

УДК 533.6.011.5:532.526.5 + 533.697 : 621.5.01

## РАСЧЕТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ С ТУРБУЛЕНТНЫМ БЛИЖНИМ СЛЕДОМ ЗА УСТУПОМ

Л. В. ГОГИЩ, Л. В. ЕЛЬНИКОВА

(Москва)

Рассматривается плоское и осесимметричное сверхзвуковое течение за торцом, обтекаемым сверхзвуковой струей. Взаимодействие сверхзвуковой струи и турбулентного следа описывается системой восьми дифференциальных уравнений первого порядка, два из которых относятся к однопараметрическому следу, а остальные описывают течение в квазидномерной невязкой струе. Течение в ближнем следе соответствует особому решению уравнений, проходящему через седловую особую точку — горловину следа [1, 2]. Начальные условия для течения взаимодействия определяются из интегральных условий склеивания этого течения с течением смещения в изобарической донной области.

Результаты расчета удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, полученными путем измерения давлений вдоль следа и на торце, обтекаемом плоской сверхзвуковой струей с  $M_\infty = 2.3$  при степени нерасчетности струи  $n = 0.5 \div 1.0$ , если постоянную турбулентности принять такой же, как и для плоско-го ближнего следа за уступом в неограниченном сверхзвуковом потоке [2].

Интегральные методы теории пограничного слоя успешно применяются для расчета сверхзвуковых течений взаимодействия вязкого, в частности турбулентного, слоя с невязким внешним потоком. Начиная с Крокко и Лиза, физические реализующиеся взаимодействия описываются особым решением исходных уравнений [1, 2].

До сих пор изучались лишь такие взаимодействия, где внешний поток представлял собой одну простую волну, а соответствующее решение получалось одномерным. При наличии заданного (по  $x$ ) скачка или волны разрежения течение взаимодействия может быть двузначным, что приводит к гистерезису и низкочастотным колебаниям [3]. В связи с этим большой интерес представляет взаимодействие следа со свободной сверхзвуковой струей, течение в которой не является простой волной, а сверхзвуковая структура в области взаимодействия заранее неизвестна и определяется в результате решения. Подобное взаимодействие рассматривается ниже, исходя из метода работы [2], обобщенного на случай, когда внешнее течение представляет собой невязкую струю, при помощи квазидномерного способа описания потока в струе.

1. В качестве наиболее простых уравнений, описывающих течение в однопараметрическом турбулентном следе, применяются уравнение импульсов и уравнение движения вдоль оси симметрии слоя

$$(j+1) \frac{d \ln \delta^{**}}{dx} + (2 + H - M^2) \frac{d \ln C}{dx} = 0, \quad (1.1)$$

$$C = \frac{u}{u_{\max}} = M \left( \frac{2}{\gamma - 1} + M^2 \right)^{-1/2}$$

$$\rho_0 u_0 \frac{du_0}{dx} + \frac{dp}{dx} = (j+1) \left( \frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_0 \quad (1.2)$$

Здесь  $j = 0$  в плоском случае,  $j = 1$  в осесимметричном случае;  $C$  — приведенная скорость внешнего потока на границе следа  $\delta(x)$ . Турбулентное касательное напряжение  $\tau$  выражается по формуле Прандтля

$$\tau = \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \nu_t = \kappa (u_\delta - u_0) \delta$$

Индексами  $\delta$  и  $0$  обозначены параметры на границе и на оси симметрии следа. Однопараметрический профиль скорости в следе принимается в виде

$$\frac{u}{u_\delta} = 1 - mf(\eta), \quad m = \frac{u_\delta - u_0}{u_\delta}, \quad f(\eta) = \frac{u_\delta - u}{u_\delta - u_0} = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3$$

В качестве основного параметра взаимодействия внешнего невязкого потока и вязкого следа принимается толщина вытеснения следа  $\delta^*(x)$ , так что поверхность  $y = \delta^*(x)$  будет нижней границей невязкой струи. Тогда, разрешая уравнения (1) и (2) относительно производных от неизвестных функций —  $m(x)$ , фюрпараметра профиля, и  $c(x)$ , приведенной скорости внешнего потока, получаем

$$\frac{dm}{dx} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \frac{d \ln C}{dx} = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad (1.3)$$

$$\text{где } \Delta = \frac{1}{1+j} \frac{\delta^* (1-m)}{(-ax) m^2 (H^*)^{1/2} (2-j)} \left[ \Delta_2 + \frac{m(2-m)}{(1-m)(1-C^2)} \Delta_3 \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{d\delta^*}{dx} \frac{m(2-m)}{(-ax) m^2 (H^*)^{1/2} (2-j) (1-C^2)} + \frac{\partial \ln H}{\partial \ln C} - (2 + H - M^2)$$

$$\Delta_3 = - \left[ \frac{d\delta^*}{dx} \frac{1-m}{(-ax) m^2 (H^*)^{1/2} (2-j)} + \frac{\partial \ln H}{\partial m} \right]$$

$$H^* = \left( \frac{\delta^*}{\delta} \right)^{j+1}, \quad H^{**} = \left( \frac{\delta^{**}}{\delta} \right)^{j+1}, \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$$

Здесь  $(-ax)$  — постоянная турбулентности для ближнего следа. Чтобы замкнуть задачу, необходимо построить дополнительную систему уравнений для невязкой сверхзвуковой струи. Ниже описан приближенный квазиодномерный способ расчета плоских и осесимметричных тонких струй невязкого газа, имеющих малую кривизну.

2. Дифференциальные уравнения движения после осреднения по  $y$  приводятся к обыкновенным по  $x$  и записываются в следующем виде (знаки осреднения опущены, индексы  $0$  и  $1$  относятся к значениям параметров соответственно при  $y = y_0$  и  $y = y_1$ ):

уравнение неразрывности

$$\frac{d}{dx} [(y_1^{j+1} - y_0^{j+1}) \rho u] = 0 \quad (2.1)$$

уравнение импульсов в продольном направлении

$$\frac{d}{dx} [(y_1^{j+1} - y_0^{j+1}) (\rho u^2 + p)] = (j+1) \left( p_1 y_1^j \frac{dy_1}{dx} - p_0 y_0^j \frac{dy_0}{dx} \right) \quad (2.2)$$

уравнение импульсов в поперечном направлении

$$\frac{d}{dx} [\rho u v (y_1^{j+1} - y_0^{j+1})] = (j+1) [(p - p_1) y_1^j - (p - p_0) y_0^j] \quad (2.3)$$

уравнения границ струи

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{v_i}{u} \quad (i = 0, 1) \quad (2.4)$$

Для замыкания системы уравнений средняя величина поперечной составляющей скорости  $v$  связывается с местными значениями поперечной составляющей скорости на границах струи  $v_i$ , исходя из предположения о профиле скорости  $v(y)$ . Наиболее простые уравнения относительно  $v_i(x)$  по сравнению с другими уравнениями равной точности получаются в пред-

положении о ступенчатом профиле поперечной скорости в струе, что соответствует разбиению исходной струи на две половины, в каждой из которых поперечная скорость постоянна и равна  $v_i$ . Тогда

$$v = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 \quad (2.5)$$

где  $\alpha_i$  — весовые коэффициенты, зависящие от способа разбиения струи. Если расходы газа или площади поперечного сечения обеих струек принять равными, то  $\alpha_0 = \alpha_1 = 1/2$ . (Если же, например, принять равными поперечные размеры струек, то в случае кольцевой струи  $\alpha_0 = 1/2 \div 1/i$ ,  $\alpha_1 = 1/2 \div 3/i$ .)

Для средних параметров приближенно справедливы обычные газодинамические соотношения одномерных потоков. Заметим, что для изэнтропического течения

$$d \ln \rho = \frac{2}{\gamma - 1} d \ln a, \quad \rho = \frac{\gamma P}{a^2} \quad (2.6)$$

Учитывая (2.6), преобразуем уравнения (2.1) — (2.3) и разрешим их относительно производных от неизвестных функций, причем уравнение (2.3) разделим на два уравнения относительно  $dv_i/dx$ , используя формулу (2.5) (это соответствует разбиению струи на две и применению к каждой из них поперечного уравнения импульсов). Получим

$$\frac{du}{dx} = (j+1) \frac{v_1 \vartheta_1 y_1^j - v_0 \vartheta_0 y_0^j}{\beta (M^2 - 1) (y_1^{j+1} - y_0^{j+1})} \quad (2.7)$$

$$\frac{da}{dx} = (j+1) \frac{v_0 \vartheta_0 y_0^j - v_1 \vartheta_1 y_1^j}{2\beta (M^2 - 1) (y_1^{j+1} - y_0^{j+1}) M} \quad (2.8)$$

$$\frac{dv_0}{dx} = -(j+1) \frac{a(1 - \pi_0/\pi) y_0^j}{\alpha_0 \gamma M (y_1^{j+1} - y_0^{j+1})} \quad (2.9)$$

$$\frac{dv_1}{dx} = (j+1) \frac{a(1 - \pi_1/\pi) y_1^j}{\alpha_1 \gamma M (y_1^{j+1} - y_0^{j+1})} \quad (2.10)$$

$$\beta = \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad \vartheta_i = 1 + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\pi_i}{\pi}, \quad \theta_i = \gamma M^2 - \left(1 - \frac{\pi_i}{\pi}\right) \quad (i = 0, 1)$$

$$M = \frac{u}{a}, \quad C = \left(1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{M^2}\right)^{-1/2}, \quad \pi = (1 - C^2)^\beta$$

Система шести уравнений (2.4), (2.7) — (2.10) полна, так как она содержит восемь функций  $x$ , две из которых ( $\pi_0$  и  $\pi_1$  или  $y_0$  и  $\pi_1$ ) задаются. Начальные условия известны в сечении  $x = 0$ .

Полученная система уравнений используется для приближенного построения границ невязких криволинейных струй,  $y_i(x)$ , на участках, где внутри струи отсутствуют сильные скачки, а углы наклона границ к оси струи невелики, что справедливо при малой степени нерасчетности струй ( $0.4 < n < 2.5$ ) в области ее присоединения.

3. Течение взаимодействия квазиодномерной струи и однопараметрического турбулентного следа описывается системой из шести уравнений для невязкой струи (2.4), (2.7) — (2.10) и двух уравнений для следа (1.3), причем в последних двух уравнениях следует принять

$$\delta^* = y, \quad \frac{d\delta^*}{dx} = \frac{dy_0}{dx} = \frac{v_0}{u} \quad (3.1)$$

Эту систему надо дополнить вспомогательными уравнениями для определения длины (поверхности) внешней и внутренней границ невязкой струи

$$\frac{ds_i}{dx} = (j+1) y_i^j \left(1 + \left(\frac{v_i}{u}\right)^2\right)^{1/2} \approx (j+1) y_i^j \quad (i=0, 1) \quad (3.2)$$

необходимой для вычисления толщины струйного турбулентного слоя смешения.

Начальные условия ближнего следа определяются, как и ранее [2], из условий склеивания изобарического течения смешения в донной области с течением взаимодействия в следе. При расчете турбулентного слоя смешения за осесимметричным торцом следует исходить из тех же приближенных соотношений, что и в плоском течении: профиль скорости в слое смешения универсален

$$\frac{df}{ds_0} = b(C_0), \quad f = (j+1) y_0^j \delta \quad (3.3)$$

$$s_0 = (j+1) \int_0^x y_0^j \left(1 + \left(\frac{v_0}{u}\right)^2\right)^{1/2} dx \approx (j+1) \int_0^x y_0^j dx \quad (3.4)$$

Здесь  $f$  — площадь (толщина) поперечного сечения зоны смешения,  $b$  — коэффициент смешения,  $s_0$  — площадь (длина) эжектирующей поверхности струи.

Условия непрерывности  $\delta$  и  $\delta^*$  в сечении склеивания и сохранения массы в застойной области записываются в виде

$$y_0^{j+1}(x) + b^\circ s_0(x) [1 - H^*(1, C^\circ, 0)] = \delta^{j+1} \quad (3.5)$$

$$y_0^{j+1}(x) = \delta^{j+1} H^*(m, C^\circ, j) \quad (3.6)$$

$$\delta^{j+1} G(m, c^\circ, j) = (1 - B) b^\circ H^{**}(1, C^\circ, 0) s_0(x) \quad (3.7)$$

$$B = \frac{(\rho u)_+}{(\rho u)^\circ} b^\circ H^{**}(1, C^\circ, 0) s_0(x)$$

$$G(m, C, j) = -(j+1) \int_0^{\eta_*(m)} (\rho u) / (\rho u)_\delta \eta^j d\eta, \quad f(\eta_*) = m^{-1}$$

Индексом плюс обозначены параметры вдуваемого газа.

Из уравнений (3.5) — (3.7) следует, что начальное значение форпараметра  $m^\circ$  определяется в зависимости от  $C^\circ$  из уравнения

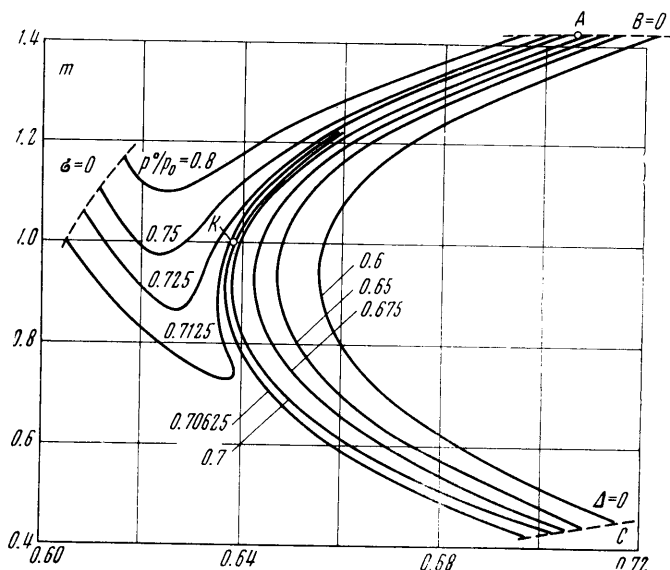
$$\frac{1 - H^*(m, C^\circ, 1)}{G(m, C^\circ, 1)} = \frac{1 - H^*(1, C^\circ, 0)}{H^{**}(1, C^\circ, 0)(1 - B)} \quad (3.8)$$

Координата  $x^\circ$  сечения склеивания определяется из уравнения

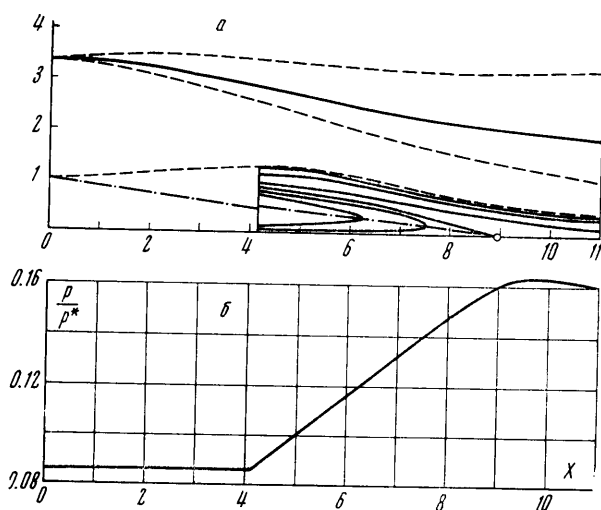
$$\frac{y_0^{j+1}}{s_0} - b^\circ H^*(m, C^\circ, 1) \frac{1 - H^*(1, C^\circ, 0)}{1 - H^*(m, C^\circ, 0)} = 0 \quad (3.9)$$

Расчет течения взаимодействия, изображенного на фиг. 2, а, состоит из двух частей. Первоначально для заданной величины донного давления ( $p^\circ$  или  $C^\circ$ ) путем интегрирования системы уравнений (2.4), (2.7) — (2.10), дополненной уравнениями (3.2), рассчитывается течение на изобарическом участке за уступом вплоть до сечения склеивания, определяемого уравнением (3.9). Далее путем интегрирования системы восьми уравнений

взаимодействия (1.3), (2.4), (2.7) — (2.10), дополненной уравнением (3.2), рассчитывается течение в области взаимодействия. Действительная величина донного давления ( $p^\circ$  или  $C^\circ$ ) и действительное течение взаимодействия определяются, как и в простейшем случае [2], условием прохождения интегральной кривой через особую точку (горловину следа).



Фиг. 1



Фиг. 2

Численное построение особого решения системы уравнений в окрестности седловой особой точки, положение которой определяется только в ходе расчета, связано с известными вычислительными трудностями, которые здесь не рассматриваются. Практически оказывается достаточным построить два неособых решения, относящихся к различным семействам, разность значений донного давления у которых меньше заранее заданной величины ( $C_1^\circ - C_2^\circ < 0.01$ ).

Поскольку, как и в более простом случае, рассмотренном в работе [2], особая точка типа седла располагается в плоскости  $mC$ , на фиг 1 в плоскости  $mC$  представлены для примера результаты интегрирования системы по методу Рунге — Кутты с основным шагом  $h = 0,1$  для плоского течения при  $M_\infty = 2,3$ ,  $y_0 = 1$ .

$$y_1 = 3,3, \quad \theta_1 = \theta_0 = 0, \quad n = p_\infty / p_0 = 0,65$$

Постоянная турбулентности была принята такой же [2], как и в ближайшем следе в равномерном и безграничном потоке,  $(-a\kappa) = 0,012$ .

Приведенные на фиг. 1 неособые интегральные кривые системы не соответствуют никакому действительному течению. Начинаются все кривые на линии начальных данных, которая определяется уравнением (3.8) (где  $B = 0$  при отсутствии вдува). Правые ветви оканчиваются на предельной линии, которая определяется условием  $\Delta(m, C) = 0$  в системе (3.1) или

$$\frac{\partial \ln H}{\partial \ln C} - (2 + H - M^2) - \frac{m(2-m)}{(1-m)(1-C^2)} \frac{\partial \ln H}{\partial m} = 0 \quad (3.10)$$

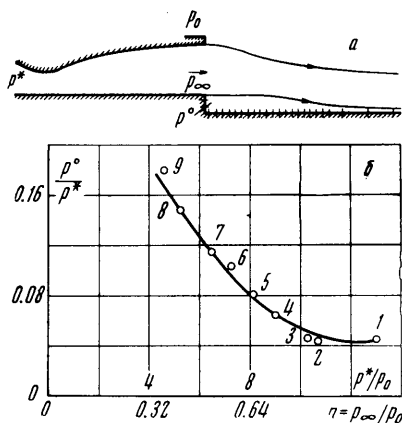
Левые ветви оканчиваются на линии

$$\sigma = y_1 - b(C_1)s_1[1 - H_1^*] - y_0/H^*(m, C^0) = 0 \quad (3.11)$$

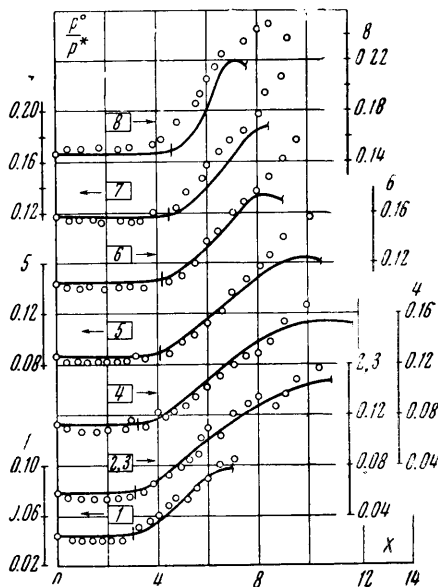
уравнение которой определяет сечение струи, в котором смыкаются внешний и внутренний вязкие слои и далее которого развитый метод расчета невязкой струи непригоден.

Особая кривая на фиг. 1 построена как средняя между ближайшими неособыми кривыми, относящимися к различным семействам, до тех пор, пока эти кривые достаточно близки одна к другой. Соответствующее течение взаимодействия в физической плоскости и распределение давления вдоль следа изображены на фиг. 2, а и б.

4. Экспериментальное исследование взаимодействия сверхзвуковой струи с ближним следом производилось на модели



Фиг. 3



Фиг. 4

плоского профилированного полусопла, рассчитанного на число  $M_\infty = 2,3$ , к торцу которого присоединялась длинная пластина, параллельная нижней стенке сопла (фиг. 3, а). Ширина канала (расстояние между боковы-

ми стенками или оптическими стеклами рабочего участка установки) составляла 90 мм, высота торца 16,5 мм. В плоскости симметрии на торце сопла и вдоль пластины располагались трубки отбора статического давления. На фиг. 3, б приведены результаты измерений донного давления  $p^{\circ}/p^*$  в зависимости от степени нерасчетности струи  $n = 0.4-1.0$ . Поскольку при  $n \approx 0.45$  возникает отрыв потока от верхней кромки сопла, а при  $n > 1$  донная область оказывается замкнутой, приведенные данные охватывают весь интересующий диапазон изменения параметров (при заданных условиях в выходном сечении сопла). Там же сплошной линией показаны результаты расчета по развитому методу, где величина  $p^{\circ}$  или  $C^{\circ}$  определяется особым решением исходных уравнений взаимодействия, причем, так же как и в работе [2], начальным пограничным слоем пренебрегалось ( $\delta_{\infty} = 0$ ) и постоянная турбулентности была принята такой же, как и в безграничном невязком потоке, представляющем собой простую волну,  $(-a\kappa) = 0.012$ . В диапазоне  $n = 0.5-1.0$  результаты расчета хорошо совпадают с экспериментом. На фиг. 4 расчетные распределения давления вдоль следа сравниваются с экспериментальными данными на всех измеренных степенях нерасчетности (номера режимов на фиг. 3 и фиг. 4 совпадают). Как видно из фиг. 4, расчет удовлетворительно совпадает с экспериментом всюду, за исключением окрестности горловины следа. Отметим характерное изменение линейных масштабов — длины изобарической области и длины ближнего следа — от степени нерасчетности, связанное с изменением сверхзвуковой структуры и конфигурации струи. На режиме 4 ( $n \approx 0,70$ ) происходит увеличение длины ближнего следа, или расстояния до его горловины, вызванное взаимодействием скачка со следом [3], на режиме 1 ( $n = 1$ ) след почти невозмущен, а на режиме 7 ( $n \approx 0,5$ ) скачок нерасчетности падает на донную область. Сравнение видимых по тепловым фотографиям границ струи и донной области с расчетными показывает их удовлетворительное согласование.

Различие расчетных и экспериментальных значений давления вблизи горловины следа, по-видимому, связано с неучитываемым влиянием вязкости на сверхзвуковую структуру струи и наличием вторичного пограничного слоя на стенке. Первый из этих эффектов приводит к уменьшению среднего полного давления в невязкой струе (уменьшению длины бочки), второй — к отклонению оси следа от поверхности пластины на толщину вытеснения вторичного слоя.

Заметим, наконец, что другой практически важный случай обтекания торца «тонкой» сверхзвуковой струей, в которой происходит смыкание вязких слоев и вырождение сверхзвукового ядра в пределах ближнего следа, связан с задачей о присоединении дозвуковой турбулентной струи, где отсутствует горловина следа и исходные уравнения не имеют особого решения [2].

В заключение авторы благодарят Г. Ю. Степанова за полезное обсуждение работы и Т. С. Соболеву и З. А. Донскову за помощь в работе.

Поступило 30 IX 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Alber J. E., Lees L. Integral theory for supersonic turbulent base flow. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 7.
2. Гогиш Л. В., Соболева Т. С., Степанов Г. Ю. Взаимодействие турбулентного следа с внешним потоком. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
3. Гогиш Л. В. Релаксационные колебания в турбулентном ближнем следе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.