УДК 532.5.4

УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАТЕЛЬНО-ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

А. М. ТЕРЕЩЕНКО
(*Москва*)

Изучается устойчивость вращательно-поступательного движения жидкости со свободной поверхностью. Жидкость предполагается идеальной несжимаемой, сила тяжести не учитывается. Учитывается влияние на характеристики устойчивости сил поверхностного натяжения. Подобная задача рассматривалась рядом авторов [1–3]. Полученные результаты свидетельствуют о большом влиянии поверхностных сил на критерии устойчивости движения. Поверхностные силы могут стабилизировать течение или ускорить его распад. Поэтому при изучении различных течений со свободной поверхностью необходимо принимать во внимание эффекты, вызванные поверхностными силами.

1. Постановка задачи. Поле скоростей основного стационарного течения в цилиндрической системе координат r, φ, z представляется в виде

$$u = 0, \qquad v = \Gamma / 2\pi r, \qquad w = W \tag{1.1}$$

Наложенные возмущения имеют вид

$$\begin{gathered} u'(r, \varphi, z, t) = u(r) e^{(\sigma t + i\gamma\varphi + i\lambda z)}, \qquad v'(r, \varphi, z, t) = v(r) e^{(\sigma t + i\gamma\varphi + i\lambda z)} \\ w'(r, \varphi, z, t) = w(r) e^{(\sigma t + i\gamma\varphi + i\lambda z)}, \; p'(r, \varphi, z, t) = p(r) e^{(\sigma t + i\gamma\varphi + i\lambda z)} \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь $u(r)$, $v(r)$, $w(r)$ — амплитуды возмущений, p — давление, γ — азимутальное волновое число, σ — временной параметр, λ — осевое волновое число.

Обычным методом теории малых колебаний из уравнений Эйлера можно получить уравнения для возмущений в безразмерном виде

$$\begin{gathered} \sigma u + \frac{i\gamma}{y^2} u + i\lambda\, W u - \frac{2}{y^2} v = -\frac{dp}{dy} \\ \sigma v + \frac{i\gamma}{y^2} v + i\lambda W v = -\frac{i\gamma p}{y}, \qquad \sigma w + \frac{i\gamma}{y^2} w + i\lambda W w = -i\lambda p \\ \frac{du}{dy} + \frac{u}{y} + \frac{i\gamma v}{y} + i\lambda w = 0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

При образовании безразмерных параметров за основы взяты

$$\begin{gathered} V^* = \frac{\Gamma}{2\pi a}, \quad l^* = a, \quad t^* = \frac{a}{V^*}, \quad \rho^* = \rho^\circ, \quad p = \rho^* V^{*2} p_0 \\ \lambda = \frac{\lambda_0}{a}, \quad \sigma = \frac{\sigma_0}{t^*}, \quad r = ay, \quad t = t^*\tau, \quad z = a\eta, \quad W = V^* W_0, \quad \mathrm{v}' = V^* \mathrm{v}_0' \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь ρ — плотность среды; в дальнейшем индекс 0 опущен.

Из формулы (1.1) видно, что при $r \to 0$, $v \to \infty$ это физически нереально. Следовательно, жидкость не может находиться на расстоянии от оси, меньшем некоторой величины, которая представляет собой радиус свободной поверхности. Если течение такого типа осуществляется в трубе, которая сообщается с атмосферой, т. е. полость заполнена воздухом, вовлекающимся в движение за счет сил трения на границе с жидкостью и вращающимся в форме воздушного столба. Если труба не сообщается с атмосферой, то полость заполняется насыщенными парами жидкости. Давление в полости предполагается постоянным

$$p = P \tag{1.5}$$

Таким образом, изучается устойчивость циркуляционного течения между двумя соосными цилиндрами, один из которых, внешний ($r = b$) — твердая стенка. Внутренний цилиндр ($r = a$) — свободная поверхность.

Предполагая, что $\lambda \neq 0$, после некоторых преобразований уравнений (1.3) получаем уравнение для осевой составляющей возмущений

$$w'' + \frac{w'}{y} - \lambda^2 w - \frac{\gamma^2}{y^2} w = 0 \tag{1.6}$$

Решение уравнения (1.6) имеет вид

$$w(y)=d_1I_\gamma(\lambda y)+d_2K_\gamma(\lambda y) \tag{1.7}$$

Здесь d_1, d_2 — произвольные постоянные, $I_\gamma(\lambda y)$, $K_\gamma(\lambda y)$ — функции Макдональда.

Произвольные константы определяются из граничных условий. Остальные неизвестные связаны с w при помощи соотношений

$$p(y)=\frac{i}{\lambda}\left(\sigma+\frac{i\gamma}{y^2}+i\lambda W\right)w(y),\qquad u(y)=\frac{1}{i\lambda}w'(y),\qquad v(y)=\frac{\gamma}{y\lambda}w(y) \tag{1.8}$$

Все эти соотношения получаются путем исключения из уравнений (1.3).

2. Вывод граничных условий. Возмущенная свободная поверхность описывается формулой

$$r=a+\xi e^{(\sigma t+i\gamma\varphi+i\lambda z)} \tag{2.1}$$

Средняя кривизна этой поверхности согласно [4]

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{a}+\xi\left(\lambda^2+\frac{\gamma^2-1}{a^2}\right)e^{(\sigma t+i\gamma\varphi+i\lambda z)}+o(\xi^2) \tag{2.2}$$

Здесь R_1, R_2 — главные радиусы кривизны поверхности, ограничивающей жидкость.

Учет поверхностных эффектов приводит к добавочному давлению, определяемому формулой Лапласа

$$P=T\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \tag{2.3}$$

Здесь T — коэффициент поверхностного натяжения. При этом если поверхность выпуклая, то давление направлено внутрь жидкости, если же вогнутая — по внешней нормали к поверхности. Баланс сил давления на невозмущенной свободной поверхности дается соотношением

$$p^\circ(a)-P=-\frac{T}{a},\qquad p^\circ(r)=\frac{\rho^\circ\Gamma^2}{8\pi^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+p^\circ(a) \tag{2.4}$$

Для возмущенной поверхности верно соотношение

$$p^\circ(r)+p(r)e^{(\sigma t+i\gamma\varphi+i\lambda z)}=P-T\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),\qquad r=a+\xi e^{(\sigma t+i\gamma\varphi+i\lambda z)} \tag{2.5}$$

Разлагая функции, входящие в формулу (2.5), в ряд около значения $r=a$, учитывая (2.2), (2.4), получаем

$$p(a)=\xi\left[T\left(\lambda^2+\frac{\gamma^2-1}{a^2}\right)+\frac{\rho^\circ C^2}{a^3}\right],\qquad C=\frac{F}{2\pi} \tag{2.6}$$

Связь между амплитудой возмущения свободной поверхности ξ и амплитудами возмущений скорости находим из кинематического условия на жидкой свободной поверхности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)(r-a-\xi e^{(\sigma t+i\gamma\varphi+i\lambda z)})=0 \tag{2.7}$$

Подставляя сюда соответственно

$$u=u(r)e^{(\sigma t+i\gamma\varphi+i\lambda z)},\qquad v=V+v(r)e^{(\sigma t+i\gamma\varphi+i\lambda z)},\qquad w=w(r)e^{(\sigma t+i\gamma\varphi+i\lambda z)} \tag{2.8}$$

и пренебрегая квадратами малых величин, имеем

$$\xi=u(a)\left(\sigma+\frac{i\gamma C}{a^2}+i\lambda W\right)^{-1} \tag{2.9}$$

Подставляя соотношения (2.9) в (2.6) и переходя к безразмерным параметрам, получаем первое граничное условие

$$p(1)=-\frac{u(1)}{\sigma+i\gamma+i\lambda W}[M(\lambda^2+\gamma^2-1)+1] \tag{2.10}$$

В формуле (2.10) буквой M обозначен обезразмеренный коэффициент поверхностного натяжения

$$T = M\rho^* V^{*2} a \tag{2.11}$$

Второе граничное условие получаем при $y = b / a$. Это равенство равно нулю радиальной составляющей скорости на твердой стенке

$$u(b / a) = 0 \tag{2.12}$$

В случае $b \to \infty$ второе граничное условие сводится к требованию ограниченности скорости на бесконечности, т. е.

$$w(y) \to 0 \qquad \text{при} \quad y \to \infty \tag{2.13}$$

3. Решение поставленной задачи. Учитывая (1.7), (2.10), (2.12), из условия $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$ получаем для σ дискриминантное уравнение

$$(\sigma + i\gamma + i\lambda W)^2 = \lambda [M(\lambda^2 + \gamma^2 - 1) + 1] \left[-\frac{K_\gamma'(\Lambda)}{I_\gamma'(\Lambda)} I_\gamma'(\lambda) + K_\gamma'(\lambda) \right] \times$$

$$\times \left[-\frac{K_\gamma'(\Lambda)}{I_\gamma'(\Lambda)} I_\gamma(\lambda) + K_\gamma(\lambda) \right]^{-1} \tag{3.1}$$

$$\lambda \frac{b}{a} = \Lambda$$

Предварительно рассмотрим случай $b \to \infty$. Совершив предельный переход в (3.1), имеем

$$(\sigma + i\gamma\varphi + i\lambda W)^2 = \frac{\lambda K_\gamma'(\lambda)}{K_\gamma(\lambda)} [M(\lambda^2 + \gamma^2 - 1) + 1] \tag{3.2}$$

Из (3.2) для $M = 0$ следует нейтральная устойчивость течения, результат работы Кельвина [2], так как отношение

$$\frac{K_\gamma'(\lambda)}{K_\gamma(\lambda)} = -\left[\frac{\gamma}{\lambda} + \frac{K_{\gamma-1}(\lambda)}{K_\gamma(\lambda)} \right] \tag{3.3}$$

при любых $\lambda > 0$ будет отрицательным.

При учете поверхностных сил устойчивость возможна при выполнении неравенства

$$M(\lambda^2 + \gamma^2 - 1) + 1 \geqslant 0 \tag{3.4}$$

Из условия (3.4) можно сделать следующие выводы:

а) если $\lambda > 1$, $\gamma > 1$, условие всегда выполнимо;

б) если $\lambda^2 + \gamma^2 - 1 < 0$, то неравенство (3.4) примет вид

$$M \leqslant [1 - \lambda^2 - \gamma^2]^{-1} \tag{3.5}$$

Из неравенства следует, что течение с большой циркуляцией Γ будет устойчивым относительно малых возмущений, так как в этом случае

$$M = \frac{T}{\rho^* a V^{*2}} < 1 \tag{3.6}$$

Аналогично из (3.2) получаем критерий неустойчивости

$$M(\lambda^2 + \gamma^2 - 1) + 1 < 0 \tag{3.7}$$

или

$$M > (1 - \lambda^2 - \gamma^2)^{-1}, \qquad \lambda^2 + \gamma^2 - 1 < 0 \tag{3.8}$$

Из (3.7) следует, что неустойчивость возможна только при $\gamma = 0$ и $\lambda < 1$, т. е. только для осесимметричных возмущений. Азимутальные возмущения стабилизируют течение. Влияние твердой стенки не меняет полученного критерия устойчивости (3.4). Можно доказать, что при любых $\lambda > 0$ выполняется следующее соотношение:

$$\left(-\frac{K_\gamma'(\Lambda)}{I_\gamma'(\Lambda)} I_\gamma'(\lambda) + K_\gamma'(\lambda) \right) \left(-\frac{K_\gamma'(\Lambda)}{I_\gamma'(\Lambda)} I_\gamma(\lambda) + K_\gamma(\lambda) \right)^{-1} < 0 \qquad \left(\Lambda = \lambda \frac{b}{a} \right) \tag{3.9}$$

После простых преобразований левая часть неравенства (3.9) запишется в виде

$$-\frac{K_\gamma'(\Lambda) I_\gamma'(\lambda)}{I_\gamma(\Lambda) I_\gamma(\lambda)} \left(1 - \frac{K_\gamma'(\lambda) I_\gamma'(\Lambda)}{K_\gamma'(\Lambda) I_\gamma'(\lambda)} \right) \left(-\frac{K_\gamma'(\Lambda)}{I_\gamma'(\Lambda)} + \frac{K_\gamma(\lambda)}{I_\gamma(\lambda)} \right)^{-1} \tag{3.10}$$

Используя результаты [5], получаем требуемый результат.

Теперь рассмотрим случай чисто азимутальных колебаний: $\lambda = 0$, $\gamma \neq 0$. Решая уравнение (1.3) методом исключения, получаем конечное уравнение

$$u''y^2 + 3u'y + (1-\gamma^2)u = 0 \tag{3.11}$$

Решение (3.11) дается в виде

$$u(y) = C_1 y^{\gamma-1} + C_2 y^{-(1+\gamma)} \tag{3.12}$$

Используя граничные условия (2.10) (2.12) или (2.10), (2.13), найдем соответственно с учетом и без учета влияния твердой стенки дискриминантные уравнения для σ

$$\begin{gathered}(\sigma + i\gamma)^2 = (1 - b/a)^{2\gamma}(1 + b/a)^{-2\gamma}[M(\gamma^2-1)+1]\gamma, \\ (\sigma + i\gamma)^2 = -[M(\gamma^2-1)+1]\gamma\end{gathered} \tag{3.13}$$

Из соотношений (3.13) следует, что азимутальные возмущения, наложенные на основное течение, со временем не возрастают.

Течение нейтрально устойчиво по отношению к азимутальным возмущениям. Под действием этих возмущений на жидкой цилиндрической поверхности в поперечном направлении будут перемещаться волны с угловой скоростью

$$\omega = -\gamma^{-1}\{[(-1 + (b/a)^{2\gamma})(1 + (b/a)^{2\gamma})[M(\gamma^2-1)+1]\gamma]^{1/2} - \gamma\} \tag{3.14}$$

$$\omega = -\gamma^{-1}[\sqrt{\gamma[M(\gamma^2-1)+1]} - \gamma] \tag{3.15}$$

4. Обобщение задачи в случае азимутальных возмущений. Будем учитывать движение среды внутри цилиндрической полости. Скорость основного течения задается выражением

$$u = 0, \qquad v = \begin{cases} \omega r & (r < a), \\ \omega a^2 r^{-1} & (r > a) \end{cases} \qquad w = W \tag{4.1}$$

Уравнения возмущений для областей $r < a$, $r > a$ в безразмерной форме имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}
&\sigma u_1 + i\gamma u_1 - 2v_1 = -p_1', && \sigma u_2 + \frac{i\gamma}{y^2}u_2 - \frac{2}{y^2}v_2 = -kp_2' \\
&\sigma v_1 + i\gamma v_1 + 2u_1 = -\frac{i\gamma p_1}{y}, && \sigma v_2 + \frac{i\gamma}{y^2}v_2 = -\frac{ki\gamma p_2}{y} \\
&\sigma w_1 + i\gamma w_1 = 0, && \sigma w_2 + \frac{i\gamma w_2}{y} = 0 \qquad \left(k = \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \\
&(yu_1)' + i\gamma v_1 = 0, && u_2' + \frac{u_2}{y} + \frac{i\gamma v_2}{y} = 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

За характерные величины выбраны следующие:

$$V^* = \omega a, \qquad l^* = a, \qquad \rho^* = \rho_1, \qquad t^* = \omega^{-1}$$

Аналогично п. 2 получим граничные условия

$$\begin{gathered}p_1(1) - p_2(1) = u_1(1)(\sigma + i\gamma)^{-1}[M(\gamma^2-1) + (1/k - 1)], \quad u_1(1) = u_2(1), \\ u_2(b/a) = 0, \quad u_1(0) = 0\end{gathered} \tag{4.3}$$

Решая уравнения (4.2) методом исключения, предварительно получаем

$$y_2\frac{d^2}{dy^2}(u_1 y) + y\frac{d}{dy}(u_1 y) - \gamma^2 u_1 y = 0, \qquad y^2\frac{d^2u_2}{dy^2} + 3y\frac{du_2}{dy} + (1-\gamma^2)u_2 = 0 \tag{4.4}$$

Решения этих уравнений

$$u_1(y) = C_1 y^{\gamma-1} + C_2 y^{-(1+\gamma)}, \qquad u_2(y) = d_1 y^{(\gamma-1)} + d_2 y^{-(1+\gamma)} \tag{4.5}$$

Используя условия (4.3), выведем дискриминантное уравнение для σ

$$\sigma + i\gamma = \frac{1}{\Delta}\left[i \pm \left\{ -1 - \gamma\left[M(\gamma^2-1) + \left(\frac{1}{k} - 1\right)\right]\left[1 + \frac{1+(a/b)^{2\gamma}}{k\,[1-(a/b)^{2\gamma}]}\right]\right\}^{1/2}\right]$$

$$\Delta = 1 + (1 + a/b)^{2\gamma} k^{-1} (1 - (a/b)^{2\gamma})^{-1} \tag{4.6}$$

Из формулы (4.6) видно, что неустойчивые азимутальные возмущения возможны при условии

$$M < \frac{1-k^{-1}}{(\gamma^2-1)} \qquad \left(k = \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \tag{4.7}$$

Это условие выполняется для $k > 1$. Для случая $k < 1$ течение нейтрально устойчиво относительно азимутальных возмущений. Таким образом, для случая $k < 1$ остаются справедливыми результаты, выраженные формулами (3.13), (3.14).

В заключение автор благодарит Г. И. Петрова за постоянное руководство работой.

Поступило 6 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Thomson William (Kelvin Lord) Mathematical and Physical. Papers, vol. 4, p. 152, Cambr. Univ, Press, 1910.
3. Fox I. L., Morgan G. W. On the stability of some flows of an ideal fluid with free surfaces. Quart. Appl. Math., 1954, vol. 11, No. 4.
4. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии, Изд. 4. М., Гостехиздат, 1956.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1, 2. М., Изд-во иностр. лит., 1949.

УДК 532 : 533 : 0 61.3

ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР СЕМИНАРЫ

Теоретический семинар под руководством Л. В. Овсянникова

23 IX 1970 г. **Л. В. Овсянников** (Новосибирск) *Информация о Международном математическом конгрессе 1970 г. (Франция, Ницца).*

7 X 1970 г. **В. В. Пухначев** (Новосибирск) *Малые возмущения плоского неустановившегося движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей, имеющей форму эллипса.*

Указанная задача поставлена Л. В. Овсянниковым (см. сборник «Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей», Ин-т гидродинамики СО АН СССР, Новосибирск, 1967). Решение задачи строится в явном виде. Анализ асимптотики решения при $t \to \infty$ показывает, что возмущение потенциала течения ограничено «в среднем», однако вектор возмущения границы эллипса неограниченно растет вблизи концов большой оси.

14 X 1970 г. **В. А. Бернштейн** (Южно-Сахалинск) *О граничных эффектах в области скачка глубины при распространении длинных гравитационных волн во вращающемся бассейне.*

Рассмотрена нестационарная задача о возмущении идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей неограниченный плоский вращающийся бассейн. Глубина бассейна меняется скачком вдоль некоторого луча, оставаясь постоянной в остальных точках. В приближении линейной теории мелкой воды изучается асимптотика граничного эффекта, вызванного наличием одновременно кориолисова ускорения и данной ступени.

21 X 1970 г. **В. Ф. Минин, В. М. Кузнецов** (Новосибирск) *Экспериментальные результаты по проблеме «султан».*

Проведено экспериментальное исследование взрыва вблизи свободной поверхности. Установлены некоторые закономерности, связанные с величиной заглубления заряда. Показано, что несимметрия сжатия взрывного пузыря, вызванная влиянием свободной поверхности, приводит к образованию вихревого движения в стадии сжа-