№ 3 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1971

УДК 532.546.013.2

О НЕСТАЦИОНАРНОЙ КВАЗИОДНОМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

В. Е. КАРАЧИНСКИЙ

(*Харьков*)

Рассматривается квазиодномерное течение жидкости (газа) в пористом пласте с проводимостями и сечением, изменяющимися вдоль трубки тока. Предложено дифференциальное уравнение (1.4) нестационарной квазиодномерной фильтрации в специальной форме. Получены и исследованы некоторые множества частных решений этого уравнения, включающие в себя отдельные решения известных одномерных задач. Установлена взаимосвязь между стационарными и нестационарными распределениями потенциалов и потоков, осуществимыми в заданной области фильтрации. Найденные закономерности используются в обосновании метода гидродинамического зондирования неоднородных пористых сред.

1. В силу неполноты геологической информации постановка и решение задач подземной гидромеханики в сложных пластах сопряжены со значительной схематизацией явления [1]. Поэтому во многих практически важных случаях, особенно при неизвестном в деталях строении пласта, для описания реальных процессов целесообразно использовать модель нестационарной квазиодномерной фильтрации в трубке тока переменного сечения, положенную И. А. Чарным [2] в основу общей системы уравнений фильтрации. Согласно [2], уравнения неразрывности и переноса в трубке тока D с поперечным сечением f и проницаемостью k, зависящими от положения $f = f(s)$, $k = k(s)$, записываются в виде

$$-\frac{\partial Q}{\partial s} = f\,\frac{\partial (m\rho)}{\partial t}, \qquad Q = -fk\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial P}{\partial s} \tag{1.1}$$

где Q — полный массовый расход, P — пластовое давление, ρ — плотность, μ — вязкость фильтрующейся жидкости и m — пористость пласта в сечении $f(s)$, s — расстояние вдоль линии тока в D, которая принимается неподвижной, t — время.

Введем в (1.1) независимую переменную ξ, а также функцию Лейбензона Φ и параметр емкости β

$$\xi = \xi_0 + \int\limits_{s_0}^{s}\frac{dl}{fk} \quad (0 < s_0 < s), \qquad \Phi = \int\frac{\rho\,dP}{\mu}, \qquad \beta = \frac{d(m\rho)}{d\Phi} \tag{1.2}$$

Считая β также функцией положения, $\beta = \beta(s)$, введем специальную переменную u

$$u = \int\limits_{\xi_0}^{\xi} f\sqrt{\beta k}\,dl \tag{1.3}$$

Легко видеть, что в силу $k > 0$, $f > 0$ преобразование $s \to \xi$ гомеоморфно. Объединяя (1.1) — (1.3), получаем уравнение квазиодномерной фильтрации, которое с учетом введенных обозначений можно записать в виде

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} = \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{1.4}$$

Уравнение квазиодномерной фильтрации в специальной форме (1.4) будет положено в основу дальнейшего; оно линейно относительно Ф, и замена ξ на

$$1+a\xi \tag{1.5}$$

где a — действительное или комплексное число, не меняет его вида. Существенно, что переменные ξ (1.2) и u (1.3) имеют наглядный физический смысл. Независимая переменная ξ уравнения (1.4), выполняющая роль пространственной координаты, численно равна потенциалу стационарного течения, осуществимого в рассматриваемой трубке тока при $\partial\Phi/\partial t=0$, $Q=-1$. Согласно (1.2) и (1.3)

$$ds/d\xi=fk, \qquad du/d\xi=f\sqrt{\beta}k \tag{1.6}$$

Поэтому вследствие функциональной связи между u, ξ, s

$$u=u(s,\ s_0)=\int\limits_{s_0}^{s}\sqrt{\beta/k}\,dl=\langle\sqrt{\beta/k}\rangle\,[s-s_0] \tag{1.7}$$

Очевидно, преобразование $s\to u$ также гомеоморфно, и u можно рассматривать как безразмерное расстояние

$$\int\limits_{s_0}^{s}\frac{dl}{\sqrt{k}}$$

с множителем $\langle\sqrt{\beta}\rangle$.

При помощи (1.4) можно получить в D приближенные (в рамках допущений квазиодномерности [2]) решения широкого круга нестационарных задач. В некоторых важных частных случаях (1.4) эквивалентно классическим дифференциальным уравнениям теорий фильтрации и теплопроводности. Это, например, имеет место для плоской ($c=0$) и осевой ($c=1$) симметрии потоков, когда при $u=u_c$ и k, $\beta=\mathrm{const}$

$$u_0=b\xi, \qquad u_1=be^{N\xi}, \qquad b, N=\mathrm{const} \tag{1.8}$$

2. В теории теплопроводности известны решения отдельных задач плоскопараллельной ($c=0$) кондукции в образцах с проводимостями, аппроксимируемыми степенными функциями пространственной координаты при определенных ограничениях, налагаемых на показатели степени [3]. Проводимости реальных пластов не являются, вообще говоря, монотонными функциями координат, поэтому при использовании указанной аппроксимации [3] в задачах подземной гидромеханики возможно значительное искажение качественной картины явления.

Возможно более общее описание неоднородностей квазиодномерного пласта, заключающееся в аппроксимации функции (1.3), например, следующим образом:

$$u=b\xi^{\alpha}, \qquad b,\ \alpha=\mathrm{const}>0 \tag{2.1}$$

так как согласно (1.2), (1.3), (1.6) u всегда строго монотонна и возрастает с ξ, причем при $\alpha\to 1$ или $\alpha\to\infty$ (2.1) сводится к (1.8). Если $Y(\xi,t)$ — решение (1.3) при (2.1), то $Y(1+a\xi,t)$ в силу (1.5) будет решением (1.4) при

$$u=b(1+a\xi)^{\alpha}, \qquad b,\ a,\ \alpha=\mathrm{const} \tag{2.2}$$

Полагая в (2.2) $a=N/\alpha$, имеем

$$u\to u_1=be^{N\xi} \quad \text{при } \alpha\to\infty,\ N=\mathrm{const} \tag{2.3}$$

что соответствует (1.8) при осевой симметрии потока.

В пространстве L-изображений (1.4) приобретает вид

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} - \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 \lambda\theta = 0 \tag{2.4}$$

$$\theta(\xi, \lambda) = L\{F(\xi, t)\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(\xi, t)\, dt$$

$$F(\xi, t) = \Phi(\xi, t) - \Phi(\xi, 0)$$

при условии, что $\Phi(\xi, 0)$ удовлетворяет уравнению $d^2\Phi / d\xi^2 = 0$.

Подставляя (2.1) в (2.4), получаем уравнение типа модифицированного уравнения Бесселя [4]

$$d^2\theta / d\xi^2 - b^2\alpha^2\xi^{2(\alpha-1)}\lambda\theta = 0 \tag{2.5}$$

Общее решение (2.5) имеет вид

$$\sqrt{\xi}[AK_{1/2\alpha}(b\xi^\alpha\sqrt{\lambda}) + BI_{1/2\alpha}(b\xi^\alpha\sqrt{\lambda})] \tag{2.6}$$

где $K_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка ν; A и B — произвольные постоянные относительно ξ.

Отсюда согласно (1.5) общим решением (2.4) при (2.2) будет

$$\sqrt{1 + a\xi}\{AK_{1/2\alpha}[b(1 + a\xi)^\alpha\sqrt{\lambda}] + BI_{1/2\alpha}[b(1 + a\xi)^\alpha\sqrt{\lambda}]\} \tag{2.7}$$

Выражая ξ через u по (2.1) и (2.2) соответственно, можно объединить (2.6) и (2.7) в одно выражение

$$\theta(\xi, \lambda) = \theta(u, \lambda; \alpha) = (u / b)^{1/2\alpha}[AK_{1/2\alpha}(u\sqrt{\lambda}) + BI_{1/2\alpha}(u\sqrt{\lambda})] \tag{2.8}$$

Так как модифицированные функции Бесселя являются целыми функциями индекса и $1 / 2\alpha < \infty$, то множество решений $\theta(u, \lambda; \alpha)$ непрерывно зависит от параметра $\alpha > 0$, $u > 0$. При $\alpha \to \infty$ согласно (2.2), (2.3)

$$\theta(u, \lambda; \infty) = AK_0(u\sqrt{\lambda}) + BI_0(u\sqrt{\lambda}) \tag{2.9}$$

что при постоянных k, β соответствует известному решению уравнения теплопроводности для плоскорадиального потока [3].

3. Будем искать частные решения (2.5), удовлетворяющие краевым условиям первого рода.

$$\lim_{u\to 0} \theta(u, \lambda; \alpha) = \theta(0, \lambda; \alpha), \qquad \lim_{u\to\infty} \theta(u, \lambda; \alpha) = 0 \tag{3.1}$$

Второму условию (3.1) удовлетворяет первое слагаемое (2.8), поэтому

$$\theta(u, \lambda; \alpha) = A(u / b)^{1/2\alpha} K_{1/2\alpha}(u\sqrt{\lambda}) \tag{3.2}$$

Пользуясь (3.1), (3.2) и асимптотическим равенством [4]

$$K_\nu(z) = 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)z^{-\nu} \quad \text{при } z \to 0, \quad \nu > 0 \tag{3.3}$$

определим A и из (3.2) получим

$$\theta(u, \lambda; \alpha) = \lambda\theta(0, \lambda; \alpha)\, w(u, \lambda; 1 / 2\alpha)\, [\Gamma(1 / 2\alpha)]^{-1}$$
$$w(u, \lambda; \nu) = 2^{1-\nu}u^\nu\lambda^{1/2\nu-1}K_\nu(u\sqrt{\lambda}) \tag{3.4}$$

Оригиналом для $w(u, \lambda; \nu)$ служит неполная гамма-функция, являющаяся целой функцией от ν

$$\Gamma\left(\frac{u^2}{4t}, \nu\right) = L^{-1}\{w(u, \lambda; \nu)\} = \int\limits_{{}^1\!/_4 u^2/t}^{\infty} e^{-y} y^{\nu-1} dy$$

Отсюда согласно известным теоремам обращения оригинал (3.4) можно представить в виде

$$F(\xi, t) = F(u, t; \alpha) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t F(0, t-\tau; \alpha)\Psi\left(\frac{u^2}{4\tau}; \alpha\right) d\tau \qquad (3.5)$$

$$\Psi\left(\frac{u^2}{4t}; \alpha\right) = \frac{1}{\Gamma(^1/_2\alpha)} \int\limits_{{}^1\!/_4 u^2/t}^{\infty} e^{-y} y^{1/_2\alpha-1} dy \qquad (3.6)$$

Используя в (3.6) замену $x = y^{1/2\alpha}$ и рекуррентное соотношение $z\Gamma(z) = \Gamma(1+z)$, получаем

$$\Psi\left(\frac{u^2}{4t}; \alpha\right) = \frac{1}{\Gamma(1+{}^1/_2\alpha)}\int\limits_{\chi}^{\infty} \exp(-x^{2\alpha})\, dx, \qquad \chi = \left(\frac{u^2}{4t}\right)^{1/_2\alpha} \qquad (3.7)$$

Согласно [5] имеет место представление

$$\Gamma(1+\nu) = \int\limits_0^{\infty} \exp(-x^{1/\nu})\, dx, \qquad \nu > 0$$

поэтому $\Psi(u^2/4t; \alpha) \to 1$ при $u \to 0$, $\nu = 1/2\alpha$, $\alpha > 0$.

Производя в (3.5) дифференцирование по t с учетом (3.6), получаем окончательно

$$F(u, t; \alpha) = \frac{1}{\Gamma(^1/_2\alpha)}\int\limits_0^t F(0, t-\tau; \alpha)\left(\frac{u^2}{4\tau}\right)^{1/2\alpha} \exp\left(\frac{-u^2}{4\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} \qquad (3.8)$$

Нетрудно проверить, что (3.8) удовлетворяет уравнению (1.4) при (2.1) и (2.2) и краевым условиям (3.1). В частности, замена $\eta = (u_2/4\tau)^{1/_2\alpha}$ позволяет записать (3.8) в виде равенства

$$F(u, t; \alpha) = \frac{1}{\Gamma(1+{}^1/_2\alpha)}\int\limits_{\chi}^{\infty} F\left(0, t - \frac{u^2}{4\eta^{2\alpha}}; \alpha\right)\exp(-\eta^{2\alpha})\, d\eta \quad (0 < \alpha < \infty) \qquad (3.9)$$

которое при $u \to 0$ согласно (3.7) обращается в тождество в соответствии с (3.1).

Если функция $F(0, t; \alpha)$ ограничена при $\alpha \to \infty$, то, как и следовало ожидать, $F(u, t; \infty) \equiv 0$ при $u > 0$. Пусть в (3.8)

$$F(0, t; \alpha) = {}^1/_2\Gamma(^1/_2\alpha)\varphi(t) \qquad (3.10)$$

Рассмотрим последовательность решений (3.8) при возрастающем α. Очевидно, при $\alpha < \infty$ условие (3.10) определяет решения (3.8) краевых задач первого рода. Однако при (3.10)

$$\lim_{\alpha\to\infty} F(u, t; \alpha) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \varphi(t-\tau)\exp\left(-\frac{u^2}{4\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}, \qquad F(0, t; \infty) = \infty \qquad (3.11)$$

Как будет показано ниже, $F(u, t; \infty)$ в (3.11) определяет решение (1.5), (2.3) при краевом условии второго рода

$$-\partial F / \partial\xi|_{u=0} = Q(0, t; \infty) = N\varphi(t) \tag{3.12}$$

Найдем из (3.5) согласно (1.1), (1.7) полный поток $Q = Q(0, t; \alpha)$ через фиксированную эквипотенциаль $\xi[s(u)]$ в D при условии (2.2)

$$Q(u, t; \alpha) = -\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{a}{\Gamma(1 + {}^1/{}_2\alpha)} \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (F(0, t-\tau; \alpha)\left(\frac{b}{2\sqrt{\tau}}\right)^{1/\alpha} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{u^2}{4\tau}\right) d\tau \tag{3.13}$$

Подставляя (3.10) в (3.13), имеем

$$Q(u, t; \alpha) = \alpha a \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \varphi(t-\tau)\left(\frac{b}{\sqrt{\tau}}\right)^{1/\alpha} \exp\left(-\frac{u^2}{4\tau}\right) d\tau \tag{3.14}$$

При $\alpha \to \infty$ в (3.14) необходимо, чтобы $a = N / \alpha$ согласно (2.2), (2.3). Следовательно

$$\lim_{\alpha\to\infty} Q(u, t; \alpha) = Q(u, t; \infty) = N\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \varphi(t-\tau)\exp\left(-\frac{u^2}{4\tau}\right) d\tau \tag{3.15}$$

что при $u \to 0$ переходит в (3.12). Аналогичный результат имеет место и при непосредственном дифференцировании (3.11) с учетом (2.3).

Согласно аппроксимации (2.2)

$$\xi_0 = -1 / a \quad \text{при } u = 0 \tag{3.16}$$

Поэтому

$$\xi \to \frac{1}{N}\ln\left(\frac{u}{b}\right), \quad \xi_0 \to -\infty \quad \text{при } \alpha \to \infty \tag{3.17}$$

Одновременно по (1.5), (1.7), (2.2)

$$du / d\xi = \alpha a b(1 + a\xi)^{\alpha-1} = f\sqrt{\beta k} \to 0 \quad \text{при } u \to 0,\ \alpha > 1 \tag{3.18}$$

Поскольку $\sqrt{\beta k} > 0$, то при $u \to 0$, $\alpha > 1$ в (3.18) имеем $f \to 0$. Таким образом, при $\alpha \to \infty$ в качестве пространственной координаты уравнения (1.4) появляется стационарный логарифмический потенциал, качественно подобный потенциалу точечного стока на плоскости и в некотором отношении являющийся его обобщением для неоднородного пласта. Действительно, из условий (1.7), (2.3) для однородного пласта (k, $\beta = \text{const}$) постоянной мощности h нетрудно получить

$$N = 2\pi kh, \qquad b = \sqrt{\beta / k}$$

и убедиться в том, что требование $f \to 0$ при $u \to 0$ приводит к $s_0 \to 0$ в (1.2), (1.7), поскольку $f(s) = 2\pi hs$. Подстановка указанных величин в (3.17) и (3.11) приводит соответственно к известным [2, 3] стационарным и нестационарным решениям осесимметричной задачи для линейного стока нулевого радиуса.

Таким образом, множество решений (3.8), зависящее от α ($0 < \alpha < \infty$), включает в себя решения краевых задач первого рода с условиями (3.1), (3.10) при $0 < \alpha < \infty$ и второго рода при $\alpha = \infty$ с условиями (3.12) для источника (стока) с площадью фильтрующей поверхности $f(s) \to 0$ при $u \to 0$.

4. Найдем частные решения (2.5), удовлетворяющие краевым условиям второго рода

$$\lim_{u\to 0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{du}{d\xi}\right) = -L\{Q(0,\ t;\ \alpha)\} = -q(0,\ \lambda;\ \alpha), \quad \lim_{u\to\infty}\theta(u,\ \lambda;\ \alpha) = 0 \tag{4.1}$$

Дифференцируя (3.2) по u, получаем

$$-\frac{\partial\theta}{\partial u} = A\sqrt{\lambda}\left(\frac{u}{b}\right)^{1/2\alpha} K_{1-1/2\alpha}(u\sqrt{\lambda}) \tag{4.2}$$

Отсюда при помощи (2.2), (3.3), (3.18) определяем $A = A(\lambda)$ в (4.2), и решение задачи, удовлетворяющее условиям (4.1) в пространстве L-изображений, приобретает вид

$$\theta(u,\ \lambda;\ \alpha) = \frac{2^{\varepsilon-1}b^{-\varepsilon}\, q(0,\ \lambda;\ \alpha)}{\alpha a\,\Gamma(1-\nu)(^1/_2<\alpha<\infty)}\lambda^{1-\nu} w(u,\ \lambda;\ \nu), \quad \varepsilon = \frac{1}{\alpha}, \quad \nu = \frac{1}{2\alpha} \tag{4.3}$$

В пространстве оригиналов это соответствует с учетом (3.4), (3.6) решению

$$F(u,\ t;\ \alpha) = \frac{(b/2)^{-\varepsilon}}{\alpha a\,\Gamma(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\left\{\int_0^\tau Q(0,\ y;\ \alpha)(\tau-y)^{\nu-1}dy\right\}\Psi\left(\frac{u^2}{4(t-\tau)};\ \alpha\right)\times$$
$$\times\, d\tau \quad (\alpha > {}^1/_2) \tag{4.4}$$

Сравнивая (4.4) с (3.5) или полагая непосредственно в (4.4) $u\to 0$ и учитывая (3.7), получаем

$$F(0,\ t;\ \alpha) = \frac{(b/2)^{\varepsilon}}{a\Gamma(1-\nu)}\frac{d}{dt}\int_0^t Q(0,\ t-\tau;\ \alpha)\,\tau^{\nu}\,d\tau \tag{4.5}$$

5. Интегрируя (4.5) по t, можно записать

$$\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t F(0,\ \tau;\ \alpha)\,d\tau = \frac{1}{a\Gamma(1-\nu)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t Q(0,\ t-\tau;\ \alpha)\left(\frac{2\sqrt{\tau}}{b}\right)^{\varepsilon}d\tau \quad (n = 0{,}1) \tag{5.1}$$

Из (3.13) при $u\to 0$ подобным же образом получаем

$$\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t Q(0,\ \tau;\ \alpha)\,d\tau = \frac{a}{\Gamma(1+\nu)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t F(0,\ t-\tau;\ \alpha)\left(\frac{b}{2\sqrt{\tau}}\right)^{\varepsilon}d\tau \quad (n = 0{,}1) \tag{5.2}$$

Введем понятие глубины гидродинамического зондирования пласта $r_{jn} = r_{jn}(t;\ \alpha)$ по определению ($j = 1$ для краевых условий первого рода, $j = 2$ — второго рода)

$$u(r_{1n},\ s_0) = 2\left(\frac{F^*(t)}{F_-^*(t)}\right)^{\alpha}, \qquad u(r_{2n},\ s_0) = 2\left(\frac{Q_+^*(t)}{Q^*(t)}\right)^{\alpha} \tag{5.3}$$

Здесь

$$F^*(t) = \frac{d^n}{dt^n}\int_0^t F(0,\ \tau;\ \alpha)\,dt, \qquad Q^*(t) = \frac{d^n}{dt^n}\int_0^t Q(0,\ \tau;\ \alpha)\,d\tau$$

$$F_-^*(t) = \frac{d^n}{dt^n}\int_0^t F(0,\ t-\tau;\ \alpha)\,\tau^{-\nu}\,d\tau, \qquad Q_+^*(t) = \frac{d^n}{dt^n}\int_0^t Q(0,\ t-\tau;\ \alpha)\,\tau^{\nu}\,dt$$

Тогда (5.1) и (5.2) эквивалентны соответственно соотношениям

$$\frac{1}{a}\left(\frac{u(r_{1n}, s_0)}{b}\right)^\varepsilon = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\frac{F^*(t)}{Q^*(t)}, \qquad \frac{1}{a}\left(\frac{u(r_{2n}, s_0)}{b}\right)^\varepsilon = \Gamma(1-\nu)\frac{F^*(t)}{Q^*(t)} \tag{5.4}$$

$$(\varepsilon = 1/\alpha, \quad \nu = {}^1\!/_2\alpha)$$

При $\alpha = 1$ первое соотношение (5.4) сводится к результату, полученному ранее [6] для однородного пласта. Выражая левые части (5.4) через $\xi(r_{jn})$ при помощи (2.2), (3.16), получаем уравнение гидродинамического зондирования в виде

$$\xi(r_{jn}(t;\ \alpha)) - \xi(s_0) = \delta(j,\ \alpha)\frac{F^*(t)}{Q^*(t)} \tag{5.5}$$

$$\delta(j,\ \alpha) = \begin{cases} 1/\Gamma(1+\nu) & (j=1) \\ \Gamma(1-\nu) & (j=2) \end{cases} \qquad \nu = {}^1\!/_2\alpha$$

Согласно (5.5) по результатам измерений в фиксированной точке пласта разности потенциалов $F(0,\ t;\ \alpha)$ и дебита $(n=1)$ или накопленной добычи $(n=0)$ можно определить значения стационарного потенциала в точке $r_{jn}(t;\ \alpha)$, движущейся в пласте по одному из законов (5.3). Отметим, что непосредственная взаимосвязь типа (5.5) между изменениями нестационарного поля во времени в неподвижной точке пласта и распределением стационарного потенциала, осуществимым в ее окрестности, имеет место и при условиях более общего вида, чем (2.1) и (2.2). Операцию установления этой взаимосвязи по результатам гидродинамических измерений будем именовать гидродинамическим зондированием пласта.

Существенно, что при $F(0,\ t;\ \alpha) = F_0 = \mathrm{const}$ или $Q(0,\ t;\ \alpha) = Q_0 = \mathrm{const}$ поведение $r_{jn}(t;\ \alpha)$ не зависит от j и $\alpha < \infty$. В этих случаях гидродинамическое зондирование пласта может быть осуществлено наиболее просто, так как

$$u(r_{j1}(t;\ \alpha),\ s_0) = 2\sqrt{t}, \qquad j = 1,\ 2; \qquad s_0 \geqslant 0 \tag{5.6}$$

и в соответствии с (5.5)

$$\begin{aligned} \xi(r_{11}(t;\ \alpha)) - \xi_0 &= \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\frac{F_0}{Q(0,t;\alpha)} \\ \xi(r_{21}(t;\ \alpha)) - \xi_0 &= \Gamma(1-\nu)\frac{F(0,\ t;\ \alpha)}{Q_0} \end{aligned} \qquad ({}^1\!/_2 < \alpha < \infty) \tag{5.7}$$

При больших α разница в определениях (5.7) для $j = 1$ и $j = 2$ стирается, так как при $\alpha \to \infty$ $\delta(j,\ \alpha) \to 1$, однако при $\alpha = \infty$ (5.7) теряет смысл. В этом случае естественно воспользоваться решением (3.11) для случая $\varphi(t) = Q_0/N$, когда очевидно

$$F(u,\ t;\ \infty) = -\frac{Q_0}{N}\mathrm{Ei}\left\{-\frac{u^2(s,\ 0)}{4t}\right\} \tag{5.8}$$

где, как обычно, $\mathrm{Ei}(-z)$ — интегральная показательная функция. Для достаточно больших значений времени при $u(s,\ 0) \leqslant 2\sqrt{t}$ имеем [7, 3]

$$F(u,\ t;\ \infty) \approx \frac{Q_0}{N}\left\{\ln\left[\frac{2\sqrt{t}}{u(s,\ 0)}\right] - \frac{C}{2}\right\} \tag{5.9}$$

Пренебрегая слагаемым $^1/_2C$ с постоянной Эйлера $C = 0.5772$, можно представить (5.9) в виде

$$\frac{1}{N}\ln\left[\frac{2\sqrt{t}}{u(s,\,0)}\right] \approx \frac{F(u,\,t;\,\infty)}{Q_0} \tag{5.10}$$

откуда согласно (3.17) и (5.6)

$$\xi(r_{21}(t;\,\infty)) - \xi(s) \approx \frac{F(u,\,t;\,\infty)}{Q_0}, \quad u(s,\,0) \ll 2\sqrt{t}, \quad s_0 = 0 \tag{5.11}$$

Легко видеть, что (5.7) при $j = 2$ формально сводится к (5.11) при $\alpha \to \infty$ с заменой координаты s_0 (обращающейся при этом в нуль) на s в левой части (5.7). Если при $\alpha = \infty$ расстояние s соответствует радиусу скважины (~ 10 *см*), то в условиях реального пласта в силу его малой сжимаемости соотношение (5.11), как и для однородного пласта [7], обладает высокой точностью практически с первых минут процесса.

В соответствии с (1.7) глубину гидродинамического зондирования (5.6) для (5.7) и (5.11) можно в явном виде выразить так:

$$r_{j1}(t;\,\alpha) = s_0 + 2\langle\sqrt{k/\beta}\rangle\sqrt{t} \tag{5.12}$$

Здесь угловые скобки — среднее в интервале $[s_0,\, r_{j1}]$ значение корня квадратного из коэффициента пьезопроводности [7], которое в первом приближении обычно можно принять постоянным.

Отметим, что при $j = 1$, $\alpha \geqslant 1$ согласно [5] справедлива оценка $1 \geqslant \Gamma(1+\nu) \geqslant 0.88560$, и соответствующий множитель в (5.5), (5.7) допустимо рассматривать как поправочный коэффициент, близкий к единице. При помощи (5.5), (5.3) и (5.7), (5.11), (5.12) можно (например, графически) установить зависимость между ξ и u в окрестности точки замеров (в частности, забоя скважины), что позволяет детально исследовать область пласта в интервале $(s_0,\, r_{jn}(t;\,\alpha)]$, используя соотношения (1.3), (1.6), (1.7). При этом наиболее удобны режим постоянного потенциала (5.7) и режим постоянного отбора (5.7), (5.11) на границе области фильтрации. В случае $\alpha = \infty$ метод гидродинамического зондирования позволяет исследовать относительно удаленную часть пласта, так как соотношения (5.8) и (5.11) справедливы при $u(s,\,0) \ll u(r_{21}(t;\,\alpha),\,0) = 2\sqrt{t}$ (s — точка замера). Интересно отметить, что известные формальные операции обработки данных исследования скважин [2, 7, 8] при помощи графиков в полулогарифмических координатах с абсциссой $\ln t$ можно наглядно интерпретировать как гидродинамическое зондирование пласта с логарифмическим стационарным потенциалом на участках, соответствующих прямолинейным отрезкам графика. Так, разделив (1.6) на u, согласно (1.7) при $\alpha \to \infty$ имеем

$$\frac{d\ln u}{d\xi} = \frac{f\sqrt{\beta k}}{u} = 2\pi h\frac{\sqrt{\beta k}}{\langle\sqrt{\beta/k}\rangle} \qquad (f = 2\pi sh,\ s_0 \to 0) \tag{5.13}$$

В ряде случаев значение $\sqrt{\beta}$ можно считать практически постоянным при $s \leqslant r_{jn}(t;\,\alpha)$. Тогда

$$\frac{d\ln u}{d\xi} \approx 2\pi\sqrt{k}\,\langle\sqrt{k}\rangle\,h \tag{5.14}$$

и при постоянной правой части (5.14) определяет угловой коэффициент отрезка как в координатах $(\ln u,\,\xi)$, так и в обычных полулогарифмических координатах с $\ln t$, поскольку $u(r_{jn},\,s_0) \sim \sqrt{t}$ $(s_0 \geqslant 0)$.

Влияние контуров пласта на режим работы скважин при гидродинамических исследованиях [8, 2] или окончании первой фазы фильтрации [7] также объясняется зависимостью (5.5) между гидродинамической историей скважины и стационарным потенциалом, характеризующим строение пласта в ее окрестности. Например, в скважине, дренирующей замкнутый круговой пласт с непроницаемым контуром, кривые восстановления давления $P(t)$, начиная с некоторого момента времени, удовлетворяют условию $dP(t)\,/\,d\ln t \to \infty$, а в пласте с проницаемым контуром постоянного пластового давления («контуром питания») — условию $dP(t)\,/\,d\ln t \to 0$ [8].

Наглядное истолкование эти явления получают в терминах гидродинамического зондирования пласта: кривая восстановления давления, снятая на забое скважины во времени, соответствует распределению стационарного потенциала в окрестности забоя. При помощи (5.6), (5.12) или (5.3) и (1.6), (1.7) график $P(t)$ преобразуется в кривую гидродинамического зондирования пласта в координатах (u, ξ) или $(\ln u, \xi)$ и соответствующее распределение $\xi(s)$ стационарного потенциала. При этом отрезок кривой зондирования с $d\xi = 0$ соответствует области постоянного стационарного потенциала $(\xi(s) = \mathrm{const})$ за контуром питания, а отрезок, параллельный оси $\xi(d\xi / d \ln u \to \infty)$, отвечает распределению стационарного потенциала в области пласта с проницаемостью $k \to 0$.

Таким образом, временные характеристики нестационарных процессов фильтрации органически взаимосвязаны с осуществимым в данной области стационарным распределением фильтрационного потенциала. Обнаруженные закономерности можно эффективно использовать в аналитических и экспериментальных исследованиях процессов фильтрации, теплопроводности и диффузии в неоднородных средах. В случае фильтрации к скважине глубина гидродинамического зондирования (5.12), (5.3), (5.6) естественного пласта увеличивается значительно быстрее радиуса термодинамического зондирования в методе Э. Б. Чекалюка [9], удобном для исследования призабойной зоны скважины. Поэтому при исследовании скважин и пластов целесообразно сочетание обоих методов, позволяющих получать независимую информацию о строении различных зон пласта на основе обработки результатов одной и той же серии измерений.

Поступило 23 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А., Николаевский В. Н. Теория фильтрации как раздел механики сплошных сред. В кн. «Теория и практика добычи нефти», М., «Недра», 1968.
2. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1, 2. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
5. Бурбаки Н. Элементы математики, т. 4. Функции действительного переменного. М., «Наука», 1965.
6. Карачинский В. Е. К методике решения некоторых нестационарных осесимметричных задач теории фильтрации. В кн. «Научно-технический сборник по добыче нефти», М., «Недра», 1969, вып. 36.
7. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959.
8. Чекалюк Э. Б. Основы пьезометрии залежей нефти и газа. Киев, Гостоптехиздат УССР, 1961.
9. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта. М., «Недра», 1965.