УДК 533.6.011.8 : 532.525.2

ИСТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ГАЗА В ВАКУУМ

В. Н. ГУСЕВ, А. В. ЖБАКОВА

(*Москва*)

При помощи уравнений Навье — Стокса исследуется вязкое течение от сферического источника в предположении, что коэффициент вязкости зависит от температуры по степенному закону. В случае истечения газа в вакуум этот вопрос исследовался в работе [1], в которой был получен неожиданный результат: скорость газа на бесконечности стремилась к нулю. Настоящее исследование предпринято с целью понять причину этого неожиданного результата.

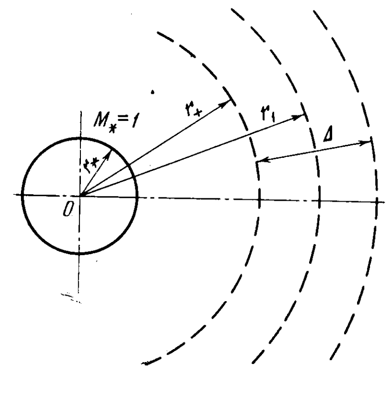
1. Рассмотрим установившееся сверхзвуковое истечение газа из сферической полости радиуса r_*, на которой число Маха $M_* = 1$, в пространство с постоянным давлением (фиг. 1). Течение будет происходить по радиусам из точек сферы с центром в начале координат и будет состоять из сверхзвуковой ($r_* < r < r_1$) и дозвуковой ($r > r_1$) областей, разделенных обычной ударной волной.

В случае идеального газа положение последней в зависимости от перепада давления $P_0 = p_0 / p_\infty$, где p_0 и p_∞ — соответственно давление торможения газа в полости и внешнее давление, куда истекает газ, определяется при помощи уравнения расхода и формулы для прямого скачка уплотнения

$$\frac{r_1}{r} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\varkappa} M_1^{-1/2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\varkappa}$$

$$\left(\varkappa = \frac{\gamma+1}{4(\gamma-1)}\right) \tag{1.1}$$

$$P_0 = \left\{\left[\frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2} - \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\frac{1}{M_1^2}\right] \times \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)\right\}^{\gamma/(\gamma-1)} \times \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right]^{-1}.$$



Фиг. 1

где M_1 — число Маха перед фронтом ударной волны, γ — отношение удельных теплоемкостей. В таком течении температура торможения газа $T_0 = \mathrm{const}$ всюду и совпадает с температурой газа на бесконечности T_∞, а давление торможения в дозвуковой области $p_0' = p_\infty$.

При наличии вязкости характер рассматриваемого здесь течения существенным образом изменяется. При степенной зависимости коэффициента вязкости μ от температуры T ($\mu \sim T^m$) этот вопрос при помощи уравнений Навье — Стокса рассматривался в работах [2, 3]. В них было показано, что диссипативные процессы прежде всего изменяют характер течения вблизи фронта ударной волны. Если в идеальном газе скачок уплотнения представлял собой некоторую нормальную к линиям тока поверхность разрыва, то при наличии вязкости ударная волна становится размытой, ее толщина — конечной и тем большей, чем больше перепад давления P_0. Нарушаются из-за растекания газа следующие из теории прямого скачка уплотнения соотношения для параметров потока на фронте ударной волны.

Влияние диссипативных процессов проявляется и в сверхзвуковой области течения при $r_* < r < r_+$, где r_+ — условно введенная в работе [3] граница переднего фронта ударной волны, на которой параметры потока экстремальны. Однако, как это следует из расчетов [2, 3], здесь оно мало, и течение в этой области остается близким к идеальному.

2. Исследуем асимптотическое поведение рассматриваемого здесь течения при $p_\infty \to 0$, соответствующее истечению газа в вакуум. Ранее этот вопрос рассматривался в работе [1], в которой было установлено, что вязкость и теплопроводность влияют на асимптотическое поведение решения для плоского и сферического источников существенно по-разному. Если для плоского сверхзвукового источника скорость на бесконечности стремится к величине, несколько меньшей, чем максимальная U_m, то в случае сферического источника эта скорость обращается в нуль.

Понять причину этого неожиданного результата можно при помощи следующих физических соображений. В случае идеального газа из соотношений (1.1) следует, что при $p_\infty \to 0$ координата фронта ударной волны $r_1 \to \infty$, скорость газа на бесконечности стремится к максимальной U_m, а давление p, плотность ρ и температура T — к нулю. Закономерность асимптотического поведения рассматриваемого течения при наличии вязкости может принципиально отличаться от закономерностей идеального случая, если при $p_\infty \to 0$ условно введенная граница переднего фронта ударной волны r_+ не будет стремиться к бесконечности, что, вообще говоря, возможно, так как толщина ударной волны при $p_\infty \to 0$ неограниченно возрастает. В этом случае асимптотическое поведение решения в окрестности бесконечно удаленной точки будет определяться особенностями структуры ударной волны, а не течением в сверхзвуковом источнике.

Чтобы подчеркнуть главную особенность этого отличия, перейдем к непосредственному анализу решения. Система одномерных уравнений Навье — Стокса для вязкого теплопроводного газа в случае сферической симметрии после исключения давления и плотности с помощью уравнений неразрывности $Q = 4\pi\rho u r^2$ и состояния $p = \rho RT$ записывается в виде [2]

$$(\gamma w^2 - \theta)\frac{dw}{dy} + w\frac{d\theta}{dy} + \frac{2w\theta}{y} = \\ = -\frac{\gamma w^2\theta^n}{C}\left(\frac{d^2w}{dy^2} - \frac{2w}{y^2}\right) - \frac{n\gamma w^2\theta^{n-1}}{C}\frac{d\theta}{dy}\left(\frac{dw}{dy} + \frac{w}{y}\right) \tag{2.1}$$

$$\theta + \frac{\gamma-1}{2}\left(1 + \frac{2\theta^n}{Cy}\right)w^2 + \frac{\theta^n}{C}\left[\frac{3}{4\sigma}\frac{d\theta}{dy} + (\gamma-1)w\frac{dw}{dy}\right] = \alpha$$

$$w = \frac{u}{(\gamma RT_\infty)^{1/2}}, \qquad \theta = \frac{T}{T_\infty}, \qquad y = \frac{l}{r}, \qquad l = \frac{Q^{1/2}(\gamma RT_\infty)^{1/4}}{(4\pi\gamma p_\infty)^{1/2}}$$

$$C = \frac{3Q}{16\pi\mu_\infty l}$$

Здесь u — скорость, Q — расход газа, R — газовая постоянная, σ — число Прандтля, α — константа, определяющая поток тепла q_0 в бесконечно удаленной точке; $\alpha = 1$ при $q_0 = 0$.

При истечении газа в пространство с постоянным давлением ($p_\infty = \mathrm{const}$) решение системы (2.1) дано в работах [2, 3]. Это решение в окрестности бесконечно удаленной точки $r = \infty$ ($y = 0$) имеет следующие разложения:

$$w = y^2(1 + a_1y + a_2y^2 + \ldots), \qquad \theta = 1 + b_1y + b_2y^2 + \ldots \tag{2.2}$$

Коэффициенты этих рядов однозначно определяются [4] через параметры C, α, γ, n, σ.

Кроме этого, система (2.1) допускает указанное в работе [1] решение, соответствующее истечению газа в вакуум.

Рассмотрим подробно этот случай. Принимая во внимание, что $C \to 0$ при $p_\infty \to 0$, перейдем в системе (2.1) к новой переменной $x = yy_*^{-1}$, где $y_* = lr_*^{-1}$. Тогда вместо C в систему (2.1) войдет новый безразмерный параметр

$$R = {}^3/_4 R_*(T_* / T_\infty)^n, \qquad R_* = \rho_* u_* r_* / \mu_*$$

Здесь R_* и T_* — число Рейнольдса и температура газа в критическом сечении при $r = r_*$. Этот параметр R при стремлении $p_\infty \to 0$ остается конечным, так как $T_\infty \neq 0$ [1]. Отметим, что в новой переменной система (2.1) не отличается от исходной после замены C на R.

Согласно [1] при $p_\infty = 0$ решение в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

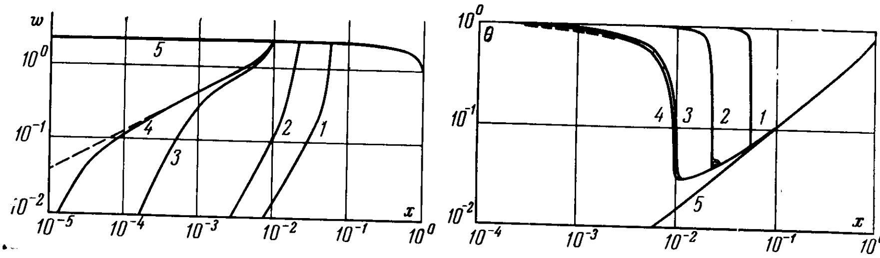
$$w = \sqrt{x}(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots), \qquad \theta = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \ldots \tag{2.3}$$

Из граничного условия для температуры $T = T_\infty$ при $x = 0$ следует $d_0 = 1$. Последующие коэффициенты этих рядов определяются однозначно через параметры R, α, γ, n, σ, например

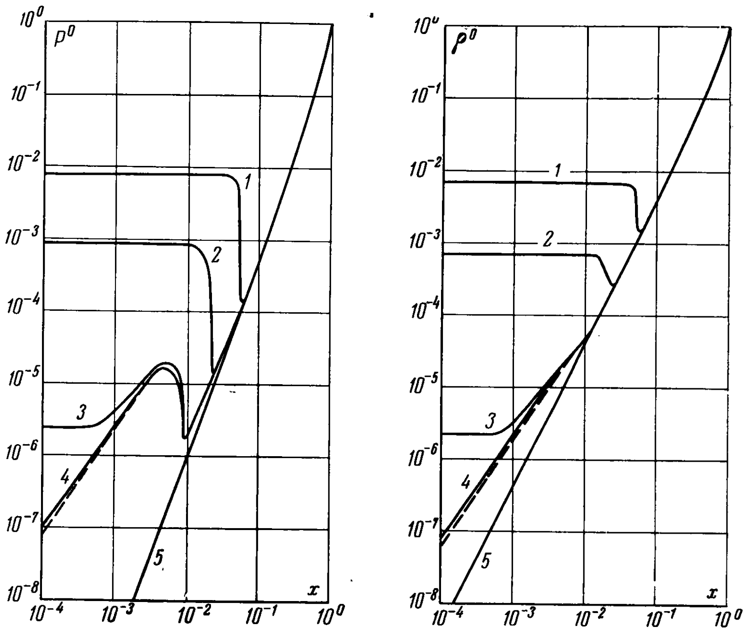
$$c_0 = \left(\frac{2R}{3\gamma}\right)^{-1/2}, \qquad d_1 = \frac{4\sigma R}{3}\left[\alpha - \frac{2\gamma-1}{\gamma}\right]$$

и решение поставленной задачи сводится к решению задачи Коши.

3. Ниже для вычислений использовалось решение системы (2.1) при малых значениях параметра C. Результаты этих расчетов при $\alpha = n = 1$, $\gamma = 1.4$, $\sigma = 0.75$, полученные путем численного интегрирования системы (2.1) на ЭВМ по методу, изложенному в работе [2], приведены на фиг. 2. На фигуре даны изменения скорости $w = u(\gamma R T_\infty)^{-1/2}$ и температуры $\theta = T T_\infty^{-1}$ в зависимости от безразмерной координаты $x = r_* r^{-1}$ при фиксированном значении числа $R_* = 570$ и различных



Фиг. 2



Фиг. 3

значениях P_0 (кривые *1*, *2*, *3*, *4* соответствуют значениям $P_0 = 2.44 \cdot 10^2, 2.1 \cdot 10^3, 7.24 \cdot 10^5, 8.62 \cdot 10^7$). На этих же фигурах приведены изменения параметров потока в случае идеального газа при $P_0 = \infty$ (кривые *5*), а также ограниченное первыми членами решение (2.3) при условии $T_* T_\infty^{-1} = 2(\gamma + 1)^{-1}$ и тех же значениях безразмерных параметров R_*, n, α, γ, σ (пунктирные кривые на фиг. 2). Как показывают полученные результаты, при $P_0 \to \infty$ координата условно введенной границы переднего фронта ударной волны r_+ действительно оказывается конечной, а решение в окрестности бесконечно удаленной точки стремится к решению (2.3).

Изменения других параметров потока, таких как давление $p^\circ = p p_*^{-1}$ и плотность $\rho^\circ = \rho \rho_*^{-1}$, при $R_* = 570$ даны на фиг. 3. Влияние вязкости здесь приводит к тому, что, начиная с некоторого конечного значения P_0, перепад плотности на фронте ударной волны исчезает и при дальнейшем увеличении P_0 изменение плотности во всей области течения становится монотонным.

Таким образом, при истечении вязкого газа из сферической полости в вакуум течение, как и в случае конечного давления на бесконечности, оказывается состоящим из сверхзвуковой и дозвуковой областей, разделенных некоторой переходной областью.

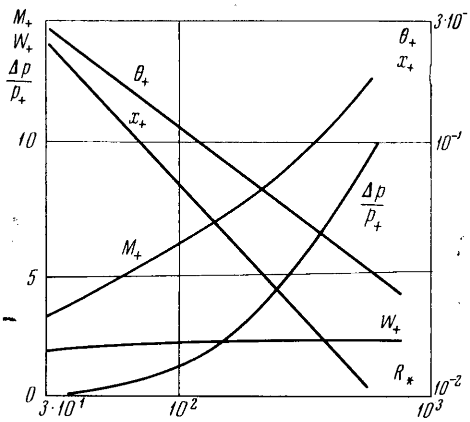
При больших значениях числа R_* сверхзвуковое течение оказывается близким к идеальному. Соответствующие поправки даны в работе [3]. В дозвуковой области течения при $\alpha = 1$ для параметров потока справедливы следующие асимптотические выражения:

$$w = ({}^2/{}_3 R \,/\, \gamma)^{1/2} x^{1/2}, \qquad \theta = 1 - {}^4/{}_3 \sigma (\gamma - 1) \gamma^{-1} R x \tag{3.1}$$

$$\rho^\circ = \left[\frac{3\gamma}{2R_*} \left(\frac{T_*}{T_\infty} \right) \right]^{1/2} x^{3/2}, \qquad p^\circ = \left[\frac{3\gamma}{2R_*} \left(\frac{T_\infty}{T_*} \right) \right]^{1/2} x^{3/2}$$

Процессы, протекающие в переходной области, аналогичны процессам в обычной ударной волне и связаны с необратимым переходом кинетической энергии упорядоченного движения газа в энергию беспорядочного теплового движения молекул. Однако в отличие от ударной волны повышение температуры в этой области вызывает возрастание только давления, изменение плотности здесь сохраняется монотонным.

Определим в заключение экстремальные значения скорости w_+, температуры θ_+ и числа Маха M_+ на границе переднего фронта x_+, а также относительное изменение давления $\Delta p \,/\, p_+$ при прохождении газа через переходную область. При $\alpha = n = 1$, $\gamma = 1.4$, $\sigma = 0.75$ эти данные в зависимости от числа R_* приведены на фиг. 4. При $R_* \to \infty$ координата $x_+ \to \infty$ и параметры $w_+ \to \sqrt{2 \,/\, (\gamma - 1)}$, $\theta_+ \to 0$, $M_+ \to \infty$. При уменьшении числа R_* координата $x_+ \to 1$, сверхзвуковая область уменьшается, пока при некотором конечном значении R_* течение всюду не станет дозвуковым.



Фиг. 4

Поступило 15 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженский М. Д. Об истечении вязкого газа в пустоту. ПММ, 1962, № 4.
2. Gusev V. N., Zhbakova A. V. The flow of viscous heat-conducting compressible fluid into the constant pressure medium. Sixth Internat. Sympos. on Rarefied Gas Dynamics, 1968.
3. Гусев В. Н. О влиянии вязкости в струйных течениях. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 6.
4. Гусев В. Н., Жбакова А. В. Об одном точном решении одномерных уравнений Навье — Стокса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.

УДК 533.6.01.011 : 51 533.6.01.011.35 533.6.01.011.72

К ТЕОРИИ «ПРОСТОЙ ВОЛНЫ» ФРИДРИХСА

В. И. ФИДРУС, Э. Г. ШИФРИН

(*Москва*)

Рассматривается задача о возникновении скачка уплотнения в стационарном течении типа простой волны, примыкающей к области равномерного сверхзвукового потока.

При построении скачка уплотнения принято использовать метод Фридрихса [1, 2], в основе которого лежит допущение о пренебрежимой малости возмущения, вносимого в поток ударной волной. При этом на течении типа простой волны удается провести кривую (скачок уплотнения), на которой условия Гюгонио удовлетворяются асимптотически (ударная поляра заменяется характеристикой).

Однако, как показано ниже, в области влияния скачка уплотнения точное решение типа простой волны не всегда является асимптотическим представлением