УДК 533.6.011.3

# К ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ ОКОЛОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Н. Г. БОЛЬМАН (*Саратов*)

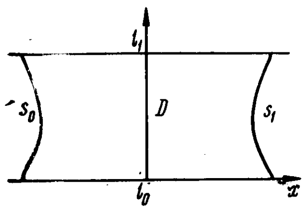
Рассматривается вопрос о единственности решений приближенного уравнения двумерных околозвуковых течений газа при некоторых граничных условиях. Ставится несколько краевых задач в определенном образом выбранной области и доказывается единственность их решения.

Уравнения Навье — Стокса для описания двумерных установившихся околозвуковых течений вязкого газа могут быть приближенно заменены квазилинейным уравнением для потенциала скоростей возмущения [1, 2]

$$\varphi_{xxx} + \varphi_{yy} + \omega y^{-1}\varphi_y - \varphi_x\varphi_{xx} = 0 \tag{1}$$

Здесь $\varphi$ — искомый потенциал скоростей возмущения, $x$, $y$ — ортогональные декартовы (для плоского течения) или цилиндрические (при симметрии течения относительно оси $x$) координаты, $\omega = 0$ для плоского течения и $\omega = 1$ для осесимметричного течения. Индексами внизу обозначены частные производные.

В работе [3] были найдены асимптотические законы затухания возмущений, вносимых телами вращения в равномерный звуковой поток диссипирующего газа. В основу было положено уравнение, в котором отброшен нелинейный член, соответствующий $\varphi_x\varphi_{xx}$ в уравнении (1). Квазилинейное уравнение (1) может быть сведено, как это делается в случае аналогичного невязкого течения [4, 5], к линейному уравнению, если положить




$$\varphi_{xx} = \mathrm{const} = \lambda > 0$$

$$\varphi_{xxx} + \varphi_{yy} + \omega y^{-1}\varphi_y - \lambda\varphi_x = 0 \tag{2}$$

Здесь нелинейный член уже не отбрасывается полностью, а линеаризуется.

При исследовании обтекания вязким газом плоских тел и тел вращения ставятся краевые задачи для уравнения (2). В частности, при обтекании тела вращения вязким газом краевые условия для уравнения (2) задаются следующим образом:

$$\varphi_x \to 0, \quad \varphi_y \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty \qquad\qquad \lim_{y\to 0} y\varphi_y = \begin{cases} R(x)R'(x) & \text{для} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{для} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_x \to 0, \quad \varphi_y \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty$$

где $y = R(x)$ — уравнение образующей тела. Таким образом, возмущения затухают вдали от тела, а на поверхности обтекаемого тела скорость направлена вдоль образующей.

В связи с этим возникает вопрос о единственности решения краевых задач для уравнения (2). В данной работе доказывается единственность решения некоторых краевых задач для уравнения (2) в определенном образом выбранной области $D$. Область $D$ (см. фигуру) ограничена частью оси $x$, двумя произвольными кривыми $s_0$ и $s_1$, отрезком прямой $l_1$, параллельным оси $x$. Если $\varphi$ и $\varphi_x$ заданы на границах $s_0$ и $s_1$, $\varphi_y$ задана на $s_0$ и $l_1$, а $[1+\omega(y-1)]\varphi_y$ на $l_0$, то решение уравнения (2) в области $D$ определено единственным образом. Ниже приводится доказательство этого утверждения.

Пусть $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — две функции, удовлетворяющие уравнению (2) в области $D$. Каждая из этих функций удовлетворяет граничным условиям рассматриваемой задачи. Тогда, обозначив $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$, имеем

$$\varphi_{xxx} + \varphi_{yy} + \omega\varphi_y / y - \lambda\varphi_x = 0 \tag{3}$$

$$\varphi|_{s_0+s_1} = 0, \quad \varphi_x|_{s_0+s_1} = 0, \quad \varphi_y|_{s_0+l_1} = 0, \quad [1+\omega(y-1)]\,\varphi_y|_{l_0} = 0 \tag{4}$$

Умножим (3) на $\varphi + \varphi_x$ и проинтегрируем по области $D$

$$\iint\limits_D \Big\{ [(\varphi+\varphi_x)\varphi_{xx}]_x - \left(\frac{\varphi_x^2}{2}\right)_x - \varphi_{xx}^2 + \frac{1}{1+\omega(y-1)}([1+\omega(y-1)]\,\varphi\varphi_y)_y - $$

$$- \varphi_y^2 - \lambda\left(\frac{\varphi^2}{2}\right)_x + \frac{1}{1+\omega(y-1)}([1+\omega(y-1)]\,\varphi_x\varphi_y)_y - \left(\frac{\varphi_y^2}{2}\right)_x - \lambda\varphi_x^2 \Big\}\, dx\, dy = 0 \tag{5}$$

Применение формулы Грина дает

$$\int\limits_{s_0+s_1} [1+\omega(y-1)]\left[(\varphi+\varphi_x)\varphi_{xx}-\frac{\varphi_x^2}{2}-\frac{\varphi_y^2}{2}-\lambda\frac{\varphi^2}{2}\right]dy-$$

$$-[1+\omega(y-1)]\int\limits_{l_0+l_1}\varphi_y(\varphi+\varphi_x)\,dx-\iint\limits_D[1+\omega(y-1)](\varphi_{xx}^2+\varphi_y^2+\lambda\varphi_x^2)\,dx\,dy=0. \quad (6)$$

После использования граничных условий (4) получается

$$\int\limits_{s_1}[1+\omega(y-1)]\frac{\varphi_y^2}{2}dy+\iint\limits_D[1+\omega(y-1)](\varphi_{xx}^2+\varphi_y^2+\lambda\varphi_x^2)\,dx\,dy=0 \quad (7)$$

Уравнение (7) справедливо при $\varphi_{xx}=\varphi_x=\varphi_y=0$ в области $D$. С учетом граничных условий $\varphi\equiv 0$ в $D$, что и доказывает единственность решения.

Если вместо условий (4) положить

$$\varphi|_{s_0}=0,\quad \varphi_x|_{s_0}=0,\quad \varphi_y|_{s_0+s_1+l_1}=0,\quad \varphi_{xx}|_{s_1}=0,\quad [1+\omega(y-1)]\,\varphi_y|_{l_0}=0 \quad (8)$$

то из (6) получается

$$\int\limits_{s_1}[1+\omega(y-1)]\frac{\varphi_x^2+\lambda\varphi^2}{2}dy+\iint\limits_D[1+\omega(y-1)](\varphi_{xx}^2+\varphi_y^2+\lambda\varphi_x^2)\,dx\,dy=0 \quad (9)$$

Отсюда $\varphi_x=\varphi_y=\varphi=0$ в $D$.

Решение уравнения (2) единственно, если на $s_0$ заданы $\varphi$, $\varphi_x$, $\varphi_y$, на $s_1$ заданы $\varphi_y$ и $\varphi_{xx}$, на $l_1$ задана $\varphi_y$ и $[1+\omega(y-1)]\,\varphi_y$ на $l_0$.

Если заменить условия (4) на

$$\varphi|_{s_1}=0,\ \varphi_x|_{s_1}=0,\ \varphi_y|_{s_0+s_1+l_1}=0,\ \varphi_{xx}|_{s_0}=0,\ [1+\omega(y-1)]\,\varphi_y|_{l_0}=0 \quad (10)$$

то аналогичное доказательство приводит вновь к единственности решения уравнения (2).

Если вместо граничных условий (4) задано

$$\varphi|_{s_0}=0,\ \varphi_x|_{s_0}=0,\ \varphi_y|_{s_0+l_1}=0,\ [1+\omega(y-1)]\,\varphi_y|_{l_0}=0 \quad (11)$$

то аналогично доказывается единственность решения (2) в области $D$, где границами $s_0$ и $s_1$ служат прямые, перпендикулярные оси $x$.

Доказательства остаются справедливыми, если границы $s_0$ и $s_1$ отодвигаются в бесконечность вдоль оси $x$ в отрицательном и положительном направлениях, а граница $l_1$ — в бесконечность вдоль оси $y$. Убедиться в этом можно предельным переходом, примененным к контурным интегралам в уравнении (6).

Таким образом, единственность решения задачи об обтекании тела вращения (как и плоского тела) равномерным звуковым потоком вязкого газа вытекает из доказанного выше как частный случай, так как доказательства проведены для менее жестких краевых условий. В работе рассмотрены всевозможные краевые условия, при которых единственность решения доказывается приведенным методом.

Автор благодарит С. В. Фальковича за советы и внимание к работе.

Поступило 10 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Hilton W. F. High — speed Aerodynamics. London, New York, Toronto, 1952. (Рус. перев. Аэродинамика больших скоростей. М., Изд-во иностр. лит., 1955, гл. 5, § 5.)
2. Szaniawsky A. Equations of transonic flow of a heat conducting fluid. Arch. Mech. Stosowanei, 1962, vol. 14, No. 6.
3. Рыжов О. С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
4. Oswatitsch K., Keune F. Flow around bodies of revolution at mach number one. Proc. Conf. on High-Speed Aeronaut., Polytechnic Institute of Brooklyn, January, 1955.
5. Maeder P. F., Thommen H. U. Some results of linearized transonic frow about slender airfoils and bodies of revolution. J. aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, pp. 187, 188.