

УДК 532.526.5.011.7

ТЕЧЕНИЕ ЗА ТОЧКОЙ ОТРЫВА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. Я. НЕЙЛАНД

(Москва)

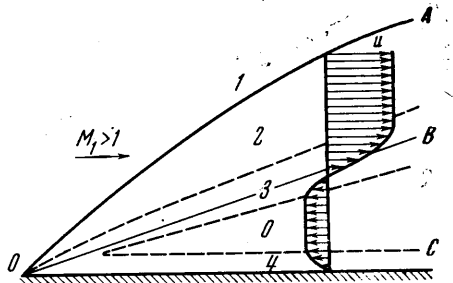
Проведено исследование структуры течения за точкой отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Получены аналитические и численные решения для простейших полубесконечных срывных зон, начинающихся с передней кромки или на гладкой поверхности. Обсуждается вопрос о плато давления в срывной зоне конечной длины и вычислено его значение на основе асимптотической теории.

Используется асимптотическая теория течения [1, 2] в окрестности точки отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке газа (область свободного взаимодействия). Полученное локальное решение в дальнейшем применено для построения картины течения в срывной зоне [3].

Проводится анализ поведения решения для области свободного взаимодействия при переходе в область возвратных течений. Результаты позволили фактически вычислить (в первом приближении) величину давления в области «плато», установив математический смысл этого понятия, введенного ранее на основе результатов экспериментальных исследований. Одновременно получены относительно простые решения для полубесконечных срывных зон.

1. Полезно вначале получить решение для простейшей полубесконечной зоны отрыва, начинающейся около передней кромки тела (фиг. 1). Невязкое течение этого типа состоит из равномерного набегающего потока, равномерного потока за ударной волной OA , направленного вдоль OB , и области покоя BOC (области 1, 2, 0 на фиг. 1).

При заданных характеристиках набегающего потока и величине давления в области покоя все определяется условиями Ренкина — Гюгонио.



Фиг. 1

Однако течение вязкого газа не дает равномерно точного предельного решения уравнений Навье — Стокса при стремлении числа Рейнольдса $R \rightarrow \infty$, так как содержит разрыв скорости на линии OB .

Согласно классической теории пограничного слоя, необходимо рассмотреть около OB отдельно область смешения (область 3) с толщиной $\delta \sim \epsilon l$, $\epsilon = R^{-1/2}$. (Решение задачи для зоны смешения получено в работе [4].)

Решение для области 3 показывает, что за счет действия вязкости в области 3 из области 0 непрерывно поступает газ. Нормальная к OB компонента скорости в области 3 имеет порядок ϵ . Поэтому в области 0 также появляется движение.

В силу принципа сращивания асимптотических разложений (например, [5]) и решения для области 3 поперечная компонента скорости в области 0 $v_0 \sim O(\epsilon)$. (Все функции течений будем считать отнесенным к их значениям в равномерном набегающем потоке 1, а индексом снизу отмечать но-

мер области, к которой относится рассматриваемая функция. Давление отнесено к удвоенному скоростному напору).

Уравнение неразрывности для области 0 дает $u_0 \sim \varepsilon$, так как предполагается $p_0 - p_1 \sim 1$ и $\angle \text{ВОС} \sim O(1)$. Тогда переменная часть давления $\Delta p_0 \sim O(\varepsilon^2)$ (уравнение импульса).

При этом граница OB в первом приближении для области 0 остается прямой (теория малых возмущений для сверхзвукового потока в области 2 при $\Delta p \sim \varepsilon^2$ показывает, что отклонение от прямой $O(\varepsilon^2)$).

Плотность ρ_0 в первом приближении остается постоянной и вычисленной для $p = p_0$ и $T = T_0$, где T_0 — температура стенки. Подстановка полученных оценок в уравнения Навье — Стокса и совершение предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$ позволяет показать, что вязкие члены в первом приближении для области 0 исчезают. Течение в области 0 описывается полными уравнениями Эйлера для несжимаемой жидкости. Движение остается безвихревым, так как все струйки тока начинаются при $x \rightarrow \infty$ из состояния покоя.

Для функции тока можно написать уравнение Лапласа

$$\psi_{0xx} + \psi_{0yy} = 0 \quad (1.1)$$

$$\psi_0(x, 0) = 0, \quad \psi_0(x, y = Ax) = -Bx^{1/2} \quad (1.2)$$

Второе краевое условие (1.2) легко получить, срачивая решение для областей 3 и 0 ; параметр задачи A определяется величинами p_0 / p_1 , M_1 и соотношениями Ренкина — Гюгонно; постоянная B определяет расход в авторемодельную зону смещения 3 , например, по данным [4].

Решение задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$\psi_0(x, y) = -\frac{Bx^{1/2} \operatorname{sh}^{1/2} A \xi_0}{\operatorname{sh}^{1/2} \operatorname{arsh} A}, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{sh} A \xi_0 \quad (1.3)$$

Теперь заметим, что в возвратном течении (1.3) нарушается условие прилипания на поверхности тела

$$u_0(x, 0) = -B/E, \quad E = 2x^{1/2} \operatorname{sh}^{1/2} \operatorname{arsh} A \quad (1.4)$$

Это значит, что для получения равномерно точного решения уравнений Навье — Стокса в первом приближении при $\varepsilon \rightarrow 0$ необходимо рассмотреть пограничный слой возвратного течения 4 . Скорость на его внешней границе равна (1.4). Уравнения и граничные условия для пограничного слоя 4 имеют вид

$$u_i u_{ix} + v_i u_{iy} = u_0 u_{0x} + v_i u_{iy}, \quad u_{ix} + v_{iy} = 0 \quad (1.5)$$

$$u_i(x, 0) = v_i(x, 0) = 0, \quad u_i(x, +\infty) = u_0(x, 0)$$

Решение краевой задачи (1.5) имеет вид

$$\xi_i = x^{-1/2}, \quad \eta_i = (C \xi_i^3 / 4 v_i)^{1/2} y, \quad u_0 = -C \xi_i \quad (1.6)$$

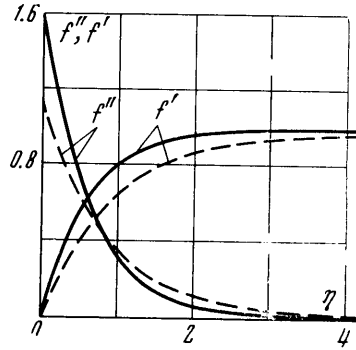
$$C = 1/2 B \operatorname{csch}^{1/2} \operatorname{arsh} A, \quad u_i(\xi_i, \eta_i) = u_0(\xi_i) f_i'(\eta_i)$$

$$f_i''' - f_i f_i'' + 2(1 - f_i'^2) = 0, \quad f_i(0) = f_i'(0) = 0, \quad f_i'(\infty) = 1$$

Уравнения Фолкнера — Скэна с отрицательным коэффициентом при втором члене уравнения (1.6) и с положительным — при третьем члене получаются для задач о пограничном слое в потоке, ускоряющемся из бесконечно удаленной точки, если возрастание скорости [6] происходит пропорционально x^{-n} с $0 < n < 1$ [6], при $n = 1$ второй член (1.6) исчезает, а для $n > 1$ — он положительный. Коэффициент при третьем члене всегда положительный. Решение (1.6) приведено на фиг. 2 сплошными линиями.

2. Рассмотрим теперь течение, в котором точка отрыва лежит на расстоянии l от носка пластины (фиг. 3). Согласно [1, 2] $p_0 - p_1 \approx O(\epsilon^{1/2})$. Здесь при вычислении числа R характерный размер равен l и все длины отнесены к l . В непосредственной окрестности точки отрыва $x = 0$ лежит область свободного взаимодействия с длиной $\sim \epsilon^{3/4}$, подробно исследованная в работах [1, 2]. При ее изучении пришлось рассматривать две отдельные области с толщинами $\epsilon^{5/4}$ и ϵ (области 6 и 5 на фиг. 3).

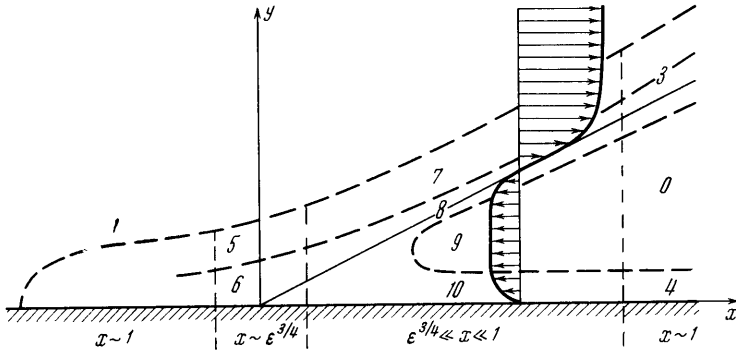
В невязком изэнтропическом сверхзвуковом потоке эффективный наклон границы (образованный толщинами вытеснения пристеночных областей) мал $\sim \epsilon^{1/2}$, и поэтому справедлива сверхзвуковая теория малых возмущений. В области 5 возмущения продольного компонента скорости $\Delta u_5 \sim \epsilon^{1/2}$, а $u_5 \sim 1$, вместе с тем градиент давления $\sim \epsilon^{-1/4}$, поэтому вязкость не существенна и распределение параметров может быть вычислено при помощи уравнения



Фиг. 2

Бернулли при известном распределении давления, зависящем только от x .

Заметим, что при описании течения в области 5 в работах [1, 2] существует некоторое различие, не влияющее на окончательные результаты. В работе [2] используются обычные переменные, и для описания течения требуется два члена разложения, учитывающие сдвиг линий тока за счет



Фиг. 3

изменения толщины области 6 и изменение величины скорости в области 5 за счет изменения давления. В работе [1] используются переменные Мизеса и оба эти эффекта учитываются одним членом разложения. В области 6 главные вязкие члены порядка инерционных и возмущение скорости происходит в основном порядке. Уравнения для области 6 вместе с краевыми условиями позволяют определить распределение давления, трения на стенке и других функций течения. Они имеют вид [1]

$$\begin{aligned}
 f_6''' &= \beta [1 + \frac{1}{2} f_6'^2 - f_6 f_6''] + \beta \xi_6 (f_6' f_6'' - f_6 f_6''') & (2.1) \\
 f_6(\xi_6, 0) = f_6'(\xi_6, 0) &= 0, \quad f_6''(\xi_6, \infty) = 1, \quad f_6'(0, \eta_6) = \eta_6 \\
 \beta &= \xi_6^{1/2} (d\xi_6 / dX_6^0) = \xi_6^{3/2} / \{2 \xi_6^{1/2} \lim_{\eta_6 \rightarrow \infty} [\eta_6 - (2f_6)^{1/2}]\}^*
 \end{aligned}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по ξ_6 , а штрихом — по η_6 .

В формулах (2.1) приняты обозначения

$$\begin{aligned} X_6 &= \varepsilon^{-3/4} x_6, & Y_6 &= y_6 \varepsilon^{-5/4}, & \Psi_6 &= \varepsilon^{-3/2} \psi_6, & P_6 &= \varepsilon^{-1/2} (p_6 - p_1) \\ X_6^0 &= X_6 2^{3/4} (M_1^2 - 1)^{3/8} \rho_6^{1/2} \mu_6^{1/4} a^{5/4}, & \eta_6 &= Y_6 \xi_6^{-1/2} [2(M_1^2 - 1)^{1/2} \rho_6^2 a^3 / \mu_6]^{1/4} \\ \xi_6 &= P_6 [2(M_1^2 - 1)^{1/2} / a \mu_6]^{1/2}, & \Psi_6 &= \xi_6 f_6(\xi_6, \eta_6) [\mu_6 / 2a(M_1^2 - 1)^{1/2}]^{1/2} \\ a &= \varepsilon u_y (X_6 \rightarrow -\infty, Y_6 = 0) \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем большие буквы с индексом снизу используются для деформированных переменных, сохраняющих порядок $O(1)$ в соответствующей области. Уравнение (2.1) является уравнением пограничного слоя для несжимаемой жидкости, в котором постоянные μ_6 , ρ_6 вычислены при температуре стенки и давлении в невозмущенном потоке.

Численное решение краевой задачи (2.1) в [1] проведено до точки отрыва, а в [2] — несколько дальше. Однако для завершения решения необходимо рассмотреть поведение его при $X_6 \rightarrow +\infty$ и провести сравнение с решениями для областей течения, удаленных от $x = 0$ на расстояние, значительно большее чем $\varepsilon^{3/4}$.

Рассмотрим сначала расстояния

$$X_8 = x \varepsilon^{-\alpha} = X_6 \varepsilon^b, \quad 0 < \alpha < 3/4, \quad b = 3/4 - \alpha \quad (2.2)$$

Легко видеть, что $X_6 \rightarrow +\infty$, если $\varepsilon \rightarrow 0$ при $X_8 \sim O(1)$ (области 7, 8, 9, 10 на фиг. 3). Сначала полезно привести некоторые физические соображения. Поперечный размер области течения, лежащей ниже линии тока $\psi = 0$, растет $y \sim \varepsilon^{1/2} x$, так как $p_0 - p_1 \sim \varepsilon^{1/2}$. В области 7 с толщиной порядка ε (как у невозмущенного пограничного слоя перед точкой отрыва), содержащей основную часть оторвавшегося пограничного слоя, $u_7 \sim O(1)$ и возмущения $\Delta u_7 \ll 1$, поэтому трение около линии тока $\psi = 0$ сохраняет порядок ε . Рассмотрим область 8, в которой только силы трения заставляют частицы газа двигаться вниз по потоку. Следовательно, вязкие и инерционные члены имеют одинаковый порядок. Из этого условия следует:

$$y_8 \sim x \varepsilon^{1-(2/3)\alpha}, \quad y_8 \ll \varepsilon^{1/2} x \quad \text{при } \alpha < 3/4 \quad (2.3)$$

Таким образом, при $X_8 \sim 1$ ($\alpha < 3/4$) обязательно должна появиться невязкая область возвратных течений 9, движение в которой вызывается продольными градиентами давления, индуцируемыми взаимодействием ее толщины с внешним сверхзвуковым потоком. Поперечный размер этой области $y_9 \sim \varepsilon^{1/2} x_9$ ($x_9 \equiv x_8$) значительно меньше продольного, поэтому поперечный перепад давления в главном члене будет отсутствовать и все линии тока, вытекая из области покоя, лежащей при $x_9 \rightarrow \infty$, должны входить в зону смещения 8.

Для полубесконечной зоны отрыва (фиг. 3) существование области покоя является краевым условием, для ограниченной области отрыва, включающей в себя область завихренного течения и область присоединения [2], роль области покоя играет окрестность критической точки области возвратных течений. Невязкое течение в области 9 не удовлетворяет условию прилипания при $y_9 = 0$, поэтому еще необходимо рассмотреть пограничный слой 10.

Теперь получим уравнения и краевые условия для областей 8, 9 и 10, совершая предельный переход $X_6 \rightarrow \infty$ или $\varepsilon \rightarrow 0$ при $X_8 \sim 1$, в краевой задаче (2.1), сформулированной для области свободного взаимодействия 6. Для области 8, как можно понять из приведенных выше оценок, следует ввести переменные

$$\eta_8 = [\eta_6 - r(x)] X_6^{-1/3}, \quad f_6(\xi_6, \eta_6) = X_6^{2/3} f_8(X_8, \eta_8) \quad (2.4)$$

Здесь $r(x)$ — координата η_6 линии тока $\psi = 0$. Подстановка (2.4) в (2.1) после предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$ дает

$$f_s''' = \xi_0^{3/2} [(1/3)f_s'^2 - (2/3)f_s f_s'' + X_s(f_s' f_s'' - f_s f_s''')] \quad (2.5)$$

Законно сохранить лишь третье краевое условие (2.1). Остальные краевые условия, заданные при $y = 0$, не лежат в пределах области 8. Однако можно записать еще два условия, следующие из того, что $\psi = 0$ при $\eta_8 = 0$ и из малости скоростей в области 9. Последнее будет подтверждено ниже

$$f_s''(X_s, \infty) = 1, \quad f_s(X_s, 0) = 0, \quad f_s'(X_s, -\infty) = 0 \quad (2.6)$$

Постоянная ξ_0 , входящая в уравнение (2.5), равна значению $\xi_6(+\infty)$, что обеспечивает сращивание решений в областях 6 и 8. Задача (2.5), (2.6) является автономной и при помощи замены переменных сводится к стандартному виду

$$f_s(X_s, \eta_8) = (3/2 \xi_0^{3/2})^{2/3} \varphi_8(\lambda_8), \quad \eta_8 = (3/2 \xi_0^{3/2})^{1/3} \lambda_8 \quad (2.7)$$

$$\varphi_8''' + \varphi_8 \varphi_8''' - 1/2 \varphi_8'^2 = 0, \quad \varphi_8''(+\infty) = 1, \quad \varphi_8(0) = \varphi_8'(-\infty) = 0$$

Из полученного результата вытекает, что внешняя часть области 6 при $X_6 \rightarrow \infty$ становится зоной смещения 8 потока с линейным профилем скорости (низ профиля оторвавшегося пограничного слоя) и полубесконечной области покоящегося газа (область 9, в которой скорости меньше по порядку, чем в зоне 8); $\varphi_8(-\infty) = -0.9569$.

Согласно (2.1) форма разделительной линии тока в главном члене при $X_6 \rightarrow +\infty$ имеет вид

$$y \rightarrow \varepsilon^{1/2} \xi_0 (1/2 a \mu_6 (M_1^2 - 1)^{1/2})^{1/2} \quad (2.8)$$

Это и есть внешняя граница области 9. Она определяет масштаб y_9 (при x , заданном (2.2)), для которого следует совершать предельный переход $X_6 \rightarrow \infty$ при получении уравнений области 9 из (2.1).

Сращивание с решением (2.6) и (2.7) дает краевое условие и масштаб для функции тока на границе

$$\psi_9 = \varepsilon^{1+2/3\alpha} X_9 \varphi_8(-\infty) \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{\mu_6}{2a(M_1^2 - 1)^{1/2}}\right)^{1/2}$$

Используя (2.2), (2.8) и (2.9), находим масштабы остальных функций в области 9. Подставив их в (2.1) и свершив предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ ($X_6 \rightarrow +\infty$), получим уравнения Эйлера, но с поперечным уравнением импульса, таким как у пограничного слоя. Приведем формулу для масштабов и решение в области 9

$$U_9(X_9) = -K X_9^{-1/3}, \quad V_9 = -1/3 K Y_9 X_9^{-1/3}$$

$$P_9 = 1/2 \rho_6 K^2 X_9^{-2/3}, \quad Y_9 = \varepsilon^{-1/2 - \alpha} y_9 \quad (2.9)$$

$$K = -(3/2)^{2/3} \varphi_8(-\infty) / \xi_0 a (M_1^2 - 1)^{1/2}$$

$$U_9 = \varepsilon^{-1/2 + 1/3\alpha} u_9, \quad P_9 = \varepsilon^{-1+2/3\alpha} [p_9 - p_9(+\infty)]$$

Для полного исследования асимптотики решения (2.1) за точкой отрыва необходимо еще рассмотреть область 10, лежащую у стенки, на которой выполняется условие прилипания. Это даст возможность получить распределение трения.

Сравнение с областью 9, определяющее масштаб u_{10} , и внешнее краевое условие из (2.9), а также условие равенства порядков главных вязких и инерционных членов позволяют ввести следующие переменные:

$$X_{10} = \varepsilon^{-\alpha} x_{10}, \quad Y_{10} = \varepsilon^{-3/4-2/3\alpha} y_{10}, \quad U_{10} = \varepsilon^{1/3\alpha-1/2} u_{10}$$

$$V_{10} = \varepsilon^{2/3\alpha-5/4} v_{10}, \quad P_{10} = P_9, \quad \rho_{10} = \rho_6, \quad \mu_{10} = \mu_6$$

При подстановке в (2.1) и предельном переходе $\varepsilon \rightarrow 0$ получаются обычные уравнения несжимаемого пограничного слоя, которые для краткости опущены. Краевые условия имеют вид

$$U_{10}(X_{10}, +\infty) = -KX_{10}^{-1/3},$$

$$U_{10}(X_{10}, 0) = V(X_{10}, 0) = 0 \quad (2.10)$$

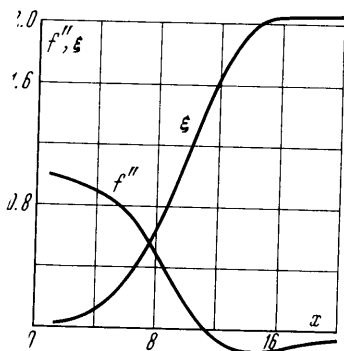
Задача автомодельна; решение имеет вид

$$U_{10} = -U_{10}(X_{10}, +\infty)\varphi_{10}'(\eta_{10}),$$

$$\eta_{10} = (K/3\nu_6)^{1/2} Y_{10} X_{10}^{-2/3} \quad (2.11)$$

$$\varphi_{10}''' - \varphi_{10}\varphi_{10}'' + (1 - \varphi_{10}'^2) = 0,$$

$$\varphi_{10}(0) = \varphi_{10}'(0) = 0, \quad \varphi_{10}'(\infty) = 1$$



Фиг. 4

Уравнение (2.11) отличается от уравнения (1.6) лишь коэффициентом при третьем члене, что вызвано различием в законе затухания скорости. Подсасывающее действие зоны смещения оказывается более слабым, так как на ее внешней границе скорость «внешнего» течения мала и отлична от нуля лишь производная по y . Численные результаты для (2.11) приведены на фиг. 2 пунктирными линиями. Таким образом, асимптотическое поведение при $X_6 \rightarrow +\infty$ для трения и давления имеет вид

$$\varepsilon^2 u_y(x, 0) \sim -\varepsilon^{7/4} x^{-1} \varphi_{10}''(0) (K^3/6\nu_6)^{1/2}, \quad p - p(+\infty) \sim -\varepsilon \rho_6 K^2 / 2x^{2/3} \quad (2.12)$$

Краевая задача (2.1) была решена численно. На фиг. 4 приведены результаты с использованием найденного асимптотического поведения при $X_6 \rightarrow +\infty$.

3. Найденные в предыдущем разделе решения справедливы в диапазоне значений $\varepsilon^{3/4} \ll x \ll 1$. Если зона отрыва имеет конечную длину и существует область присоединения, то найденные решения описывают переход от области свободного взаимодействия к окрестности критической точки возвратного течения. Давление в критической точке возвратного течения и есть получающееся при экспериментальных исследованиях давление в плато. Величина его согласно решению задачи (2.1) равна

$$C_p = 2.16C_f^{1/2} / (M_1^2 - 1)^{1/4} \quad (3.1)$$

Здесь C_p — значение коэффициента давления в области плато, а C_f — значение коэффициента сопротивления трения для невозмущенного пограничного слоя.

Корреляция экспериментальных данных, проведенная в работе [7], отличается от (3.1) значением численного коэффициента, равного 2.08.

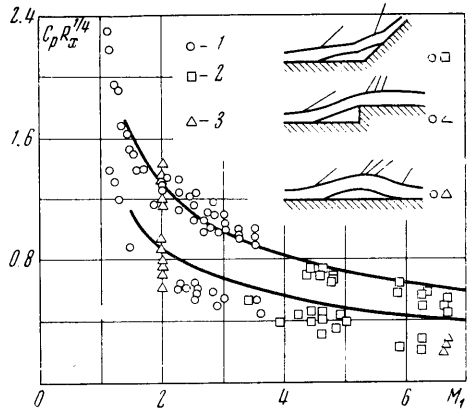
Для теории первого приближения совпадение с экспериментом можно считать удовлетворительным. Попытки рассчитать давление плато с использованием интегральных уравнений пограничного слоя не дают удовлетворительных результатов.

Течение в основной части ограниченной зоны отрыва изучено в работе [3]. Если зона отрыва бесконечна, то решение, полученное в п. 2, можно продлить и в область $x \sim 1$. Легко можно было бы показать, что в этом случае роль зоны смещения δ играет уже весь пограничный слой 3. В качестве начальных условий дол-

жен использоваться профиль невозмущенного пограничного слоя перед точкой отрыва, поскольку перепад давлений около точки отрыва $O(\varepsilon^{1/2})$ и не меняет в первом приближении распределения скорости там, где $u \sim O(1)$. Задача оказывается неавтомоделной. Поэтому неавтомоделными будут решения в невязкой области возвратных течений 0 и пограничном слое 4. Однако при $x \rightarrow +\infty$, т. е. на расстояниях, значительно больших, чем длина участка пластины от носка до точки отрыва, решение стремится к автомоделному.

Для получения неавтомоделного решения (и автомоделной асимптотики) можно было бы воспользоваться результатами расчетов неавтомоделной зоны смещения, приведенными в работе [8]. Поскольку наклон разделительной линии тока к стенке $\sim \varepsilon^{1/2}$, то решение для невязкой области возвратных течений можно было бы выписать в квадратурах.

4. На фиг. 5 приведено сравнение результатов расчета с экспериментальными данными, собранными в работе [7] (1 — данные Чепмена, Куна и Ларсона (1958), 2 — данные Стерретта и Эмори (1960), 3 — данные Хаккинена, Гребера, Триллинга и Абарбанела (1959)). Верхняя кривая для давления в области плато зоны отрыва получена по формуле (3.1) и хорошо согласуется с результатами эксперимента. Нижняя кривая для давления в точке отрыва определена по формуле (3.1) при значении численного коэффициента 1.46. Она идет на $10 \div 20\%$ выше нижней группы экспериментальных точек. Положение точки отрыва в этих экспериментах определялось по линии накопления масла, нанесенного на поверхность модели перед экспериментом. Но на линии, где масло покоится, существует положительный градиент давления. Поэтому положение равновесия должно лежать не в точке отрыва, а немного выше по течению, где напряжение трения еще положительное. Действительное положение точки отрыва в эксперименте лежит чуть ниже по течению в области более высокого значения давления и, вероятно, лучше соответствует нижней расчетной кривой.



Фиг. 5

Поступило 2 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
2. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation. Proc. Roy. Soc., 1969, A, 312, pp. 181—208.
3. Нейланд В. Я. К асимптотической теории плоских стационарных сверхзвуковых течений со срывными зонами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
4. Charman D. R. Laminar mixing of a compressible fluid. NASA Rept. 958, 1950.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
6. Нейланд В. Я. О решении уравнений ламинарного пограничного слоя при произвольных начальных условиях. ПММ, 1966, т. 30, № 4.
7. Erdos I., Pallone A. Shock-boundary layer interaction and flow separation. Proc. 1962 Heat Trans. and Fluid Mech. Inst., Stanford, 1962.
8. Denison M. R., Baum E. Compressible free shear layer with finite thickness. Inst. Aeronaut. Sci. Paper, 1961, No. 62.