильного локального изменения кривизны асимптотические разложения, учитывающие этот характер подобно тому, как это сделано для двумерного случая в работе [3].

Параметры внешнего течения для рассматриваемой формы тел известны из работ [4-6]. Результаты получены в сферической системе координат, центр которой сдвинут так, как показано на фиг. 1. Координаты θ и ψ определяют на поверхности тела неортогональную криволинейную систему координат $\theta = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$. Параметры течения, отнесенные к характерным величинам ρ_∞ , V_{max} , заданы в безразмерном виде. Окончательно результаты аппроксимируются на поверхности тела выражениями

$$f = \sum_{j=0}^3 f_j^{00} \cos j\psi \quad (f = p, \rho, u, v)$$

Для поперечной составляющей скорости имеем

$$w = w_1^{00} \sin \psi + w_2^{00} \sin 2\psi$$

Причем величины f_j^{00} и w_j^{00} — известные функции угла θ .

Введем новую систему координат на поверхности тела, связанную с критической точкой

$$\begin{aligned} y^1 &= -R(\cos \xi^* \cos \alpha - \sin \xi^* \sin \alpha \cos \eta^*) - x_0 \\ y^2 &= -R(\cos \xi^* \sin \alpha + \sin \xi^* \cos \alpha \cos \eta^*) - y_0 \\ y^3 &= R \sin \xi^* \sin \eta^* \end{aligned}$$

Здесь x_0, y_0 — положение центра системы координат, используемой в расчетах [5]. Нетрудно заметить, что новая система координат ξ^*, η^* на поверхности получена из старой системы θ, ψ путем поворота на угол α и изменения направления отсчета, причем α — угол, связанный с критической точкой.

Вычислим метрические коэффициенты в новой системе координат. Получим

$$\begin{aligned} g_{11}^* &= R^2 + R_{\xi^*}^2, \quad g_{12}^* = R_{\xi^*} R_{\eta^*}, \quad g_{22} = R^2 \sin^2 \xi^* + R_{\eta^*}^2 \\ g^* &= R^2 [R^2 + R_{\xi^*}^2 + (R_{\eta^*} / \sin \xi^*)^2] \sin^2 \xi^* \end{aligned}$$

Заметим, что метрические коэффициенты инвариантны относительно преобразований переноса и поворота. В рассматриваемом случае удобнее ввести еще одно преобразование, переводящее область резкого изменения параметров в область $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ преобразованием

$$\xi = \frac{\xi^*}{1 + c\eta^{*2}}, \quad \eta = \eta^*$$

где ξ_1 и ξ_2 — сравнительно небольшая область. Метрические коэффициенты преобразуются по формулам

$$g_{\alpha\beta} = g_{\gamma\delta}^* \frac{\partial x^{*\gamma}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{*\delta}}{\partial x^\beta}$$

В новой системе координат метрические коэффициенты запишутся следующим образом:

$$g_{11} = R^2(1 + c\eta^2)^2 + R_\xi^2, \quad g_{12} = 2R^2(1 + c\eta^2)c\xi\eta + R_\xi R_\eta$$

$$g_{22} = \sin^2\xi^* [R^2(1 + 4c^2\eta^2\xi^{*2} / \sin^2\xi^*) + R_\eta^2 / \sin^2\xi^*], \quad g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$

Компоненты скорости u_e , ω_e в системе координат ξ^* , η^* выражаются через составляющие скорости u_x , u_y , u_z прямоугольной системы координат следующим образом:

$$u_e^* = \sqrt{g_{11}^*} \left(g^{*11} \left(\frac{\partial y^1}{\partial \xi^*} u_x + \frac{\partial y^2}{\partial \xi^*} u_y + \frac{\partial y^3}{\partial \xi^*} u_z \right) + \right.$$

$$\left. + g^{*12} \left(\frac{\partial y^1}{\partial \eta^*} u_x + \frac{\partial y^2}{\partial \eta^*} u_y + \frac{\partial y^3}{\partial \eta^*} u_z \right) \right)$$

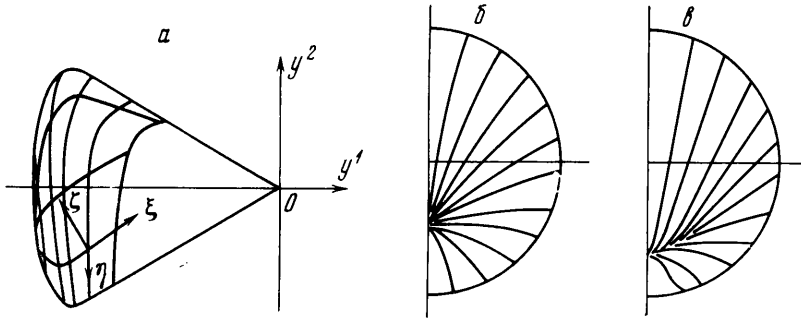
$$\omega_e^* = \sqrt{g_{22}^*} \left(g^{*12} \left(\frac{\partial y^1}{\partial \xi^*} u_x + \frac{\partial y^2}{\partial \xi^*} u_y + \frac{\partial y^3}{\partial \xi^*} u_z \right) + \right.$$

$$\left. + g^{*22} \left(\frac{\partial y^1}{\partial \eta^*} u_x + \frac{\partial y^2}{\partial \eta^*} u_y + \frac{\partial y^3}{\partial \eta^*} u_z \right) \right)$$

Поэтому легко определять параметры внешнего потока в системе координат ξ^* , η^* , выражая u_x , u_y и u_z через известные составляющие скорости в системе координат r , θ и ψ . При переходе от системы координат ξ^* и η^* к системе координат ξ и η составляющие скорости меняются по такому закону:

$$u_e = \left(\frac{g_{11}}{g_{11}^*} \right)^{1/2} \frac{u_e^*}{1 + c\eta^{*2}} - \left(\frac{g_{11}}{g_{22}^*} \right)^{1/2} \frac{2c\xi\eta}{1 + c\eta^{*2}} \omega_e^*, \quad \omega_e = \left(\frac{g_{22}}{g_{22}^*} \right)^{1/2} \omega_e^*$$

Если в системе координат ξ^* и η^* составляющие скорости при $\xi^* = \eta^* = 0$ были $u_e^* \sim \xi^*$, $\omega_e^* \sim \xi^*\eta^*$, то после перехода к новой системе координат, очевидно, имеем $u_e \sim \xi$ и $\omega_e \sim \xi\eta$.



Фиг. 2

Поведение линий тока в окрестности пространственной критической точки и характер особенности для тел сегментальной формы показывает [4], что течение в окрестности критической точки существенно трехмерно и сильно зависит от угла атаки (фиг. 2). При нулевом угле атаки картина течения будет симметричной. При угле атаки $\sim 15^\circ$ картина растекания напоминает дикритический узел (фиг. 2, б). По мере увеличения угла атаки линии тока внешнего течения приближаются к общей касательной, перпендикулярной к плоскости симметрии, а картина растекания напоминает узел (фиг. 2, в).

3. Как показано в работе [2], система уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2) может быть сведена к виду

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(l \frac{\partial E}{\partial \lambda} \right) &= K \frac{\partial E}{\partial \lambda} + N_1^* (E^2 - F) + N_2^* G^2 + N_3^* EG + N_4^* E \frac{\partial E}{\partial \xi} + \\
&\quad + N_5^* (G + \varphi E) \frac{\partial E}{\partial \eta} \\
\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(l \frac{\partial G}{\partial \lambda} \right) &= K \frac{\partial G}{\partial \lambda} + M_1^* (E^2 - F) + M_2^* G^2 + M_3^* EG + N_4^* E \frac{\partial G}{\partial \xi} + \\
&\quad + N_5^* (G + \varphi E) \frac{\partial G}{\partial \eta} \tag{3.1} \\
\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{l}{\sigma} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) &= K \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{1 - \sigma}{\sigma} \frac{l}{k} \frac{\partial}{\partial \lambda} [E^2 + \beta^2 (G + \varphi E)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2\beta \cos \psi_0 (G + \varphi E) E] \right\} + N_4^* E \frac{\partial R}{\partial \xi} + N_5^* (G + \varphi E) \frac{\partial R}{\partial \eta} \text{ или} \\
\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{l}{\sigma} \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right) &= K \frac{\partial F}{\partial \lambda} + Q_1 F (E - 1) + Q_2 F (G + \varphi (E - 1)) + \\
+ lk \left\{ \left(\frac{\partial E}{\partial \lambda} \right)^2 + \beta^2 \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (G + \varphi E) \right]^2 + 2 \cos \psi_0 \frac{\partial E}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} (G + \varphi E) \right\} &+ N_4^* E \frac{\partial F}{\partial \xi} + \\
&\quad + N_5^* (G + \varphi E) \frac{\partial F}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

Уравнение неразрывности имеет такой вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial \lambda} &= -P_1^* E - P_2^* G - P_3^* \frac{\partial E}{\partial \xi} - P_4^* \frac{\partial G}{\partial \eta} - \varphi P_4^* \frac{\partial E}{\partial \eta} \\
F = \frac{T}{T_e} = \frac{\rho_e}{\rho} &= 1 + (R - 1)(p_1 + 1) - p_1 \left(\frac{U^2}{U_e^2} - 1 \right), \quad R = \frac{H}{H_e} \\
p_1 &= \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2, \quad U^2 = u_e^2 [E^2 + \beta^2 (G + \varphi E)^2 + 2\beta \cos \psi_0 E (G + \varphi E)] \\
U_e^2 &= u_e^2 [1 + \beta^2 \varphi^2 + 2\beta \varphi \cos \psi_0], \quad k = \frac{1}{2} (1 + 2\beta \varphi \cos \psi_0 + \beta^2 \varphi^2) \frac{1 + p_1}{p_1} \\
l &= \frac{\mu \rho}{\mu_e \rho_e}, \quad Q_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial \xi}, \quad Q_2 = \frac{\alpha \beta}{\sqrt{g_{22}}} \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

Граничные условия перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
E = G = K = 0, \quad R = R_0 \text{ или } F = F_0 \text{ при } \lambda = 0 \tag{3.2} \\
E \rightarrow 1, \quad G \rightarrow 0, \quad R \rightarrow 1 \text{ или } F \rightarrow 1 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Вид коэффициентов P_1^* , P_2^* , N_1^* , N_2^* , N_3^* , M_1^* , M_2^* , M_3^* приведен в работе [2].

В дальнейшем будем рассматривать простейший случай, когда $\mu \rho \sim \mu_e \rho_e$ и $\sigma = 1$. Можно показать, что предельный переход при $\xi \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow 0$ в уравнениях (3.1), (3.2) дает то же решение, что и первый член при отыскании решения в виде ряда. Система уравнений (3.1) такова, что при $\xi = \eta = 0$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых легко находится и служит далее начальными данными для расчета следующей точки на линии растекания, а затем во всей области вблизи окрестности особой точки.

Введем неравномерную разностную сетку ζ_l , ξ_m , η_n , где $l = 0, 1, \dots, L$, $m = 0, 1, \dots, M$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, сгущающую точки в области больших градиентов. Заменяем вторую и первую производные по ξ следующим

разностными отношениями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \gamma_{1,l} u_{l+1,m,n} + \gamma_{2,l} u_{l,m,n} + \gamma_{3,l} u_{l-1,m,n}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \delta_{1,l} u_{l+1,m,n} + \delta_{2,l} u_{l,m,n} + \delta_{3,l} u_{l-1,m,n}$$

Здесь

$$\gamma_{1,l} = \frac{2}{(\xi_{l+1} - \xi_l)(\xi_{l+1} - \xi_{l-1})}, \quad \gamma_{2,l} = -\frac{2}{(\xi_l - \xi_{l-1})(\xi_{l+1} - \xi_l)}$$

$$\gamma_{3,l} = \frac{2}{(\xi_l - \xi_{l-1})(\xi_{l+1} - \xi_{l-1})}, \quad \delta_{1,l} = \frac{\xi_l - \xi_{l-1}}{(\xi_{l+1} - \xi_l)(\xi_{l+1} - \xi_{l-1})}$$

$$\delta_{2,l} = \frac{\xi_{l+1} + \xi_{l-1} - 2\xi_l}{(\xi_l - \xi_{l-1})(\xi_{l+1} - \xi_l)}, \quad \delta_{3,l} = -\frac{\xi_{l+1} - \xi_l}{(\xi_l - \xi_{l-1})(\xi_{l+1} - \xi_{l-1})}$$

Производные по ξ и по η заменяются односторонними разностными отношениями

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \alpha_{1,m} u_{l,m,n} + \alpha_{2,m} u_{l,m-1,n} + \alpha_{3,m} u_{l,m-2,n}$$

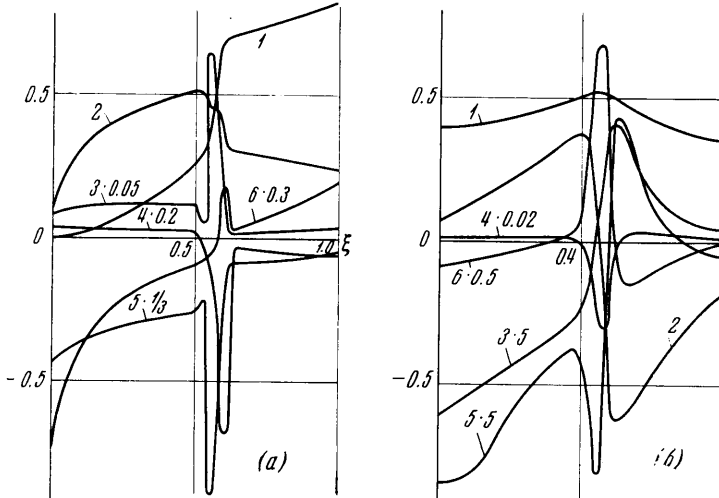
$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \beta_{1,n} u_{l,m,n} + \beta_{2,n} u_{l,m,n-1} + \beta_{3,n} u_{l,m,n-2},$$

где

$$\alpha_{1,m} = \frac{(\xi_m - \xi_{m-1}) + (\xi_m - \xi_{m-2})}{(\xi_m - \xi_{m-2})(\xi_m - \xi_{m-1})}, \quad \alpha_{2,m} = -\frac{\xi_m - \xi_{m-2}}{(\xi_{m-1} - \xi_{m-2})(\xi_m - \xi_{m-1})}$$

$$\alpha_{3,m} = \frac{\xi_m - \xi_{m-1}}{(\xi_m - \xi_{m-2})(\xi_{m-1} - \xi_{m-2})}, \quad \beta_{1,n} = \frac{(\eta_n - \eta_{n-1}) + (\eta_n - \eta_{n-2})}{(\eta_n - \eta_{n-2})(\eta_n - \eta_{n-1})}$$

$$\beta_{2,n} = -\frac{\eta_n - \eta_{n-2}}{(\eta_{n-1} - \eta_{n-2})(\eta_n - \eta_{n-1})}, \quad \beta_{3,n} = \frac{\eta_n - \eta_{n-1}}{(\eta_n - \eta_{n-2})(\eta_{n-1} - \eta_{n-2})}$$

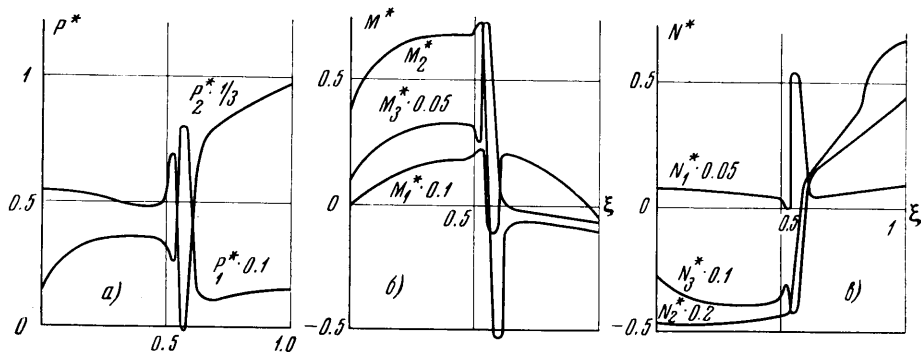


Фиг. 3

Нетрудно проверить, что для случая равноотстоящих узлов разностная аппроксимация дает второй порядок точности по всем независимым переменным ξ , η и ζ . Коэффициенты, которые входят в уравнения (3.1), вычисляются в точке l , ξ_m , η_n . Система уравнений (3.1) с граничными

условиями (3.2) решается методом скалярных прогонок с итерациями. Задавая решение с предыдущей итерации, находим $K_{l,m,n}^{(k)}$ из уравнения неразрывности. Затем находим новые значения $E_{l,m,n}^{(k)}$, $G_{l,m,n}^{(k)}$ и $F_{l,m,n}^{(k)}$. Для сходимости достаточно 5—6 итераций, если решение на предыдущем слое достаточно близко к искомому, при этом граничные условия при $\lambda \rightarrow \infty$ удовлетворяются с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

4. При расчете пространственного пограничного слоя на сегментальном теле криволинейная сетка на поверхности тела строится так, как показано на фиг. 2, а. В области сильного локального изменения кривизны профиля выбираем большее количество счетных точек.



Фиг. 4

На фиг. 3—5 приведены некоторые результаты расчетов пространственного пограничного слоя на сегментальном теле при угле атаки $\alpha^* = 15^\circ$, $M_\infty = \infty$, $\beta^* = 30^\circ$, $R_0 = 0,5$.

На фиг. 3, а кривые 1—6 дают распределение величин ($\eta = 2/5\pi$) (в скобках указаны масштабные коэффициенты):

кривые	1	2	3 (0.05)	4 (0.2)	5 (1/3)	6 (0.3)
u_e	$\Phi = \frac{\omega_e}{\beta u_e}$	$\frac{\alpha}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \xi}$	$\frac{\alpha}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$	$\frac{\alpha \beta}{\sqrt{g_{22}}} \frac{1}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \eta}$	$\frac{\alpha \beta}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$	

На фиг. 3, б приведено изменение следующих величин ($\eta = 2/5\pi$)

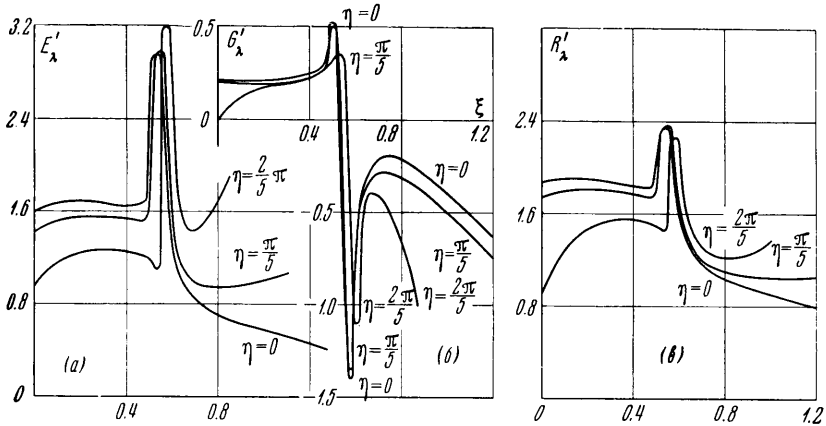
кривые	1	2	3 (5)	4 (0.02)	5 (5)	6 (0.5)
R	R_ξ	$R_\eta^* = R_\eta / \sin \xi \sin \eta$	$R_{\xi\xi}$	$R_{\eta\eta}^* = R_{\eta\eta} / \sin \xi$	$R_{\xi\eta}^* = R_{\xi\eta} / \sin \eta$	

При помощи этих величин и значений величин, приведенных на фиг. 3, а вычисляются коэффициенты P_1^* , P_2^* , N_1^* , N_2^* , N_3^* , M_1^* , M_2^* , M_3^* , которые непосредственно входят в систему уравнений (3.1). Характер изменения этих величин показан на фиг. 4, а, б, в.

На фиг. 5, а показано изменение величины $E_{\lambda=0}'$, пропорциональной изменению продольной составляющей трения на стенке, при $\eta = 0$, $\eta = 1/5\pi$, $\eta = 2/5\pi$.

Резкое возрастание трения в окрестности сопряжения сферы с конусом связано с разгоном внешнего потока и уменьшением толщины пограничного слоя. Максимальное значение величины $E_{\lambda=0}'$ достигается внутри области $0 < \eta < \pi$. Это связано с тем, что градиенты внешнего течения внутри области больше, чем в плоскостях симметрии. Если рассматривать профили скорости вдоль линии тока внешнего течения, то оказывается, что при переходе через скругление поперечная потоку скорость резко увеличивается. Изменение величины $G_{\lambda=0}'$, пропорциональной изменению по-

перечной составляющей трения на стенке, показано на фиг. 5, б. Величина $R_{\lambda=0}'$, пропорциональная величине теплового потока, тоже резко увеличивается в окрестности сильного изменения кривизны профиля (фиг. 5, в).



Фиг. 5

В процессе вычислений найдены толщины вытеснения, угол между координатными линиями ξ и η на поверхности тела

$$\psi_0 = \arcsin \sqrt{g' / g'_{11} g'_{22}}$$

Углы ψ_1 и ψ_2 , образованные соответственно вектором скорости внешнего течения и линией тока на теле с координатной линией $\eta = \text{const}$, вычисляются по формулам

$$\psi_1 = \arcsin \frac{\beta r \sin \psi_0}{1 + \beta r \cos \psi_0}, \quad \psi_2 = \arcsin \frac{\beta r \sin \psi_0}{1 - \beta r \cos \psi_0}, \quad r = \frac{G'_{\lambda=0}}{E'_{\lambda=0}} + \varphi$$

Приводим вычисленные по этим формулам значения ψ_0 , ψ_1 , ψ_2 для ряда значений ξ ($\eta = 2/\pi$)

$\xi =$	0.15	0.30	0.45	0.50	0.55	0.60	0.70	0.80	0.90
$\psi_0^\circ =$	67.15	67.68	67.27	66.35	60.67	70.23	69.81	59.81	55.76
$\psi_1^\circ =$	19.83	23.42	24.87	24.91	21.32	19.84	17.140	13.48	12.00
$\psi_2^\circ =$	24.63	29.27	31.64	32.42	24.94	-6.73	0.7717	-8.20	-13.91

Резкое изменение кривизны профиля приводит в пространственном пограничном слое к сильному изменению всех параметров.

Поступило 22 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

- Шевелев Ю. Д. Численный расчет пространственного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5, стр. 112—117.
- Шевелев Ю. Д. Численное исследование пространственного пограничного слоя в сжимаемом газе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4, стр. 171—177.
- Булах Б. М. О равномерно точных уравнениях плоского пограничного слоя для тела с резким локальным изменением кривизны его профиля. ПММ, 1967, вып. 5, стр. 804—811.
- Миносцев В. Б., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Исследование картины сверхзвукового пространственного обтекания тела сегментальной формы. Докл. АН СССР, 1968, т. 179, № 4, стр. 304—307.
- Тиняков Г. П. Исследование трехмерного сверхзвукового обтекания эллипсоидов вращения. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 6, стр. 10—19.
- Миносцев В. Б. Метод расчета сверхзвукового трехмерного обтекания гладких тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2, стр. 126—133.