

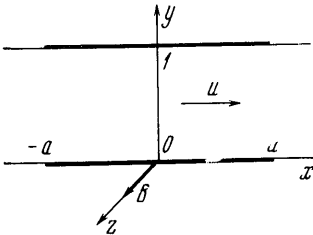
УДК 538.4:621.362 + 538.4:621.384.6

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКОВ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ХОЛЛА

А. Л. ЛЕВИН

(Москва)

Рассмотрено в линейном приближении стационарное плоское течение проводящего газа поперек магнитного поля в магнитогидродинамическом канале постоянного сечения, образованном электродами конечной длины и изоляторами. Предполагается, что электромагнитные силы малы. Показано, что с увеличением магнитного числа Рейнольдса плотность тока возрастает около выхода из межэлектродного промежутка. Исследовано взаимное влияние параметра Холла и магнитного числа Рейнольдса на распределение токов в канале.



Фиг. 1

В работе [1] в линейном приближении рассмотрено влияние магнитного числа Рейнольдса на распределение электрического тока в магнитогидродинамическом канале с конечными электродами. Распределение тока в плоском канале при конечных магнитных числах Рейнольдса для точечных электродов и полубесконечных электродов дано соответственно в работах [2] и [3]. Распределение индуцированного магнитного поля для конечных электродов вдоль оси канала исследовалось

в работе [4], в которой считалось, что электропроводность среды перед входным срезом электродов равна нулю, а за ним — единице. Во всех указанных выше работах для неточечных электродов совместное влияние эффекта Холла и магнитного числа Рейнольдса на ток не исследовалось.

1. Рассматривается плоское стационарное течение проводящей жидкости с постоянной вдоль оси x скоростью u в канале $|x| < \infty$, $0 \leq y \leq 1$, образованном изоляторами и электродами длиной $2a$ (фиг. 1). Все линейные величины отнесены к ширине канала h .

Пренебрегается вязкостью и теплопроводностью жидкости, проводимость σ и степень ионизации α которой считаются постоянными. Внешнее магнитное поле B_* однородно и направлено по оси z , тока вдоль которой нет, поэтому суммарное (внешнее и индуцированное) магнитное поле B направлено вдоль z и зависит от x и y . Приэлектродные падения постоянны по длине каждого электрода и малы по сравнению с разностью потенциалов ϕ_0 между ними, которая отнесена к величине uB_*h . Предполагается, что электромагнитные силы малы.

Используются следующие критерии подобия: R_m — магнитное число Рейнольдса, H — параметр Холла

$$R_m = \mu \sigma u h, \quad H = \frac{\sigma m_i B_*}{\alpha \rho e}$$

где μ — магнитная проницаемость, ρ — плотность, e и m_i — заряд и масса иона.

В этом случае уравнение индукции согласно [1] принимает такой вид:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = R_m \frac{\partial B}{\partial x} \quad (1.1)$$

Здесь магнитное поле B отнесено к величине B_* .

Считается, что изменение магнитного поля в канале мало по сравнению с величиной B_* или в безразмерном виде

$$|B - 1| \leq \varepsilon \quad (\varepsilon \ll 1) \quad (1.2)$$

Поэтому уравнение индукции можно линеаризовать. Линеаризация уравнения (1.1) не изменяет его вид. Условие (1.2) выполняется, например, при $|\varphi_0 - 1| \leq \varepsilon$.

На идеально проводящих электродах тангенциальная составляющая напряженности электрического поля равна нулю, и граничное условие для суммарного магнитного поля в линейном приближении можно получить из уравнения закона Ома и записать так:

$$\frac{\partial B}{\partial y} = H \frac{\partial B}{\partial x} \quad (1.3)$$

На изоляторах нормальная компонента плотности тока равна нулю, т. е. $R_m j_y = -\partial B / \partial x = 0$, или $B = \text{const}$. Масштабом плотности тока служит величина σB_* . Ниже рассматриваются условия, при которых суммарный ток вдоль канала между изолирующими стенками отсутствует, т. е. $B(x, 0) = B(x, 1)$ при $|x| \geq a$.

За масштаб магнитной индукции B_* принято ее значение на изоляторах слева от электродов. Так как в нашем случае приходящийся на единицу высоты канала ток I во внешней цепи замыкается справа от электродов, то B_* есть индукция внешнего поля. Если бы ток I замыкался слева от электродов, то B_* была бы суммой индукции внешнего поля и собственного поля тока I . Следовательно, граничные условия для B на изоляторах имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B(x, 0) = B(x, 1) = 1 & \quad \text{при } x \leq -a \\ B(x, 0) = B(x, 1) = 1 - R_m I & \quad \text{при } x \geq a \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Для решения уравнения индукции применялся метод интегральных соотношений, описанный в работе [1]. Решение искалось в виде полинома четвертой степени с коэффициентами, являющимися функциями x

$$B = B_0 + B_2 y + B_3 y^2 + B_4 y^3 + (B_1 - B_0 - B_2 - B_3 - B_4) y^4 \quad (2.1)$$

Для определения пяти коэффициентов полинома (2.1) использовались следующие пять соотношений: граничные условия (1.3) и (1.4) на обеих стенках, уравнение (1.1) при $y = 0$ и $y = 1$ и интегральное соотношение, полученное интегрированием уравнения индукции от 0 до 1 с использованием (2.1). Таким образом, решение уравнения в частных производных с неоднородными граничными условиями сводится к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений для трех областей: для межэлектродного промежутка ($|x| \leq a$) и для двух участков канала с изолирующими стенками ($|x| \geq a$).

Константы интегрирования определяются конечностью токов при $|x| \rightarrow \infty$ и условиями сшивания решений на границах областей. При этом используется непрерывность на границе тангенциальной составляющей напряженности электрического поля и нормальной составляющей плотности тока. В приближенном решении условия сшивания сводятся к неразрывности разности потенциалов на стенках канала и неразрывности

B на стенках и оси канала. Из линеаризованной y -компоненты закона Ома можно написать следующее соотношение, связывающее разность потенциалов между электродами φ_0 и величину магнитной индукции B

$$\int_0^1 \frac{\partial B}{\partial x} dy = R_m \left(\int_0^1 B dy - \varphi_0 \right) - H [B_1(x) - B_0(x)]$$

Следует отметить, что $\varphi_0 > 1$ соответствует режиму ускорителя, $\varphi_0 < 1$ — режиму генератора.

Сравнение данного метода с другими приведено в работе [1].

3. Решение данной задачи имеет вид

$$B = 1 - \frac{5(\varphi_0 - 1) R_m}{n - 1/2 R_m} \exp \left[\left(n + \frac{R_m}{2} \right) (x + a) \right] (y - 2y^3 + y^4), \quad x \leq -a$$

$$n = (10 + 1/4 R_m^2)^{1/2}$$

$$B = B_0 + B_2 y + B_3 y^2 + B_4 y^3 + (B_1 - B_0 - B_2 - B_3 - B_4) y^4, \\ |x| \leq a$$

$$B_0 = 1 + \frac{1}{H} \sum_{k=1}^5 \frac{A_k}{\lambda_k} \exp(\lambda_k x) + \left(\frac{R_m}{12H} - \frac{1}{2} \right) \xi - \frac{\xi'}{12H} + A_6$$

$$B_1 = B_0 + \xi, \quad B_2 = \xi + (1/12 R_m - 1/2 H) \xi' - 1/12 \xi''$$

$$B_3 = \frac{R_m}{2H} \xi + \frac{1/12 R_m^2 - 1/2 R_m H - 1}{2H} \xi' + \left(-\frac{R_m}{12H} + \frac{1}{4} \right) \xi'' + \frac{1}{24H} \xi'''$$

$$B_4 = -\frac{R_m}{H} \xi + \left(-\frac{R_m^2}{12H} + \frac{R_m}{6} + \frac{1 + H^2}{H} \right) \xi' + \left(\frac{R_m}{6H} - \frac{1}{6} \right) \xi'' - \frac{1}{12H} \xi'''$$

$$\xi = A_1 \exp \lambda_1 x + A_2 \exp \lambda_2 x + \dots + A_5 \exp \lambda_5 x$$

Коэффициенты A_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) определяются из указанных выше условий сшивания, а величины λ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) являются корнями уравнения

$$\lambda^5 - 3R_m \lambda^4 + [3R_m^2 - 72(1 + H^2)] \lambda^3 + [-R_m^3 + 72R_m(2 + H^2)] \lambda^2 + \\ + [-72R_m^2 + 720(1 + H^2)] \lambda - 720R_m = 0$$

$$B = B_0(a) + \frac{5[\varphi_0 - B_0(a)] R_m}{n + 1/2 R_m} \exp \left[\left(n - \frac{R_m}{2} \right) (a - x) \right] (y - 2y^3 + y^4), \\ x \geq a$$

По этим формулам были проведены расчеты. На фиг. 2, *a* изображены линии электрического тока в канале при $R_m = 1$, $H = 1$, $a = 1$. На фиг. 2, *b* даны распределения плотности тока j_y на нижнем электроде (кривая 1), на оси канала (кривая 2) и верхнем электроде (кривая 3). Для тех же параметров, но при $R_m = 2$, аналогичные зависимости показаны на фиг. 3, *a, б*. Распределение тока на электродах при $R_m = 1$ и $H \ll 1$ изображено на фиг. 2, *б* штриховой линией. Все расчеты для $H \ll 1$ велись по формулам работы [1]. Следует отметить, что знак выражений $j_y / (\varphi_0 - 1)$ и $l / (\varphi_0 - 1)$ не зависит от знака величины $\varphi_0 - 1$.

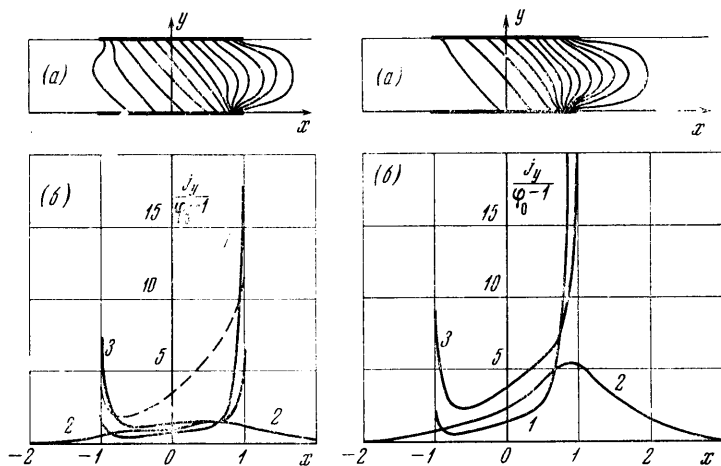
Как видно из фиг. 2 и фиг. 3, плотность тока увеличивается около выхода потока из межэлектродного промежутка с возрастанием магнитного числа Рейнольдса. Снос потоком линий электрического тока, увеличивающийся вместе с R_m , хорошо виден

на фиг. 2, а и фиг. 3, а, которые построены таким образом, что между двумя ближайшими линиями тока, а также между крайними линиями и бесконечностью протекает $1/14$ часть проходящего через электроды полного тока I . Такая концентрация тока в канале связана с резким уменьшением (при $\varphi_0 > 1$) или увеличением (при $\varphi_0 < 1$) суммарного магнитного поля B при $x = a = 1$, изменение которого становится менее резким с увеличением параметра Холла (фиг. 4).

Для оценки относительного увеличения полного тока I за счет растекания токов из межэлектродной области был введен параметр

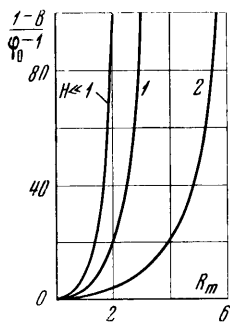
$$\eta = \frac{\varphi_0 - 1}{I} \left(\frac{I}{\varphi_0 - 1} - \frac{2a}{1 + H^2} \right)$$

Параметр показывает, насколько действительно проходящий между электродами ток I больше тока, который протекал бы между ними перпендикулярно плоскости электродов во всем межэлектродном промежутке и не выходил бы за его пределы.

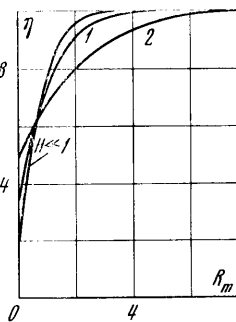


Фиг. 2

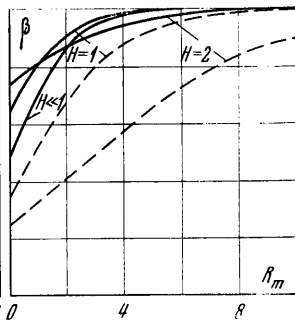
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Следует отметить, что параметр η можно легко связать с величиной $\alpha^* = I / (\varphi_0 - 1)$; введенной в работе [5]. Как видно из фиг. 5, при $R_m < R_{m*}$ эффект Холла усиливает вынос токов из межэлектродной области, при $R_m > R_{m*}$ — затрудняет его, где R_{m*} определяется точкой пересечения кривой $H \ll 1$ с кривыми для различных параметров H , отличных от нуля. Для кривых $H = 1$ и $H = 2$ величина $R_{m*} = 0.65$ при $a = 1$.

Взаимное влияние магнитного числа Рейнольдса и параметра Холла на распределение тока по электродам изображено на фиг. 6, по оси абсцисс которой отложена величина

$$\beta = \frac{1}{I} \int_0^a j_y dx$$

вычисленная при $a = 1$ для $y = 0$ (сплошные линии) и $y = 1$ (штриховые линии). Для $H \ll 1$ распределение тока на обоих электродах одинаково. Величина β определяет ток, поступающий на ту половину электрода, которая примыкает к выходу из межэлектродного пространства.

Для электрода $y = 0$ так же, как и при исследовании выноса тока из межэлектродного промежутка, существует величина R_{m*} . При $R_m < R_{m*}$ параметр Холла усиливает влияние магнитного числа Рейнольдса на снос токов на этом электроде вниз по потоку, а при $R_m > R_{m*}$ — уменьшает это влияние (фиг. 6). Точка пересечения кривых $H \ll 1$ и $H = 1$ выражена на фиг. 6 нечетко, так как пересечение происходит при $\beta \approx 1$, а для $H = 2$ величина $R_{m*} = 2.05$.

Действие эффекта Холла на распределение тока на электроде $y = 1$ противоположно действию магнитного числа Рейнольдса и превышает влияние последнего при $R_m < 0.85$ для $H = 1$ и при $R_m < 3$ для $H = 2$, как видно из пересечения линии $\beta = 0.5$ со штриховыми линиями фиг. 6.

Поступило 23 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Корсун А. Г., Лёвин А. Л. О влиянии скорости потока на распределение токов в магнитогазодинамическом канале. ПМТФ, 1970, № 3.
2. Коновалов А. Е. О распределении электрического тока и потенциала в плоском канале с точечными электродами. ПМТФ, 1970, № 3.
3. Козыренко В. Е., Тепляков В. А. Анализ краевого эффекта в МГД-канале с полубесконечными электродами при конечных магнитных числах Рейнольдса. Магнитная гидродинамика, 1968, № 3.
4. Козыренко В. Е. Некоторые новые закономерности в теории продольных концевых эффектов в МГД-каналах при произвольных магнитных числах Рейнольдса. Магнитная гидродинамика, 1969, № 1.
5. Ватажин А. Б. Магнитогазодинамическое течение в плоском канале с конечными электродами. Изв. АН СССР, ОТИ, Механика и машиностроение, 1962, № 1.