

**ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ СЖИМАЕМОГО ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ГАЗА  
НА ЭЛЕКТРОДЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО КАНАЛА  
ПРИ ОТСУТСТВИИ ИОНИЗАЦИОННОГО РАВНОВЕСИЯ**

Г. К. ЕРМОЛАЕВА, В. С. ЮФЕРЕВ

(Ленинград)

Рассматривается ламинарный пограничный слой сжимаемого электропроводного газа, образующийся на проводящей стенке канала. Предполагается, что концентрация заряженных частиц в поле течения отлична от равновесной. Принимается во внимание нарушение квазинейтральности газа в узком пристеночном слое. При этом считается, что дебаевская длина значительно больше длины свободного пробега заряженных частиц. Исследуется случай достаточно больших токов эмиссии.

При течении проводящего газа около электрода обычно используемое предположение [1-4], что концентрации заряженных частиц в магнитогазодинамическом слое являются равновесными и, следовательно, определяются уравнением Саха, может оказаться несправедливым, если скорости протекания объемных реакций ионизации и рекомбинации будут сравнимы по величине со скоростями диффузии и конвекции. В этом случае для описания движения газа кроме уравнений импульсов и энергии необходимо привлечь уравнения баланса заряженных частиц. Однако решение задачи осложняется тем, что, хотя в большей части пограничного слоя газ можно считать нейтральным, в узкой области около стенки, так называемом приэлектродном слое, это допущение нарушается и образуется существенный объемный электрический заряд.

При этом, если дебаевская длина значительно больше длины свободного пробега электронов и ионов, для описания указанного приэлектродного слоя можно также использовать уравнения сплошной среды. Тем не менее малая толщина этого слоя затрудняет непосредственное применение конечно-разностных методов во всей области течения газа от стенки до ядра потока и приводит к необходимости порознь рассматривать амбиполярную и приэлектродную области, а затем их сращивать. Такой подход использовался во многих работах в основном применительно к теории зондов или газового разряда [5-7]. При этом потоки эмиссии считались равными нулю [5] или очень малыми [6]. Случай больших потоков эмиссии рассматривался в [8]. В этой работе было получено в аналитическом виде краевое условие для уравнения диффузии в амбиполярной области. Последний результат и использовался в данной работе для расчета магнитогазодинамического пограничного слоя при конечной скорости реакции ионизации и рекомбинации.

Предполагается, что магнитное число Рейнольдса и параметр Холла малы, доля присадки в основном газе и степень ее ионизации незначительны, а температуры электронов и тяжелых частиц равны. Выделением тепла вследствие протекания реакций ионизации и рекомбинации, а также переносом тепла вследствие диффузии заряженных частиц пренебрегается. Не учитывается также обратное влияние сопротивления пограничного слоя на характеристики внешнего потока. Считается, что потоки эмиссии достаточно велики, а плотность потоков заряженных частиц гораздо меньше потоков эмиссии. В этом случае, как показано в ряде работ, например в [6], число ионов и электронов на стенке можно определить из соотношения

$$n_{i, e} = \frac{4j_{T_{i, e}}}{ev_{T_{i, e}}} \quad (1)$$

Здесь  $j_{T_{i, e}}$  — токи термоэмиссии заряженных частиц с электродов,  $v_{T_{i, e}}$  — тепловые скорости ионов и электронов соответственно.

Предполагается, что основным процессом ионизации является ионизация присадки электронным ударом из основного состояния, а обратным процессом — трехчастичная рекомбинация. При этом общая скорость изменения числа частиц в рассматриваемом объеме за счет реакций может быть записана в виде

$$\dot{K} = K_i n_s n_e - K_r n_i n_e^2 \quad (2)$$

где  $K_i$ ,  $K_r$  — константы скоростей ионизации и рекомбинации соответственно,  $n_s$  — число атомов присадки.

Отношение  $K_i / K_r$  определяется формулой Саха

$$\frac{K_i}{K_r} = \frac{2g_i}{g_0} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{I}{kT} \right), \quad I = eV_i \quad (3)$$

Здесь  $g_i$  и  $g_0$  — статистические веса ионов и нейтральных частиц соответственно,  $k$  — постоянная Больцмана,  $h$  — постоянная Планка,  $V_i$  — потенциал ионизации присадки газа.

Используется следующая зависимость константы скорости рекомбинации от температуры

$$K_r \sim T^{-9/2} \quad (4)$$

Считается, что основной газ удовлетворяет уравнению состояния  $p = \rho RT$ , теплоемкость  $C_p$ , число  $P$  и числа  $S_i$  и  $S_e$  постоянны, а вязкость

$$\mu \sim T^{1/2} \quad (5)$$

Величины, относящиеся к ядру потока, будем обозначать индексом  $\infty$ , а параметры газа в начальном сечении — индексом 0.

Введем безразмерные переменные

$$X = \int_0^x \frac{p}{p_0} \frac{\sigma_0 B^2}{\rho_0 u_\infty} dx, \quad Y = \left( \frac{\sigma_0 B^2}{\mu_0} \right)^{1/2} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy$$

$$F(X, Y) = \left( \frac{\sigma_0 B^2}{\mu_0 u_\infty^2} \right)^{1/2} \Psi(x, y), \quad \theta = \frac{h}{h_\infty} \quad (6)$$

$$C_{i,e} = \frac{C_{i,e}^0}{C_{i,e}^{\infty}}, \quad C_{i,e}^0 = \frac{n_{i,e}}{N}, \quad j^* = \frac{j}{\sigma_0 u_0 B}, \quad E^* = \frac{E}{u_0 B}$$

Здесь  $\Psi(x, y)$  — функция тока,  $N$  — общее число частиц (молекул основного газа, атомов присадки, заряженных частиц),  $B$  — магнитная индукция.

Отметим, что размерные величины  $j$ ,  $E$ ,  $B$  в системах координат анода и катода направлены в противоположные стороны, потому что в обоих случаях ось  $y$  ориентирована от стенки в газ. Безразмерные же  $j^*$  и  $E^*$  при переходе от системы координат катода к системе координат анода знака не меняют.

Остальные переменные отнесем к соответствующим величинам на входе в канал.

Опуская индекс над безразмерными величинами, систему уравнений пограничного слоя можно записать в виде

$$h_\infty^{-1/2} \frac{\partial}{\partial Y} \left( \theta^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial Y} \right) + \beta^* F \frac{\partial u}{\partial Y} + \beta^* (\theta - u^2) = u \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial u}{\partial Y}$$

$$h_\infty^{-1/2} \frac{\partial}{\partial Y} \left( \theta^{-1/2} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + P \beta^* F \frac{\partial \theta}{\partial Y} + P(\gamma - 1) M_\infty^2 h_\infty^{-1/2} \theta^{-1/2} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 =$$

$$= P \left( u \frac{\partial \theta}{\partial X} + v \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) - P(\gamma - 1) M_\infty^2 \frac{j^2}{\sigma_\infty p} \theta \left( \frac{E^*}{E_\infty^*} - u \right) \quad (7)$$

$$h_\infty^{-1/2} \frac{\partial}{\partial Y} \left( \theta^{-1/2} \frac{\partial C_{i,e}}{\partial Y} \right) \mp \frac{h_\infty^{-3/2}}{A_1 \rho_\infty} \frac{\partial}{\partial Y} (\theta^{-1/2} C_{i,e} E^*) + \beta^* \alpha^h S_i F \frac{\partial C_{i,e}}{\partial Y} =$$

$$= \alpha^h S_i \left( u \frac{\partial C_{i,e}}{\partial X} + v \frac{\partial C_{i,e}}{\partial Y} \right) - \alpha^h S_i A \frac{n_{e\infty}^3 h_\infty^{-9/2}}{p C_\infty \rho_\infty} \left\{ C_e \theta^{-9/2} \left[ \theta^{1/2} \left( \frac{n_{e^*}^2}{n_e^2} \right)_\infty \times \right. \right.$$

$$\left. \times \exp \left( -2\lambda_\infty \left( \frac{1}{\theta} - 1 \right) \right) - C_e C_i \theta^{-2} \right] - u C_e \left[ \left( \frac{n_{e^*}^2}{n_e^2} \right)_\infty - 1 \right] \right\}$$

$$\varepsilon \frac{\rho_\infty}{n_{e\infty}} \frac{dE}{dY} = C_i - C_e, \quad E^* = -E + uu_\infty, \quad \beta^* = \frac{1}{u_\infty} \frac{du_\infty}{dX}$$

$$u = \frac{\partial F}{\partial Y}, \quad v = -\frac{\partial F}{\partial X}$$

Здесь  $n_{e^*}$  — число электронов, определяемое по формуле Саха,  $k = 0$  соответствует уравнению диффузии ионов, а  $k = 1$  — уравнению диффузии электронов.

Безразмерные комплексы, входящие в систему уравнений (7), определяются следующими выражениями:

$$M_0^2 = \frac{u_0^2}{(\gamma - 1)h_0}, \quad A_1 = \frac{kT_0}{eu_0} \left( \frac{\sigma_0}{\mu_0} \right)^{1/2}, \quad A = K_{r_0} \frac{\rho_0 n_{e_0}^2}{\sigma_0 B^2} \quad (8)$$

$$\varepsilon = \frac{\Lambda^2 \sigma_0 B^2}{A_1 \mu_0}, \quad \Lambda^2 = \frac{\varepsilon_0 k T_0}{e^2 n_{e_0}}, \quad \alpha = \frac{D_i}{D_e}$$

Здесь  $\Lambda$  — дебаевская длина,  $D_i, e$  — коэффициенты диффузии ионов и электронов соответственно.

Граничные условия имеют вид

$$Y = 0, F = u = 0, \theta = \theta_{w_0} / h_\infty, C_{i,e} = C_{i,e w} \quad (9)$$

$$Y \rightarrow \infty, u \rightarrow 1, \theta \rightarrow 1, C_{i,e} \rightarrow 1$$

Наличие малого параметра  $\varepsilon$  при старшей производной в уравнении Пуассона позволяет искать решение задачи методом сращиваемых асимптотических разложений. При сделанных предположениях относительно концентрации заряженных частиц на стенке необходимо использовать решение в виде ряда по степеням  $\varepsilon^{1/2}$ , как это делается в работе [8]. Если концентрации электронов и ионов на поверхности электрода достаточно малы, что не соответствует принятым в данной работе предположениям, то указанное разложение неприменимо и асимптотическое решение задачи следует искать в виде ряда по степеням  $\varepsilon^{1/3}$  [6].

Система уравнений, описывающая амбиполярную область пограничного слоя, получается, если в уравнениях (7) положить  $\varepsilon = 0$ . Тогда при помощи дополнительных преобразований

$$\xi = X, \quad \eta = \frac{Y}{\sqrt{2X}}, \quad \varphi(\xi, \eta) = \frac{F(X, Y)}{\sqrt{2X}} \quad (10)$$

уравнение баланса заряженных частиц и соотношение для определения электрического поля, справедливые в области амбиполярной диффузии, можно представить в следующем виде:

$$h_\infty^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \theta^{-1/2} \frac{\partial C}{\partial \eta} \right) + S_a (\beta + 1) \varphi \frac{\partial C}{\partial \eta} = 2S_a \xi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial C}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial C}{\partial \eta} \right) - \quad (11)$$

$$- 2S_a \xi A \frac{n_{e\infty}^3 h_\infty^{-9/2}}{p C_\infty \rho_\infty} \left\{ C \theta^{-9/2} \left[ \theta^{1/2} \left( \frac{n_{e*}^2}{n_e^2} \right)_\infty \exp \left( -\frac{2\lambda_0}{h_\infty} \left( \frac{1}{\theta} - 1 \right) \right) - \frac{C^2}{\theta^2} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} C \left[ \left( \frac{n_{e*}^2}{n_e^2} \right)_\infty - 1 \right] \right\}$$

$$E = \pm \frac{j}{\sigma_\infty \sigma^*} - A_1 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \rho_\infty h_\infty (2\xi)^{-1/2} \frac{1}{C} \frac{dC}{d\eta} \quad (12)$$

$$\sigma^* = C \theta^{-1/2}, \quad C = C_e = C_i, \quad \beta = \frac{2\xi}{u_\infty} \frac{du_\infty}{d\xi}, \quad S_a = \frac{1 + \alpha}{\alpha} S_i \quad (13)$$

Здесь  $S_a$  — число Шмидта, построенное по коэффициенту амбиполярной диффузии.

Знак плюс перед первым членом соотношения (12) относится к пограничному слою на аноде, а знак минус к пограничному слою на катоде.

Соответствующее уравнение для концентрации заряженных частиц во внешнем потоке имеет вид

$$\frac{dC_\infty}{d\xi} = A \frac{h_{\infty*}^{-9/2} n_{\infty}^3}{p \rho_\infty} \left[ \left( \frac{n_{*}^2}{n^2} \right)_\infty - 1 \right] \quad (14)$$

$$\left( \frac{n_{*}^2}{n^2} \right)_\infty = \frac{h_\infty^{5/2}}{p C_\infty^2} \exp \left[ -2\lambda_0 \left( \frac{1}{h_\infty} - 1 \right) \right] \quad n_\infty = \frac{C_\infty p}{h_\infty} \quad (15)$$

Проводимость газа в ядре потока определяется по формуле

$$\sigma_{\infty} = C_{\infty} T_{\infty}^{-1/2} \quad (16)$$

Остальные уравнения амбиполярной области пограничного слоя и ядра потока записываются в таком же виде, как и в работе [4].

Граничные условия для уравнения диффузии заряженных частиц (11) имеют вид

$$\eta = 0, \quad C = C_w(\xi); \quad \eta \rightarrow \infty, \quad C \rightarrow 1 \quad (17)$$

Краевое условие для концентрации заряженных частиц на стенке  $C_w(\xi)$  пока неизвестно и определяется из условия срачивания внешнего и внутреннего разложений.

Амбиполярное решение непригодно вблизи поверхности электрода, где оно не удовлетворяет условию  $C_{iw} \neq C_{ew}$ . Чтобы получить уравнения, описывающие приэлектродный слой, введем, следуя [8], новые переменные

$$Y = \left( \frac{\varepsilon}{A_1} \frac{\rho_{\infty}}{n_{e\infty}} \right)^{1/2} t, \quad E = \left( \varepsilon A_1 \frac{\rho_{\infty}}{n_{e\infty}} \right)^{-1/2} E^{\circ}(t, X) \quad (18)$$

Тогда уравнения диффузии заряженных частиц и уравнение Пуассона, справедливые в области объемного заряда, имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dC_e}{dt} + C_e E^{\circ} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{dC_i}{dt} - C_i E^{\circ} \right) = 0, \quad \frac{dE^{\circ}}{dt} = C_i - C_e \quad (19)$$

Анализ системы (19), проведенный в работе [8], позволяет получить следующее соотношение для определения граничного условия на стенке для уравнения диффузии в амбиполярной области

$$-\frac{C_w(C_w^2 - C_{iw}C_{ew})^2}{2(C_w - C_{iw})(C_w - C_{ew})} = \delta^2 \quad (20)$$

$$\delta = \left( \varepsilon A_1 \frac{\rho_{\infty}}{n_{e\infty}} \right)^{1/2} \left[ \pm \frac{j}{\sigma_{\infty}} \theta_w^{1/2} - A_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha} h_{\infty} \rho_{\infty} \left( \frac{dC}{dY} \right)_w \right] \quad (21)$$

Уравнения амбиполярной области и внешнего потока интегрировались конечно-разностным методом. Значения  $C_w$  определялись из уравнения (20) численно по схеме Ньютона.

Коэффициент сопротивления трения на стенке и местное число Нуссельта рассчитывались по формулам

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho_0 u_0^2} = \left( \frac{S_x}{R_x \xi} \right)^{1/2} \left( \frac{2}{\theta_{w_0}} \right)^{1/2} \rho u_{\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_w \quad (22)$$

$$N_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = \left( \frac{S_x R_x}{2\xi} \right)^{1/2} \frac{p}{\theta_{w_0}(1 - \theta_{w_0}/h_{\infty})} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_w$$

$$R_x = \frac{\rho_0 u_0}{\mu_0} x, \quad S_x = \frac{\sigma_0 B^2}{\rho_0 u_0} x$$

Падение потенциала в амбиполярной области пограничного слоя определялось при использовании выражения для напряженности электрического поля.

Были проведены расчеты характеристик пограничных слоев, образующихся на аноде и на катоде. Рассматривался сверхзвуковой режим течения ( $M_0 = 1.5$ ) в канале, расширяющемся по линейному закону, который в новых безразмерных переменных выглядит так:

$$l = \exp \left[ \frac{C}{S_0 M_0^2} \int_0^{\xi} M_{\infty}^2 d\xi \right] \quad (23)$$

Здесь  $l$  — половина расстояния между электродами.

Для вычислений были приняты следующие значения основных параметров задачи:

$$C/S_0 = 10, \quad \gamma = 1.4, \quad \lambda_0 = 10, \quad \theta_{w_0} = 0.5, \quad P = 0.7$$

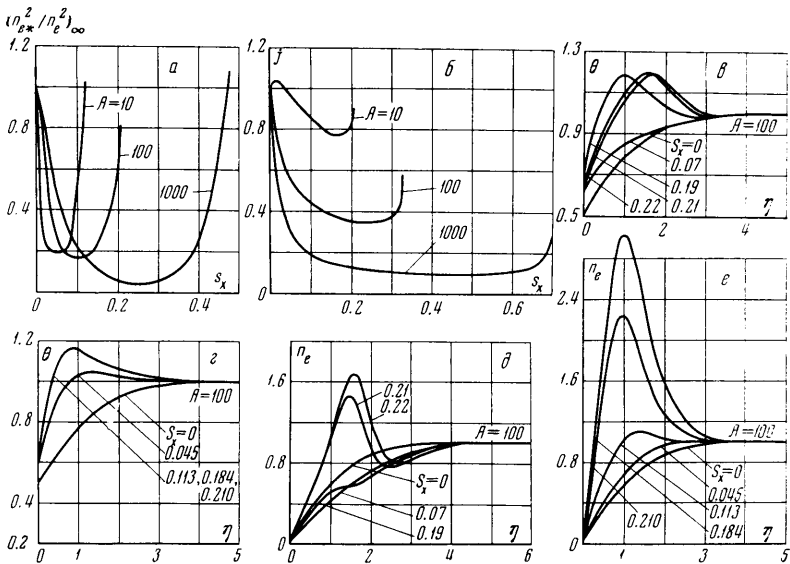
$$S_a = 1, \quad \varepsilon = 10^{-5}, \quad A_1 = 1.5, \quad \alpha = 0.6 \cdot 10^{-3}, \quad K_0 = 0$$

При анализе характеристик течения основное внимание было уделено оценке влияния параметра  $A$ , который отражает влияние конечной скорости реакций ионизации и рекомбинации. Этот параметр варьировался в широких пределах: принимались значения  $A = 10, 10^2, 10^3$ .

Исследовалось также влияние граничных условий для концентрации заряженных частиц на характеристики пограничного слоя сжимаемого электропроводного газа. Как видно из (1), концентрации электронов и ионов на поверхности определяются температурой электродов и работой выхода материала электрода. Последний фактор существенно зависит от наличия присадок щелочного металла в газе, с которым граничит электрод. Вопрос о влиянии паров щелочного металла на работу выхода электрода при высоких температурах и давлениях по существу пока не изучался. В связи с этим в данной работе были выбраны значения концентрации электронов и ионов на поверхности электрода, не связанные с какими-либо конкретными условиями, но которые могут быть реализованы

$$C_{ew} = 0.01, 0.003, \quad C_{iw} = 0.03, 0.01$$

Основные результаты расчета представлены на фиг. 1, 2. Видно, что характеристики внешнего потока при сверхзвуковом режиме течения существенно неравновесны (фиг. 1, а, б). Это объясняется значительным перепадом температур вдоль канала и относительно большими скоростями течения в ядре потока. Последнее приводит к тому, что изменение заряженных частиц вследствие конвекции становится существенным.



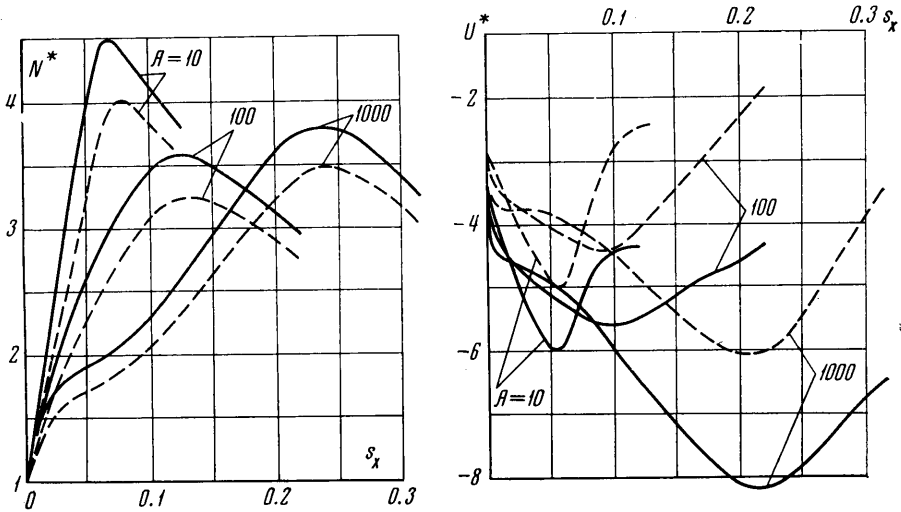
Фиг. 1

Профили температур в пограничных слоях на аноде (фиг. 1, а;  $C_{ew} = 0.01, C_{iw} = 0.03$ ) и на катоде (фиг. 1, б;  $C_{ew} = 0.01, C_{iw} = 0.03$ ) на некотором удалении от входа в канал становятся немонотонными. Это определяется значительным выделением джоулева тепла в области, прилегающей к холодному электроду. Соответственно этому профили концентраций заряженных частиц также немонотонны (фиг. 1, в — анод, фиг. 1, е — катод;  $C_{ew} = 0.01, C_{iw} = 0.03$ ).

Однако хотя изменение концентрации заряженных частиц в пограничном слое следует за изменением температуры, тем не менее концентрация остается существенно неравновесной даже в тех сечениях канала, где концентрацию частиц в ядре потока уже можно считать равновесной (фиг. 1, а; при  $A = 100, S_x = 0.21, 0.22$ ).

Интересно отметить, что в пограничном слое на катоде концентрации заряженных частиц продолжают быстро расти вдоль канала даже в том случае, когда температура в пограничном слое почти не меняется (фиг. 1, в и е, при  $S_x = 0.113, 0.184, 0.210$ ). Это объясняется производством частиц за счет реакций ионизации, которая в данных сечениях канала и на достаточном удалении от стенки преобладает над рекомбинацией частиц. Последнее является следствием того, что значение концентрации заряженных частиц в данном месте ниже равновесного.

Нормальный к стенке градиент температуры с ростом продольной координаты изменяется немонотонно, что сказывается на распределении местного числа  $N_x$  вдоль канала (фиг. 2 — катод). На этой фигуре сплошные линии соответствуют значениям  $C_{ew} = 0.003$ ,  $C_{iw} = 0.01$ , а штриховые линии — значениям  $C_{ew} = 0.01$ ,  $C_{iw} = 0.03$ .



Фиг. 2

Начиная с некоторого сечения канала, имеет место резкое уменьшение  $N_x$  с ростом продольной координаты, что, по-видимому, определяется приближением к точке отрыва пограничного слоя (фиг. 2, а). Подобный эффект в случае наличия потенциального равновесия в потоке не наблюдался. Уменьшение концентрации заряженных частиц на стенке при фиксированных значениях параметра  $A$  ведет к росту тепловых потоков на стенку, что объясняется увеличением джоулева тепловыделения (фиг. 2, а).

Кривые зависимости падения потенциала в амбиполярной области пограничного слоя на катоде от продольной координаты  $S_x$  приведены на фиг. 2, б, на которой  $U^* = eU/kT$ . Поведение этих кривых аналогично поведению  $N_x$ , так как изменение этой величины определяется теми же причинами, что и изменение джоулева тепловыделения.

Поступило 16 IV 1970

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kerrebrock J. L. Similar Solutions for boundary layers in constant-temperature magneto-gasdynamic channel flow. *J. Aero/Space Sci.*, 1960, vol. 27, No. 2, pp. 156—157. (Рус. перев.: Сб. перев. «Механика». Период. сб. перев. иностр. статей, 1961, № 5, стр. 91—94.)
2. Генкин А. Л. Ламинарный магнитогазодинамический пограничный слой на проводящей поверхности в скрещенных электрическом и магнитном полях. *Теплофизика высоких температур*, 1965, т. 3, № 3, стр. 401—408.
3. Пасконов В. М., Якубенко А. Е. Расчет пограничного слоя на электропроводящей стенке плоского канала. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1966, № 3, стр. 12—19.
4. Юферев В. С. Взаимодействие пограничного слоя на холодном электроде с основным потоком в МГД-генераторе. *Магнитная гидродинамика*, 1968, № 1, стр. 41—47.
5. Lam S. H. A general theory for the flow of weakly ionized gases. *AIAA Journal*, 1964, vol. 2, No. 2. (Рус. перев.: *Ракетная техника и космонавтика*, 1964, т. 2, № 2, стр. 43—51.)
6. Bienkowski G., Kalnavarns I. The effect of surface emission on continuum electrostatic probe theory. *AIAA paper*, 1967, No. 68—167.
7. Любимов Г. А., Михайлов В. Н. К анализу области возмущения плазмы вблизи электрода. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1968, № 3, стр. 9—17.
8. Юферев В. С. К теории пограничного слоя слабоионизованного газа около электрода. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1971, № 1, стр. 61—67.