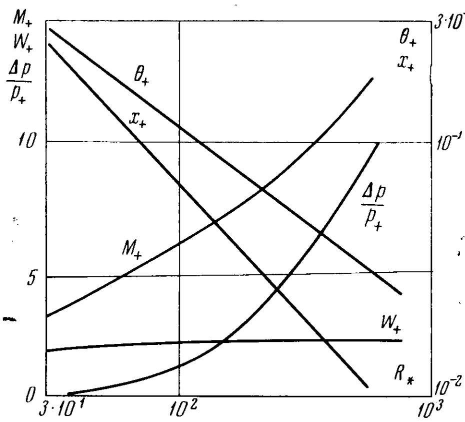
При больших значениях числа R_* сверхзвуковое течение оказывается близким к идеальному. Соответствующие поправки даны в работе [3]. В дозвуковой области течения при $\alpha = 1$ для параметров потока справедливы следующие асимптотические выражения:

$$w = ({}^2/_3 R \,/\, \gamma)^{1/2} x^{1/2}, \qquad \theta = 1 - {}^4/_3 \sigma (\gamma - 1) \gamma^{-1} R x \tag{3.1}$$

$$\rho^\circ = \left[\frac{3\gamma}{2R_*} \left(\frac{T_*}{T_\infty} \right) \right]^{1/2} x^{3/2}, \qquad p^\circ = \left[\frac{3\gamma}{2R_*} \left(\frac{T_\infty}{T_*} \right) \right]^{1/2} x^{3/2}$$

Процессы, протекающие в переходной области, аналогичны процессам в обычной ударной волне и связаны с необратимым переходом кинетической энергии упорядоченного движения газа в энергию беспорядочного теплового движения молекул. Однако в отличие от ударной волны повышение температуры в этой области вызывает возрастание только давления, изменение плотности здесь сохраняется монотонным.



Фиг. 4

Определим в заключение экстремальные значения скорости w_+, температуры θ_+ и числа Маха M_+ на границе переднего фронта x_+, а также относительное изменение давления $\Delta p \,/\, p_+$ при прохождении газа через переходную область. При $\alpha = n = 1$, $\gamma = 1.4$, $\sigma = 0.75$ эти данные в зависимости от числа R_* приведены на фиг. 4. При $R_* \to \infty$ координата $x_+ \to \infty$ и параметры $w_+ \to \sqrt{2 \,/\, (\gamma - 1)}$, $\theta_+ \to 0$, $M_+ \to \infty$. При уменьшении числа R_* координата $x_+ \to 1$, сверхзвуковая область уменьшается, пока при некотором конечном значении R_* течение всюду не станет дозвуковым.

Поступило 15 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженский М. Д. Об истечении вязкого газа в пустоту. ПММ, 1962, № 4.
2. Gusev V. N., Zhbakova A. V. The flow of viscous heat-conducting compressible fluid into the constant pressure medium. Sixth Internat. Sympos. on Rarefied Gas Dynamics, 1968.
3. Гусев В. Н. О влиянии вязкости в струйных течениях. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 6.
4. Гусев В. Н., Жбакова А. В. Об одном точном решении одномерных уравнений Навье — Стокса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.

УДК 533.6.01.011 : 51 533.6.01.011.35 533.6.01.011.72

К ТЕОРИИ «ПРОСТОЙ ВОЛНЫ» ФРИДРИХСА

В. И. ФИДРУС, Э. Г. ШИФРИН

(*Москва*)

Рассматривается задача о возникновении скачка уплотнения в стационарном течении типа простой волны, примыкающей к области равномерного сверхзвукового потока.

При построении скачка уплотнения принято использовать метод Фридрихса [1, 2], в основе которого лежит допущение о пренебрежимой малости возмущения, вносимого в поток ударной волной. При этом на течении типа простой волны удается провести кривую (скачок уплотнения), на которой условия Гюгонио удовлетворяются асимптотически (ударная поляра заменяется характеристикой).

Однако, как показано ниже, в области влияния скачка уплотнения точное решение типа простой волны не всегда является асимптотическим представлением решения соответствующей краевой задачи: вдоль характеристики AB (фиг. 1) при некоторых условиях может распространяться разрыв первых производных составляющих скорости.

Итак, рассмотрим течение типа простой волны при обтекании вогнутого профиля, касающегося в острие O направления набегающего равномерного потока. Прямолинейные характеристики первого семейства образуют огибающую. Обозначим через A точку пересечения огибающей с характеристикой OA, выходящей из острия профиля.

Найдем форму ударной волны AC и течение за ней в достаточно малом треугольнике ABC (BC и AB — характеристики первого и второго семейств).

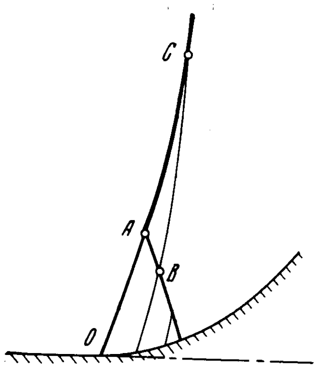
Будем решать задачу при малой сверхзвуковой скорости набегающего потока, когда изменения энтропии на ударной волне несущественны и применимы уравнения трансзвуковых течений.

В плоскости годографа скорости u, v ($\lambda = 1 + (k+1)^{-1/3}u$, λ — коэффициент скорости, v — угол наклона вектора скорости) имеем следующую краевую задачу для функции тока $\psi(u, v)$: найти решение уравнения Трикоми

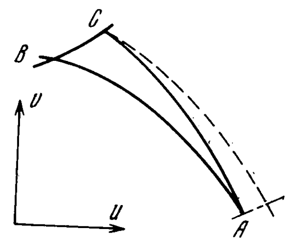
$$\psi_{uu} = u\psi_{vv} \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$\psi = f(v) \quad \text{на характеристике } AB, \qquad \psi_u = E\psi_v \quad \text{на ударной поляре} \tag{2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Область определения решения $\psi(u, v)$ содержит треугольник ABC (фиг. 2).

В трансзвуковой аппроксимации уравнения характеристик и ударной поляры в плоскости годографа

$$v = {}^2/_3 u^{3/2} + L, \qquad v = -{}^2/_3 u^{3/2} + M, \qquad v = \sqrt{{}^1/_2(u_\infty + u)}\,(u_\infty - u), \tag{3}$$

а коэффициент E в (2) задается формулой [3]

$$E = \sqrt{{}^1/_2(u_\infty + u)}\,(7u + u_\infty) \,/\, (5u + 3u_\infty)$$

Функция $f(v)$ на границе течения типа простой волны определяется формой профиля.

Будем использовать характеристические переменные L, M (3), а также λ, μ, определяемые формулами

$$\lambda = L + {}^1/_2 a, \qquad \mu = M - {}^1/_2 a, \qquad a = ({}^4/_3) u_\infty{}^{3/2} \tag{4}$$

В этих переменных уравнение (1) преобразуется в уравнение Эйлера — Дарбу

$$\psi_{LM} = {}^1/_6 (M - L)^{-1} (\psi_M - \psi_L) \tag{5}$$

уравнение ударной поляры и граничное условие на ней имеют соответствующий вид

$$\mu = \frac{\lambda^3}{27 \cdot 16a^2} + o(\lambda^3), \qquad \frac{\psi_\lambda}{\psi_\mu} = -\frac{\lambda^3}{27 \cdot 64a^3} + o(\lambda^3) \tag{6}$$

Определим $f(v)$. Уравнение прямых характеристик первого семейства простой волны (фиг. 1)

$$y = \tau(u)x + \beta(u) \tag{7}$$

Ограничимся случаем достаточное число раз дифференцируемой функции $\beta(u)$. Обозначим через β_i значение i-й производной при $u = u_\infty$; пусть $\beta_1 \neq 0$. Координаты точки A будут

$$x_A = 2(k+1)^{1/3} u_\infty^{3/2} \beta_1, \qquad y_A = 2u_\infty \beta_1 \tag{8}$$

На характеристике второго семейства

$$\begin{gathered} f = y - y_A + o(y - y_A) = \frac{1}{16u_\infty}\left(\beta_2 + \frac{3}{2}\frac{\beta_1}{u_\infty}\right)\lambda^2 - \\ - \frac{1}{96u^{3/2}_\infty}\left(\frac{15}{4}\frac{\beta_1}{u^2_\infty} - \beta_3\right)\lambda^3 + \frac{1}{16\cdot 48u^2_\infty}\left(\beta_4 + \frac{105}{8}\frac{\beta_1}{u^3_\infty}\right)\lambda^4 + o(\lambda^4) \end{gathered} \tag{9}$$

В этом соотношении справа нужно оставить только член низшего порядка малости по λ. Поэтому в общем случае

$$f = G\lambda^n + o(\lambda^n), \qquad n \geqslant 2 \tag{10}$$

Решение задачи Гурса для уравнения (5) при помощи функции Римана V (см., например, [4], стр. 55) представляется в виде (положим $\psi_A = 0$)

$$\begin{gathered} \psi(M,L) = \varphi(M)V(M,L_0;M,L) + f(L)V(M_0,L;M,L) + \int\limits_{M_0}^{M} \varphi(\xi)\left[\frac{V(\xi,L_0;M,L)}{6(\xi - L_0)} - \right. \\ \left. - V_\xi(\xi,L_0;M,L)\right]d\xi - \int\limits_{L_0}^{L} f(\eta)\left[\frac{V(M_0,\eta;M,L)}{6(M_0-\eta)} + V_\eta(M_0,\eta;M,L)\right]d\eta \\ V(\xi,\eta;M,L) = \frac{(\eta-\xi)^{1/3}}{(L-\xi)^{1/6}(\eta-M)^{1/6}} F\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},1,\frac{(\xi-M)(\eta-L)}{(\xi-L)(\eta-M)}\right) \end{gathered}$$

Здесь $f(L)$ дается формулой (10), а произвольная непрерывная функция $\varphi(M)$ обращается в нуль при $M = M_0$. Будем предполагать, что $\varphi(M)$ — монотонная функция. Используя теорему Боннэ о среднем значении и асимптотическое представление V при λ, $\mu \to 0$, получаем

$$\begin{gathered} \psi(M, L) = \varphi(\mu)V(M, L_0; M, L) + f(\lambda)V(M_0, L; M, L) + o(\varphi(\mu)) + o(\varphi(\lambda)) = \\ = \varphi(\mu) + f(\lambda) + o(\varphi(\mu)) + o(f(\lambda)) \end{gathered} \tag{11}$$

Аналогичным образом получаем асимптотические представления для производных ψ_M, ψ_L

$$\begin{gathered} \psi_M = \varphi'(\mu)V(M,L_0;M,L) + \varphi(\mu)V_M(M,L_0;M,L) + f(\lambda)V_M(M_0,L;M,L) + \\ + \frac{\varphi(\mu)}{6(M-L_0)}V(M,L_0;M,L) - \varphi(\mu)[V_\xi(\xi,L_0;M,L)]_{\xi=M} + o(\varphi(\mu)) + o(f(\lambda)) \\ \psi_L = f'(\lambda)V(M_0,L;M,L) + f(\lambda)V_L(M_0,L;M,L) + \varphi(\mu)V_L(M,L_0;M,L) - \\ - \frac{f(\lambda)}{6(M_0-L)}V(M_0,L;M,L) - f(\lambda)[V_\eta(M_0,\eta;M,L)]_{\eta=L} + o(\varphi(\mu)) + o(f(\lambda)) \end{gathered} \tag{12}$$

В этих выражениях под V, V_L, V_M понимаются их асимптотические представления при λ, $\mu \to 0$.

Определим функцию $\varphi(\mu)$ из условия на ударной поляре. Подставляя (12) в (7) и используя (6), (10), получаем при λ, $\mu \to 0$

$$\mu\varphi'(\mu) + {}^2/_3\,\varphi(\mu) + \mu^{1/3(n-1)}({}^3/_2)^{1/3(n-4)}8^n nGu_\infty^{n+1/2} = 0$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(\mu) = H\mu^{1/3(n-1)}, \qquad H = -3\cdot 8^n({}^3/_2)^{1/3(n-4)}\frac{n}{n+1}Gu_\infty^{n+1/2}$$

Отсюда по (11) имеем

$$\psi = G\lambda^n + H\mu^{1/3(n-1)} + o(\lambda^n) + o(\mu^{1/3(n-1)}) \tag{13}$$

Обозначим через u_σ, v_σ производные по направлению характеристики первого семейства. Покажем, что из (13) следует, что при $n \geqslant 4$ производные u_σ, v_σ отличны от нуля на характеристике AB.

Действительно, в трансзвуковом приближении

$$\partial(\cdot)/\partial\sigma = (k+1)^{1/3}\sqrt{u}\,\partial(\cdot)/\partial\varphi + \partial(\cdot)/\partial\psi,$$

где φ — потенциал скорости, ψ — функция тока. Подставляя производные u_φ, u_ψ, v_φ, v_ψ, выраженные через ψ_u, ψ_v, и используя формулы (3), (4), получаем

$$u_\sigma = \frac{1}{2\sqrt{u}\,\psi_\mu}, \qquad v_\sigma = \frac{1}{2\psi_\mu}$$

Таким образом, при $n \geqslant 4$ решение типа простой волны не является асимптотическим представлением точного решения за скачком уплотнения: так как в простой волне $u_\sigma = v_\sigma = 0$, порядки роста этих решений в окрестности характеристики AB различны.

Отметим, что это расхождение не сказывается при определении формы ударной волны (точнее говоря, кривизны скачка в точке A).

Обозначив $\varepsilon = u - u_\infty$, $Y = y - y_A$, по теории Фридрихса [1, 2] имеем

$$\varepsilon\frac{dY}{d\varepsilon} + 2Y = 4u_\infty\left[\varepsilon\left(\frac{3}{2}\frac{\beta_1}{u_\infty} + \beta_2\right) + \varepsilon^2\left(-\frac{3}{4}\frac{\beta_1}{u_\infty^2} + \frac{3}{4}\frac{\beta_2}{u_\infty} + \frac{\beta_3}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \varepsilon^3\left(\frac{9}{16}\frac{\beta_1}{u_\infty^3} - \frac{\beta_2}{4u_\infty^2} + \frac{\beta_3}{3u_\infty} + \frac{\beta_4}{6}\right) + \ldots\right] \tag{14}$$

Здесь в правой части следует оставить член низшего порядка малости по ε. Используя (3), (4), на ударной поляре получаем связь

$$\varepsilon = -4(3/2)^{1/3}u_\infty^{1/2}\mu^{1/3},$$

и из (14) последовательно имеем

$$\mu\frac{dY}{d\mu} + \frac{2}{3}Y = \mu^{1/3(n-1)}\frac{n+1}{3}H, \qquad Y = H\mu^{1/3(n-1)}$$

С другой стороны, это же выражение непосредственно следует из (13), (6) в связи с тем, что

$$Y = \psi - \psi_A + o(\psi - \psi_A)$$

Величину кривизны $\varkappa_A$ ударной волны в точке A можно найти из соотношения

$$\frac{dY}{ds} = \frac{dY}{d\mu}\frac{d\mu}{d\theta}\varkappa$$

где s — длина дуги скачка, θ — угол наклона скачка к оси абсцисс. Вычисляя производные, получаем

$$\varkappa_A = \frac{(k+1)^{1/3}(3/2)^{1/3}}{H(n-1)}\lim_{\mu\to 0}\mu^{1/3(2-n)}$$

Значение показателя n в (10) связано с формой предельной линии. Действительно, огибающая прямолинейных характеристик простой волны описывается уравнением (8) и уравнением, полученным из (8) дифференцированием по параметру

$$\tau'(u)x + \beta'(u) = 0 \tag{15}$$

При малых значениях $\varepsilon = u - u_\infty$ имеем

$$\tau(u) = \frac{1}{(k+1)^{1/3}\sqrt{u}} = \frac{1}{(k+1)^{1/3}\sqrt{u_\infty}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{u_\infty} + \frac{3}{8}\frac{\varepsilon^2}{u_\infty^2} - \frac{5}{16}\frac{\varepsilon^3}{u_\infty^3} + \ldots\right)$$

$$\beta(u) = \beta_1\varepsilon + \beta_2\frac{\varepsilon^2}{2} + \beta_3\frac{\varepsilon^3}{6} + \ldots$$

Используя эти и аналогичные им выражения для производных $\tau'(u)$, $\beta'(u)$, получаем уравнение огибающей характеристик в параметрической форме

$$x = (k+1)^{1/3} u_\infty^{3/2}\left[2\beta_1 + \varepsilon\left(3\frac{\beta_1}{u_\infty} + 2\beta_2\right) + \varepsilon^2\left(\frac{3}{4}\frac{\beta_1}{u_\infty^2} + 3\frac{\beta_2}{u_\infty} + \beta_3\right) + \ldots\right]$$

$$y = 2\beta_1 + \varepsilon(3\beta_1 + 2\beta_2 u_\infty) + \varepsilon^2\left(\frac{5}{2}\beta_2 + \beta_3 u_\infty\right) + \ldots$$

При $n = 2$ коэффициенты при ε отличны от нуля. При $n = 3$ коэффициенты при ε равны нулю, а коэффициенты при ε^2 не равны нулю. При $n = 4$ коэффициенты при ε и ε^2 равны нулю, а при ε^3 — не равны нулю и т. д.

Таким образом, если рассматривать простую волну вместе с ее аналитическим продолжением за характеристику OA по (8), то при $n = 2$ точка A будет регулярной **точкой огибающей.**

При $n = 3$ огибающая имеет в A точку возврата, при $n = 4$ точки возврата нет, но кривизна огибающей бесконечна и т. д.

Форма профиля, соответствующего простой волне (8), может быть найдена из уравнения

$$dy / dx = v \tag{16}$$

В простой волне

$$v = -\frac{2}{3}(u_\infty + \varepsilon)^{3/2} + \frac{2}{3}u_\infty = \varepsilon\sqrt{u_\infty} - \frac{\varepsilon^2}{4\sqrt{u_\infty}} + \frac{\varepsilon^3}{24u_\infty^{3/2}} + \ldots$$

Будем искать уравнение профиля в виде

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \ldots$$

Положим также

$$\varepsilon = ex + fx^2 + gx^3 + \ldots$$

Подставляя эти разложения в уравнения (8), (16), определяем коэффициенты $a, b, c, \ldots; e, f, g, \ldots$

$$e = -\frac{1}{R\beta_1}, \quad a = \frac{\sqrt{u_\infty}}{2R\beta_1}; \qquad R = (k+1)^{1/3}\sqrt{u_\infty}$$

$$f = \frac{a}{\beta_1} + \frac{e}{2Ru_\infty\beta_1} - \frac{\beta_2 e^2}{2\beta_1}, \qquad b = -\frac{1}{3}\left(f\sqrt{u_\infty} + \frac{e}{4\sqrt{u_\infty}}\right)$$

$$g = \frac{b}{\beta_1} + \frac{f}{2Ru_\infty\beta_1} - \frac{3e^2}{8Ru_\infty^2\beta_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1}ef - \frac{\beta_3}{6\beta_1}e^3$$

$$c = \frac{1}{4}\left(\frac{e^3}{24u_\infty^{3/2}} - \frac{ef}{2\sqrt{u_\infty}} - g\sqrt{u_\infty}\right)$$

Параметр a указывает масштаб.

При $n \geqslant 3$ получим

$$b = \frac{1}{3(k+1)^{2/3}u_\infty^{3/2}\beta_1^2} - \frac{\sqrt{u_\infty}}{6(k+1)^{1/3}\beta_1^2}$$

При $n \geqslant 4$, кроме того

$$c = \frac{1}{4\beta_1^3}\left[\frac{1}{R}\left(\frac{u_\infty}{3} - \frac{3}{4R\sqrt{u_\infty}}\right)\left(\sqrt{u_\infty} - \frac{2}{Ru_\infty}\right) + \frac{5}{24}\frac{1}{R^3u_\infty^{3/2}}\right]$$

Поступило 23 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrichs K. O. Formation and decay of shock waves. Communs Pure and Appl. Math., 1948, vol. 1, p. 211.
2. Общая теория аэродинамики больших скоростей. М., Воениздат, 1962.
3. Гудерлей К. Г. Теория околозвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения математической физики. М., Физматгиз, 1962.