

УДК 533.6.01

О ТОЧЕЧНОМ ВЗРЫВЕ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Л. В. ШУРШАЛОВ

(Москва)

Рассматривается сильный точечный взрыв [1], происходящий на границе полупространства, заполненного совершенным газом с показателем адиабаты γ . Исследуется течение в окрестности точки пересечения ударной волны со свободной поверхностью. Искомые функции разлагаются в ряды по степеням расстояния от рассматриваемой точки. Подстановка этих рядов в основные уравнения дает связь между их коэффициентами. Нулевые члены разложений были получены в [2]. В данной работе находятся первые члены этих разложений.

В отличие от [2] здесь используется цилиндрическая система координат. Рассматриваемая задача является автомодельной [1].

Пусть z — вертикальная, а r — радиальная координаты, t — время, ρ_1 — начальная плотность, E — постоянная, пропорциональная начальной энергии взрыва E_0 .

За характерный размер длины принята величина

$$r_0 = (E\rho_1^{-1}i^2)^{1/(v+2)}$$

где $v = 2, 3$ для взрыва, происходящего вдоль прямой или в точке соответственно. В автомодельных переменных $Z = z/r_0$, $R = r/r_0$ полная система уравнений для данной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} (U - \delta R) \frac{\partial G}{\partial R} + (W - \delta Z) \frac{\partial G}{\partial Z} + G \left(\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{v-2}{R} U + \frac{\partial W}{\partial Z} \right) &= 0 \\ G \left[(U - \delta R) \frac{\partial U}{\partial R} + (W - \delta Z) \frac{\partial U}{\partial Z} + (\delta - 1) U \right] + \frac{\partial P}{\partial R} &= 0 \\ G \left[(U - \delta R) \frac{\partial W}{\partial R} + (W - \delta Z) \frac{\partial W}{\partial Z} + (\delta - 1) W \right] + \frac{\partial P}{\partial Z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (U - \delta R) \frac{\partial P}{\partial R} + (W - \delta Z) \frac{\partial P}{\partial Z} + 2(\delta - 1) P - \\ - \frac{\gamma P}{G} \left[(U - \delta R) \frac{\partial G}{\partial R} + (W - \delta Z) \frac{\partial G}{\partial Z} \right] = 0 \quad \left(\delta = \frac{2}{v+2} \right) \end{aligned}$$

Здесь U, W, G, P — безразмерные компоненты скорости, плотность и давление, связанные с соответствующими размерными величинами по формулам

$$U = \frac{t}{r_0} u, \quad W = \frac{t}{r_0} w, \quad G = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad P = \frac{t^2}{\rho_1 r_0^2} p$$

Искомое решение системы (1) должно удовлетворять следующим граничным условиям:

на ударной волне $Z = Z_2(R)$

$$W_2 = \frac{2\delta}{\gamma+1} \left(Z_2 - R \frac{dZ_2}{dR} \right) \left[1 + \left(\frac{dZ_2}{dR} \right)^2 \right]^{-1} \quad (2)$$

$$U_2 = -W_2 \frac{dZ_2}{dR}, \quad P_2 = \delta \left(Z_2 - R \frac{dZ_2}{dR} \right) W_2, \quad G_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

на свободной поверхности $Z = Z_*(R)$

$$P_* = 0, \quad W_* - U_* \frac{dZ_*}{dR} = \delta \left(Z_* - R \frac{dZ_*}{dR} \right) \quad (3)$$

Индексы 2 и * означают, что соответствующие значения берутся на ударной волне и на свободной поверхности.

После перехода в уравнениях (1) и граничных условиях (2) и (3) к новым переменным s, φ (фиг. 1), определенным по формулам

$$s = [(1 - R)^2 + Z^2]^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = (1 - R) / Z \quad (4)$$

и подстановки в полученные уравнения рядов вида

$$U(s, \varphi) = U_0(\varphi) + U_1(\varphi)s + \dots, \quad G(s, \varphi) = G_0(\varphi) + G_1(\varphi)s + \dots \\ W(s, \varphi) = W_0(\varphi) + W_1(\varphi)s + \dots, \quad P(s, \varphi) = P_0(\varphi) + P_1(\varphi)s + \dots$$

для коэффициентов U_1, W_1, G_1, P_1 получается следующая система дифференциальных уравнений:

$$AG_1' + G_0(U_1' \cos \varphi + W_1' \sin \varphi) = b_1, \quad G_0AW_1' + P_1' \sin \varphi = b_2 \\ G_0AU_1' + P_1' \cos \varphi = b_3, \quad A(P_1' - \gamma P_0 G_0^{-1} G_1') = b_4$$

где

$$b_1 = \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1} BG_1 + G_0(W_1 \cos \varphi - U_1 \sin \varphi) - G_0'(V_1 \sin \varphi + U_1 \cos \varphi) + \\ + (\nu - 2) G_0 U_0 \\ b_2 = \left(1 + \frac{2}{\gamma + 1} \cos^2 \varphi \right) BG_0 U_1 - P_1 \sin \varphi + (\delta - 1) G_0 U_0 - \\ - U_0' (AG_1 + G_0 W_1 \sin \varphi) \\ b_3 = \left(1 + \frac{2}{\gamma + 1} \sin^2 \varphi \right) BG_0 W_1 + P_1 \cos \varphi + (\delta - 1) G_0 W_0 - \\ - W_0' (AG_1 + G_0 U_1 \cos \varphi) \\ b_4 = \frac{3\gamma + 1}{\gamma + 1} BP_1 + A^2 \left[\frac{2}{\gamma} (\delta - 1) G_0 - \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1} BG_1 \right] \quad (6)$$

$$A = (U_0 - \delta) \cos \varphi + W_0 \sin \varphi, \quad B = W_0 \cos \varphi - (U_0 - \delta) \sin \varphi$$

Величины с индексом 0 представляют собой нулевые члены разложений (4), для которых справедливы результаты [2], полученные с использованием сферической системы координат, поскольку нулевые коэффициенты в обеих системах координат с точностью до обозначений одинаковы. Штрих здесь и в дальнейшем означает дифференцирование по переменной φ .

На границах

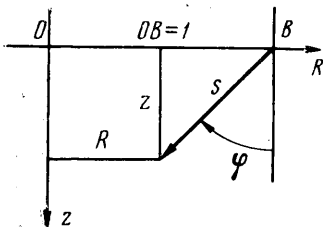
$$U_{12} = -\frac{4\delta}{\gamma + 1} \varphi_{21} \sin 2\varphi_{20}, \quad P_{12} = \delta U_{12} \quad (7)$$

$$W_{12} = \frac{4\delta}{\gamma + 1} \varphi_{21} \cos 2\varphi_{20}, \quad G_{12} = 0$$

$$P_{1*} = 0, \quad U_{1*} \cos \varphi_{*0} + W_{1*} \sin \varphi_{*0} + \\ + 2\gamma B_{*0} \varphi_{*1} / (\gamma + 1) = 0 \quad (8)$$

Здесь $\varphi_{20}, \varphi_{21}, \varphi_{*0}, \varphi_{*1}$ — коэффициенты в разложениях

$$\varphi_2(s) = \varphi_{20} + \varphi_{21}s + \dots, \quad \varphi_*(s) = \varphi_{*0} + \varphi_{*1}s + \dots$$



Фиг. 1

Функции $\varphi_2(s)$ и $\varphi_*(s)$ определяют форму ударной волны и свободной поверхности в переменных s, φ .

Между ударной волной и свободной поверхностью имеется еще одна характерная граница $\varphi = \varphi_r(s)$ — передний фронт волны разрежения, отраженной от свободной поверхности. На этой границе должны выполняться условия непрерывности. Для коэффициентов U_1, W_1, G_1, P_1 это дает

$$\begin{aligned} U_{1r}^- &= U_{1r}^+ + \varphi_{r1} U_0'(\varphi_{r0}^+), & P_{1r}^- &= P_{1r}^+ + \varphi_{r1} P_0'(\varphi_{r0}^+) \\ W_{1r}^- &= W_{1r}^+ + \varphi_{r1} W_0'(\varphi_{r0}^+), & G_{1r}^- &= G_{1r}^+ + \varphi_{r1} G_0'(\varphi_{r0}^+) \\ \varphi_r(s) &= \varphi_{r0} + \varphi_{r1} s + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

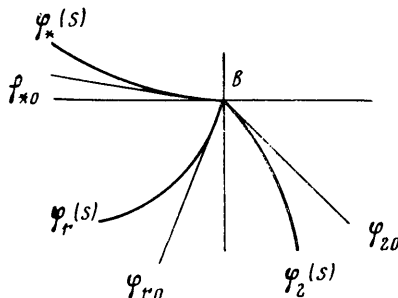
Здесь $\varphi_r(s)$ — уравнение фронта волны разрежения. Индекс r означает, что соответствующие значения берутся на этом фронте; индекс плюс соответствует подходу к этой границе со стороны свободной поверхности, минус — со стороны ударной волны. Производные от U_0, W_0, G_0, P_0 при $\varphi = \varphi_{r0}^-$ в (9) не вошли, так как нулевые коэффициенты в области между ударной волной и передним фронтом волны разрежения не зависят от φ . Геометрия рассматриваемых областей представлена на фиг. 2.

Линия $\varphi_r(s)$ будет характеристикой. Поэтому для φ_{r1} с учетом условий непрерывности (9) получается

$$\begin{aligned} \varphi_{r1} &= \frac{1}{4G_{0r}A_rB_r} \left[\gamma \left(P_{1r}^- - P_{0r} \frac{G_{1r}^-}{G_{0r}} \right) - \right. \\ &\left. - 2G_{0r}A_r(U_{1r}^- \cos \varphi_{r0} + W_{1r}^- \sin \varphi_{r0}) \right] \quad (10) \end{aligned}$$

Из уравнений (5) для производной P_1' имеем

$$\begin{aligned} P_1' &= \frac{1}{(G_0A^2 - \gamma P_0)} [G_0Ab_4 + \\ &+ \gamma P_0(Ab_1 - b_2 \cos \varphi - b_3 \sin \varphi)] \end{aligned}$$



Фиг. 2

В области $\varphi_{r0} \leq \varphi \leq \varphi_{*0}$ знаменатель этого выражения тождественно равен нулю [2]. Так как производная P_1' конечна, то в этой области существует алгебраический интеграл системы уравнений (5), который с учетом (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{3\gamma + 1}{\gamma + 1} BP_1 - A \left\{ \frac{2}{\gamma + 1} ABG_1 + G_0U_1(W_0 - 2U_0') - \right. \\ \left. - G_0W_1(U_0 - \delta + 2W_0') - \right. \\ \left. - G_0 \left[(\nu - 2)AU_0 + (\delta - 1) \left(\frac{2 - \gamma}{\gamma} A - \delta \cos \varphi \right) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

При $\varphi = \varphi_{*0}$ имеем $A = 0$ согласно [2], поэтому с учетом (11) первое из условий (8) на свободной поверхности будет выполняться автоматически. В то же время в рассматриваемом случае имеется еще одно граничное условие на свободной поверхности, заключающееся в том, что не только давление P_* , но и плотность G_* на свободной поверхности равна нулю.

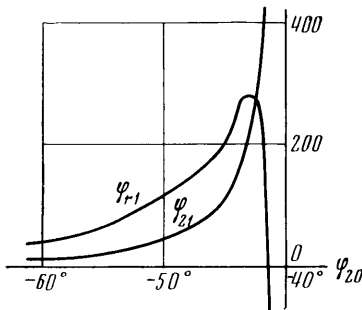
Действительно, после прохождения ударной волны частица газа приобретает новое конечное значение энтропии, равное с точностью до константы $\ln(P_2/G_2^\gamma)$. Это значение должно сохраняться в последующие моменты времени. Если частица попадает на свободную поверхность, то давление в ней становится равным нулю. Для сохранения энтропии необходимо, что-

бы и плотность в такой частице обращалась в нуль. Для коэффициента G_{0*} это условие выполняется автоматически. Для G_{1*} оно дает

$$G_{1*} + \varphi_{*1} G_{0*}' = 0 \quad (12)$$

Будем искать решение системы уравнений (5), удовлетворяющее граничным условиям (7), (8), (12) на ударной волне и свободной поверхности и условиям непрерывности (9) на переднем фронте волны разрежения. Это решение находится численно следующим образом. Область интегрирования линией $\varphi_r(s)$ разбивается на две части. Для $\varphi_{20} \leq \varphi \leq \varphi_{r0}$ коэффициенты U_0, W_0, G_0, P_0 постоянны и равны соответствующим значениям на ударном фронте [2]. В области $\varphi_{r0} \leq \varphi \leq \varphi_{*0}$ одно из уравнений (5), например первое, заменяется алгебраическим интегралом (11), а для коэффициентов U_0, W_0, G_0, P_0 используются разложения по параметру $(\gamma + 1)^{-1}$, предложенные в [2]¹.

Отметим, что в [2] для определения угла наклона ударной волны у свободной поверхности принималось на основе нестрогих рассуждений условие «критичности» отражения ударной волны от свободной поверхности. В общем случае значение этого угла может быть получено после решения полной задачи о сильном точечном взрыве на свободной поверхности. Поэтому на величину угла наклона φ_{20} следует смотреть как на свободный параметр, с точностью до которого определяется асимптотическое решение в окрестности рассматриваемой точки пересечения ударной волны и свободной поверхности. В этом смысле результаты [2] справедливы для значений φ_{20} , при которых отражение ударной волны происходит регулярно.



Фиг. 3

Итак, при фиксированном значении φ_{20} задается значение φ_{21} и по (7) вычисляются значения $U_{12}, W_{12}, P_{12}, G_{12}$. Проводится интегрирование системы уравнений (5) от ударной волны $\varphi = \varphi_{20}$ до переднего фронта волны разрежения $\varphi = \varphi_{r0}$. При помощи формул (9), (10) рассчитываются значения искомых функций при $\varphi = \varphi_{r0}$ и значение φ_{r1} . Затем система уравнений (5) интегрируется от $\varphi = \varphi_{r0}$ до свободной поверхности $\varphi = \varphi_{*0}$. Из условия (8) определяется значение φ_{*1} и проверяется выполнение условия (12). Эта процедура повторяется до тех пор, пока не найдется значение φ_{21} , при котором выполнено условие (12). Полученное таким образом численное решение будет удовлетворять всем поставленным краевым условиям.

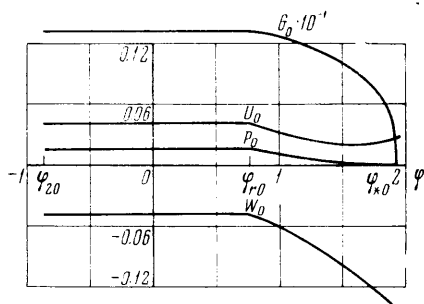
В качестве примера на фиг. 3—5 представлены результаты расчетов, выполненных для $\nu = 3$ и $\gamma = 7$. На фиг. 3 показана зависимость φ_{21} и φ_{r1} от угла наклона ударной волны φ_{20} .

На фиг. 4, 5 в зависимости от φ построены нулевые и первые коэффициенты разложений (4) при фиксированном значении $\varphi_{20} = -50^\circ$. Резуль-

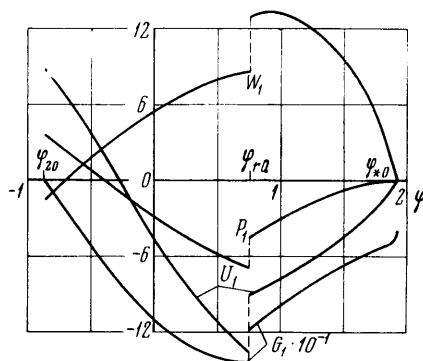
¹ В работе [2] в выражение (21) для $g(\varphi)$ вкралась ошибка в знаке, что привело к небольшой ошибке в последнем столбце приведенной там таблицы. При правильном учете знаков максимальная погрешность приближения первыми тремя членами уменьшается в 2.5 раза. В данной работе использовались четыре члена этих рядов, что обеспечивало максимальную ошибку, не превышающую 0.05%. Для нулевых коэффициентов можно, очевидно, использовать и точные дифференциальные уравнения, приведенные в [2].

таты расчетов показывают, что первые коэффициенты имеют довольно большие значения, особенно при углах отражения, близких к критическому. Значит первые два члена рядов (4) могут представлять собой искомые функции с достаточной точностью лишь в малой окрестности точки пересечения ударной волны со свободной поверхностью.

Проведенный анализ полезен как для лучшего понимания характера отражения сильной ударной волны от свободной поверхности, так и при проведении численных расчетов по решению полной задачи, когда необхо-



Фиг. 4



Фиг. 5

димо выделять окрестность исследованной особой точки. Расчеты для других значений γ и для случая, когда начальная энергия взрыва выделяется не в точке, а вдоль прямой линии, лежащей в плоскости раздела газ — пучота ($\nu = 2$), проводятся аналогично.

Поступило 24 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, Изд. 5. М., «Наука», 1965.
2. Шуршалов Л. В. К задаче о сильном взрыве на границе полупространства, заполненного совершенным газом. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2, стр. 358—363.