

## РАСЧЕТ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ V-ОБРАЗНЫХ КРЫЛЬЕВ МЕТОДОМ УСТАНОВЛЕНИЯ

В. И. ЛАПЫГИН

(Москва)

Решена задача об обтекании V-образного крыла со сверхзвуковыми передними кромками. Для решения используется метод установления по пространственной переменной, по которой система уравнений движения гиперболична, с использованием разностной схемы В. В. Русанова. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными по распределению давления вдоль размаха крыла показывает хорошее совпадение экспериментальных и расчетных данных, за исключением ограниченной области, в которой происходит взаимодействие падающего на плоскость крыла скачка уплотнения с пограничным слоем. Сравнение результатов, полученных по формулам косоугольного скачка, с численными расчетами указывает на хорошую точность метода.

Экспериментально установлено, что при обтекании V-образных крыльев, начиная с некоторого угла V-образности, в поле течения образуется сложная система ударных волн [1, 2]. Методов расчета подобных течений в настоящее время не существует, за исключением некоторых частных случаев [3, 4].

Единственным эффективным средством исследования течений, характеризующихся наличием нескольких ударных волн, является метод установления с использованием разностных схем, содержащих «искусственную вязкость», которая впервые была введена Нейманом и Рихтмайером [5].

Для расчета сложных пространственных течений с большим числом ударных волн использование обычной процедуры метода установления (стационарное решение получается как предел нестационарного при большом числе шагов по времени  $t$ ) практически невозможно ввиду ограниченной памяти и быстродействия современных ЭВМ.

Известны лишь отдельные примеры расчета пространственного обтекания гладких тел методом установления при наличии одной головной ударной волны и достаточно гладком изменении параметров от волны к телу. Гладкость изменения параметров течения от волны к телу позволяла брать небольшое число сеточных точек в этом направлении, что и обеспечило успеха проведенных расчетов [6-8].

Важный класс пространственных течений представляют собой сверхзвуковые стационарные конические течения. Уравнения движения здесь гиперболичны по одной из пространственных координат  $\xi$ , которую можно выбрать таким образом, что течение не зависит от этой координаты.

Здесь напрашивается идея расчета таких течений с использованием установления по  $\xi$ . Исследованию применения такого подхода на примере обтекания V-образного крыла под углом атаки посвящена данная работа.

**1. Основные уравнения и разностная схема.** Рассмотрим стационарное обтекание V-образного крыла под углом атаки  $\alpha$  (фиг. 1). Задачу будем решать в смешанной системе координат: компоненты вектора скорости  $u, v, w$  вычисляются в декартовых координатах  $x, y, z$ , а задачу будем решать в координатах

$$\xi = \ln x, \quad \eta = y/x, \quad \zeta = z/x$$

Уравнения движения в дивергентной форме в координатах  $\xi, \eta, \zeta$  принимают вид

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}(F^v - \eta f) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(F^z - \zeta f) + 2f = 0 \quad (1.1)$$

$$f = \begin{Bmatrix} \Omega \\ R \\ S \\ T \\ E \end{Bmatrix}, \quad F^v = \begin{Bmatrix} S/u \\ R - \Omega u + S^2/\Omega u \\ TS/\Omega u \\ ES/\Omega u \end{Bmatrix}, \quad F^z = \begin{Bmatrix} T/u \\ T \\ TS/\Omega u \\ R - \Omega u + T^2/\Omega u \\ ET/\Omega u \end{Bmatrix}$$

$$\Omega = \rho u, \quad R = p + \rho u^2, \quad S = \rho uv, \quad T = \rho uw$$

$$E = \rho u(e + p/\rho + (u^2 + v^2 + w^2)/2)$$

Здесь  $u, v, w$  — составляющие вектора скорости по осям  $x, y, z$  соответственно;  $e$  — внутренняя энергия газа.

Ниже рассматривается совершенный газ

$$e = \frac{p}{(k-1)\rho}, \quad k = \frac{c_p}{c_v}$$

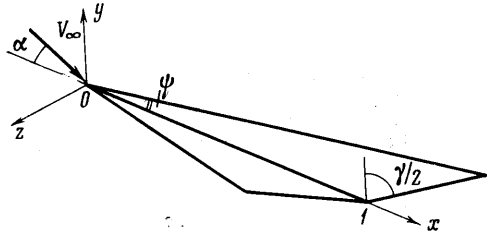
Система (11) записана в безразмерной форме: компоненты скорости отнесены к величине модуля скорости невозмущенного потока, давление — к удвоенному скоростному напору невозмущенного потока  $\rho_\infty V_\infty^2$ , плотность — к плотности невозмущенного потока  $\rho_\infty$ .

Введем также в рассмотрение вектор-столбец  $\phi$  с элементами  $u, v, w, p, \rho$ , которые однозначно выражаются через компоненты вектора  $f$

$$\begin{aligned} u &= kR [(k+1)\Omega]^{-1} + \{k^2 R^2 [(k+1)\Omega]^{-2} - 2(k-1) [E\Omega^{-1} - (S^2 + T^2) / 2\Omega^2] (k+1)^{-1/2}\} \\ v &= S / \Omega, \quad w = T / \Omega, \\ p &= R - \Omega u, \quad \rho = \Omega / u \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ось  $x$  выбирается таким образом, что  $u > a$

$$a^2 = kp / \rho$$



Фиг. 1

Граничные условия принимают следующий вид:

на поверхности крыла  $\psi(\xi, \eta, \zeta) = \eta - g(\zeta) = 0$  имеем условие непротекания

$$(v - u\eta) - (w - u\zeta)g' = 0 \quad (1.3)$$

на плоскости симметрии  $\zeta = 0$

$$w = 0 \quad (1.4)$$

на бесконечности перед телом

$$u = \cos \alpha, \quad v = -\sin \alpha, \quad w = 0, \quad p = \frac{1}{kM_\infty^2}, \quad \rho = 1 \quad (1.5)$$

Краевая задача (1.1), (1.3) — (1.5) решалась методом установления по  $\xi$ . В расчетах использовалась разностная схема В. В. Русанова [9]. Анализ нескольких разностных схем метода установления, проведенный в [10], показывает, что схемы В. В. Русанова и Лакса — Вендроффа дают похожие результаты, при этом затраты машинного времени при использовании схемы В. В. Русанова в несколько раз меньше, чем при использовании схемы Лакса — Вендроффа.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= \tau, & \Delta \zeta &= h_1, & \Delta \eta &= h_2, & h &= \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \\ h_1 &= h \cos \chi, & h_2 &= h \sin \chi, & \kappa_i &= \tau / h_i, & \kappa &= \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} \end{aligned}$$

Значение величины  $A$  в узле с координатами  $(n\tau, lh_2, mh_1)$  будем обозначать  $A_{l,m}^n$ .

Ограничимся случаем, когда поверхности  $V$ -образного крыла плоские и след плоскости крыла на плоскость  $x = \text{const}$  проходит через точки сетки по диагоналям ячеек (фиг. 2).

Систему (1.1) аппроксимируем трехточечной разностной схемой согласно [9]

$$\begin{aligned} f_{l,m}^{n+1} &= f_{l,m}^n - \frac{\kappa_2}{2} \{(F^y - \eta f)_{l+1,m} - (F^y - \eta f)_{l-1,m}\}^n - \frac{\kappa_1}{2} \{(F^z - \zeta f)_{l,m+1} - \\ &- (F^z - \zeta f)_{l,m-1}\}^n + \frac{1}{2} \{\Phi_{l+1/2,m}^y - \Phi_{l-1/2,m}^y + \Phi_{l,m+1/2}^z - \Phi_{l,m-1/2}^z\} - 2\tau^n f_{l,m}^n \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{l+1/2,m}^y &= 1/2 (\beta_{l+1,m} + \beta_{l,m}) (f_{l+1,m} - f_{l,m}), & \beta_{l,m} &= \kappa \omega \sigma_{l,m} \cos^2 \chi \\ &(\omega = \text{const}) \\ \Phi_{l,m+1/2}^z &= 1/2 (\alpha_{l,m+1} + \alpha_{l,m}) (f_{l,m+1} - f_{l,m}), & \alpha_{l,m} &= \kappa \omega \sigma_{l,m} \sin^2 \chi \\ \sigma_{l,m} &= \left\{ \frac{1}{u^2 - a^2} [u(v^2 + w^2)^{1/2} + a(u^2 + v^2 + w^2 - a^2)^{1/2}] \right\}_{l,m} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Анализ устойчивости разностной схемы (1.6) проводился по методу Фурье. Условие устойчивости имеет вид

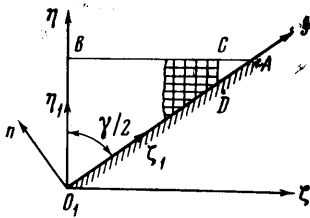
$$\sigma_0 < \omega < \frac{1-\tau}{\sigma_0} \quad (\sigma_0 = \max_{l,m} \sigma_{l,m}, \sigma_0 < 1) \quad (1.8)$$

Значение  $\sigma_0$  можно задать заранее одинаковым для всех слоев, затем выбрать  $\omega$  и на каждом слое определять  $\kappa^n$  и соответственно  $\tau^n$  по формулам

$$\kappa^n = \sigma_0 / \max_{l,m} \sigma_{l,m}^n, \quad \tau^n = \kappa^n h_1 h_2 / h$$

При расчете выбор  $\kappa^n$  на каждом слое легко автоматизировать. Тогда для обеспечения устойчивости достаточно, чтобы постоянные параметры схемы  $\sigma_0$  и  $\omega$  удовлетворяли условию (1.8).

**2. Расчетные формулы.** Точка  $O_1$  (фиг. 2) принадлежит как оси симметрии, так и плоскости крыла. Из (1.3), (1.4) следует, что  $T_{0,0} = S_{0,0} = 0$  и в этой точке необходимо определять только первую, вторую и пятую компоненты вектора  $f$ . При получении расчетной формулы использовался переход к косоугольной системе координат (фиг. 2)



Фиг. 2

$$\xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1 + \zeta_1 \sin \chi, \quad \zeta = \zeta_1 \cos \chi$$

Формула имеет вид

$$\begin{aligned} & (\kappa^n)^{-1} [f_{0,0}^{n+1} - (1 - 2\tau^n) f_{0,0}^n] = \\ & = -\sin \chi (F^z - \zeta f)_{1,1}^n - \cos \chi (F^y - \eta f)_{1,0}^n + \\ & + 1/4 \omega \cos^2 \chi \sin^2 \chi (\sigma_{1,1} - \sigma_{0,0})^n (f_{1,1} - f_{0,0})^n \end{aligned}$$

Точка на плоскости симметрии  $\zeta = 0$ .

Из граничного условия (1.4) следует, что  $T_{l,0} = 0$ , поэтому в этой точке определяются все компоненты вектора  $f$ , кроме четвертой

$$\begin{aligned} & (\kappa^n)^{-1} [f_{l,0}^{n+1} - (1 - 2\tau^n) f_{l,0}^n] = -\sin \chi (F^z - \zeta f)_{l,1}^n - 1/2 \cos \chi \{ (F^y - \eta f)_{l+1,0}^n - \\ & - (F^y - \eta f)_{l-1,0}^n \} + 1/2 \omega \sin^2 \chi (\sigma_{l,1} + \sigma_{l,1}) (f_{l,1} - f_{l,0})^n + \\ & + 1/4 \omega \cos^2 \chi \{ (\sigma_{l+1,0} + \sigma_{l,0}) (f_{l+1,0} - f_{l,0}) - (\sigma_{l,0} + \sigma_{l-1,0}) (f_{l,0} - f_{l-1,0}) \}^n \end{aligned}$$

Точка на плоскости крыла.

При выводе формулы использован переход к новой системе координат в окрестности плоскости крыла (фиг. 2)

$$\xi_1 = \xi, \quad s = \zeta \cos \chi + \eta \sin \chi, \quad n = -\zeta \sin \chi + \eta \cos \chi$$

$$\begin{aligned} & (\kappa^n)^{-1} [f_{l,l}^{*n+1} - f_{l,l}^{*n} (1 - 2\tau^n)] = -1/2 \sin \chi \cos \chi \{ (F^{**} - \zeta^* f^*)_{l+1,l+1} - \\ & - (F^{**} - \zeta^* f^*)_{l-1,l-1} \}^n - \{ (F^{**} - \eta^* f^*)_{l,l-1} \sin^2 \chi + (F^{**} - \eta^* f^*)_{l,l+1} \cos^2 \chi \}^n + \\ & + 1/4 \omega \sin^2 \chi \cos^2 \chi \{ (\sigma_{l+1,l+1} + \sigma_{l,l}) (f_{l+1,l+1}^* - f_{l,l}^*) - (\sigma_{l,l} + \sigma_{l-1,l-1}) (f_{l,l}^* - f_{l-1,l-1}^*) \}^n. \end{aligned}$$

Все величины, отмеченные знаком \*, считаются по тем же формулам, что соответствующие величины без этого знака с заменой везде  $v, w, \eta, \zeta$  на

$$\begin{aligned} v^* &= -w \sin \chi + v \cos \chi, & w^* &= w \cos \chi + v \sin \chi \\ \eta^* &= -\zeta \sin \chi + \eta \cos \chi, & \zeta^* &= \zeta \cos \chi + \eta \sin \chi \end{aligned}$$

Третья компонента вектора  $f_{l,l}^*$  не считается, так как из граничного условия (1.3)  $S_{l,l}^* = 0$ .

После определения  $f_{l,l}^*$  вектор  $f_{l,l}$  находится по формулам

$$\begin{aligned} \Omega_{l,l} &= \Omega_{l,l}^*, & R_{l,l} &= R_{l,l}^*, & S_{l,l} &= T_{l,l}^* \sin \chi \\ T_{l,l} &= T_{l,l}^* \cos \chi, & E_{l,l} &= E_{l,l}^* \end{aligned}$$

Внутренняя точка поля течения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\chi^n} [f_{l,m}^{n+1} - (1 - 2\tau^n) f_{l,m}^n] &= \frac{-1}{2} \sin \chi \{ (F^z - \zeta f)_{l,m+1} - (F^z - \zeta f)_{l,m-1} \}^n - \\ - \frac{1}{2} \cos \chi \{ (F^y - \eta f)_{l+1,m} - (F^y - \eta f)_{l-1,m} \}^n &+ \frac{1}{4} \omega \sin^2 \chi \{ (\sigma_{l,m+1} + \sigma_{l,m}) (f_{l,m+1} - f_{l,m}) - \\ - (\sigma_{l,m} + \sigma_{l,m-1}) (f_{l,m} - f_{l,m-1}) \}^n &+ \frac{1}{4} \omega \cos^2 \chi \{ (\sigma_{l+1,m} + \sigma_{l,m}) (f_{l+1,m} - f_{l,m}) - \\ - (\sigma_{l,m} + \sigma_{l-1,m}) (f_{l,m} - f_{l-1,m}) \}^n \end{aligned}$$

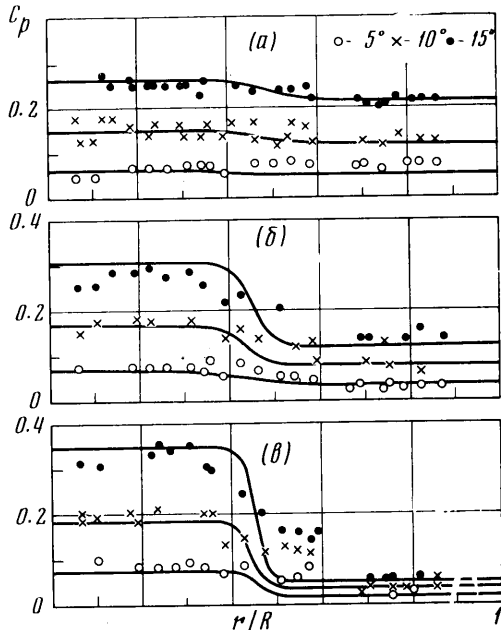
Расчетная область представляла собой прямоугольную трапецию  $O_1DCB$  (фиг. 2). На границе  $BC$  в процессе счета сохранялись значения параметров невозмущенного потока, на границе  $DC$  — значения параметров, соответствующие обтеканию передней кромки с присоединенным слабым косым скачком; на стенке  $O_1D$  — условие непротекания, на плоскости симметрии  $O_1B$  —  $w = 0$ . В качестве нулевого приближения использовалось поле потока за плоским скачком, присоединенным к передней кромке  $V$ -образного крыла. Решение считалось установившимся, если

$$\max_{l,m} \{ (f_{l,m}^{n+1} - f_{l,m}^n) / f_{l,m}^n \} \leq \epsilon$$

для всех компонент вектора  $f$  (в проведенных расчетах  $\epsilon \approx 10^{-2} \div 10^{-3}$ ).

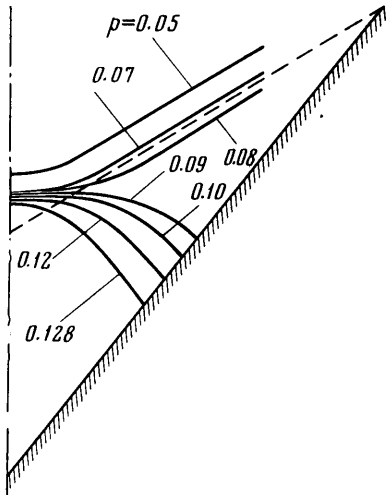
Расчеты были проведены на ЭВМ БЭСМ-6. Число точек в поле течения во всех рассчитанных вариантах равно 1254, что соответствует 50 сеточным точкам на стороне угла  $BO_1A$  (фиг. 2). В зависимости от углов  $\gamma$  и  $\alpha$  число циклов установления колебалось от 500 до 1500. Время счета одного варианта при числе циклов установления 1500 составляло 50 мин.

**3. Результаты расчетов.** Для проверки эффективности метода было проведено сравнение результатов расчетов по предложенной схеме с экспериментальными исследованиями, проведенными А. Л. Гонором и А. И. Швецом. Сравнение проводилось для крыла с углом при вершине  $\psi = 29^\circ 30'$  при различных значениях угла  $V$ -образности и  $M_\infty = 3.95$ . Число Рейнольдса в эксперименте —  $Re = 6.8 \cdot 10^6$ . На фиг. 3 представлены распределение давления  $C_p = 2(P - P_\infty) / \rho_\infty V_\infty^2$ , полученное расчетным путем (сплошные линии), и экспериментальные данные. На графиках  $r$  — расстояние от плоскости симметрии до точки на поверхности крыла,  $R$  — расстояние от плоскости симметрии до кромки крыла. На фиг. 3, *a* представлены данные для  $\gamma = 120^\circ$ , на фиг. 3, *б* — для  $\gamma = 80^\circ$  и на фиг. 3, *в* — для  $\gamma = 40^\circ$ . Расчеты проведены для углов атаки  $\alpha = 5, 10, 15^\circ$ . Наблюдается хорошее соответствие экспериментальных и расчетных данных, за исключением области перед скачком уплотнения, падающим на стенку, в которой эксперимент показывает давление, существенно большее по сравнению с расчет-

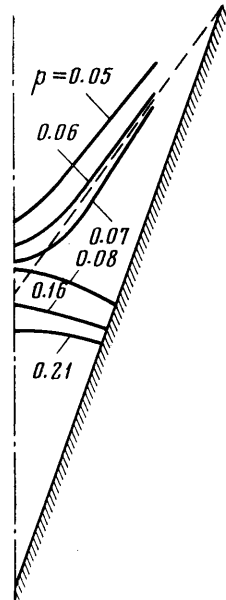


Фиг. 3

лыми данными. Такое повышение давления отмечалось в работе [11] и объясняется взаимодействием падающего на стенку скачка уплотнения с пограничным слоем [12]. На фиг. 4 приведены изобары для  $\gamma = 80^\circ$ ,  $\alpha = 10^\circ$ . Характер изобар указывает на режим обтекания с маховским отражением скачка, падающего с передней кромки крыла, от плоскости симметрии. На фиг. 5 приведены изобары для  $\gamma = 40^\circ$ ,  $\alpha = 15^\circ$ , характер которых указывает на режим обтекания с регулярным отражением плоского скачка от плоскости симметрии. Результаты расчета регулярного отражения от косоуго скачка для  $\gamma = 40^\circ$ ,  $\alpha = 15^\circ$ , отличаются от результатов численного расчета для  $p$  и  $\rho$  не более чем на 3%. Пунктирной линией на фиг. 4, 5 показано положение плоского скачка, падающего на плоскость симметрии с передних кромок V-образного крыла.



Фиг. 4



Фиг. 5

В заключение отметим, что значения компонент вектора  $\bar{\varphi}$  за плоским скачком, образующимся на передней кромке, полученные при численном счете, отличаются от значений, полученных по формулам косоуго скачков, не более чем на 3%. Размазывание скачка не превышает 5—6 сеточных точек.

Автор признателен А. Л. Гонору и В. В. Русанову за внимание к работе.

Поступило 20 VIII 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л., Швеиц А. И. Исследование системы скачков при обтекании звездообразных тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
2. Гонор А. Л., Швеиц А. И. Обтекание V-образных крыльев сверхзвуковым потоком при числе  $M=3.9$ . Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
3. Гонор А. Л. Точное решение задачи обтекания некоторых пространственных тел сверхзвуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
4. Гонор А. Л. Некоторые пространственные течения с маховским взаимодействием ударных волн. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
5. Von Neumann J., Richtmyer R. D. A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks. J. Appl. Phys., 1950, vol. 21, No. 3, p. 232.
6. Moretti G., Abett M. A time-dependent computational method for blunt body flows. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 12.
7. Bohachevsky I. O., Mates R. E. A direct method for calculation of the flow about an axisymmetric blunt body at angle of attack. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 5.

8. Русанов В. В. Пространственное обтекание затупленного тела сверхзвуковым потоком газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 3.
9. Русанов В. В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 2.
10. Emery A. F. An evaluation of several differencing method for inviscid fluid flow problems. J. comput. Phys., 1968, vol. 2, No. 3.
11. Зайцев Ю. И., Келдыш В. В. Особые случаи течения вблизи сверхзвуковой кромки и линии пересечения скачков уплотнения. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1.
12. Панов Ю. А. Взаимодействие падающего трехмерного скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.

УДК 532.529.2

## КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. ШТЕЙНБЕРГ

(Москва)

Показано, что в сжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости неустойчивость колебательного типа может иметь место только вблизи критической точки жидкость — пар, где термодинамические производные, входящие в критерий устойчивости, имеют особенности. Получены выражения для критерия колебательной неустойчивости и частоты нейтральных колебаний.

1. В отличие от несжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости, где, как известно [1], возможна только стационарная конвекция, система уравнений конвекции в сжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости, как можно легко показать, несамосопряженная и может иметь комплексные собственные значения, т. е. допускать кроме стационарной и колебательную конвективную неустойчивость. Стационарная конвекция в сжимаемой жидкости рассматривалась ранее в [2], при этом предполагалось, что наступающая неустойчивость является стационарной («принцип изменения устойчивости»). Ниже исследуется возможность и условия существования колебательной конвективной неустойчивости в сжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости.

В настоящее время известен целый ряд систем, в которых предсказывалась и наблюдалась конвективная неустойчивость колебательного типа. Существование колебательной ветви в спектре неустойчивости связано в каждом конкретном случае со своим дополнительным механизмом релаксации, ответственным за возникновение колебательной неустойчивости. Так, для бинарной смеси этим дополнительным фактором является соотношение между временами релаксации концентрации и температуры; для плоского слоя жидкости, находящегося в поперечном магнитном поле, — соотношение между временами релаксации магнитного момента и температуры; для плоского слоя вращающейся вокруг вертикальной оси жидкости — соотношение между временами релаксации вихря и температуры и, наконец, для вязко-упругой максвелловской жидкости соответствующим дополнительным фактором является соотношение между временами релаксации вязкого тензора напряжений и температуры. В каждом из этих случаев для каждого соотношения времен релаксации колебательная ветвь неустойчивости начинается только при определенном значении параметра, характеризующего дополнительный механизм релаксации и определяющего его существование в неустойчивости по сравнению с градиентом температуры (в рассмотренных примерах этим параметром является соответственно градиент концентрации — диффузионное число Рэлея, значение магнитного момента — число Гартмана, значение вращающего момента — число Тейлора и значение максвелловского времени релаксации вязкого тензора напряжения).

Из приведенных примеров видно, что еще один диссипативный механизм, связанный с коэффициентом объемной вязкости, оказался не исследованным — это механизм релаксации плотности.

Параметром, определяющим вклад в конвективную неустойчивость дополнительного механизма релаксации, является  $gl(\partial\rho/\partial p)_T$ . Очевидно, колебательная конвективная неустойчивость в сжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости может