УДК 532.501.32

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКОВ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Н. ЩЕЛКАЧЕВ

(*Москва*)

Приводятся общие для одномерных прямолинейных нестационарных потоков решения дифференциальных уравнений пьезопроводности и расхода. Решения получены при достаточно общих предположениях о законе изменения со временем производительности (дебите) точечного стока (источника). Полученные решения выражены в общих случаях через вырожденные гипергеометрические функции второго рода и функции Уиттекера. Полученные результаты справедливы не только для теории фильтрации, но и для родственных разделов математической физики: теории теплопроводности, теории диффузии и др.

1. При исследовании одномерных прямолинейных нестационарных потоков в пространстве $(\alpha+1)$ измерений, где $\alpha=0, 1, 2, 3, \ldots$, приходится решать дифференциальные уравнения в частных производных вида

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2}+\frac{\alpha}{x}\frac{\partial \Delta p}{\partial x}=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \Delta p}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}-\frac{\alpha}{x}\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial Q}{\partial t} \tag{1.1}$$

В уравнениях пьезопроводности и расхода (1.1) величины $\Delta p(x, t)$ и $Q(x, t)$ суть соответственно понижение давления в точке с координатой x и объемный расход через сечение потока, определяемое равенством $x=\mathrm{const}$; t — время, $\varkappa$ — постоянный коэффициент пьезопроводности пористой среды.

Ниже рассматривается случай, когда точечный сток (или источник) имеет переменную производительность (дебит) Q_s, выражающуюся одночленной степенной функцией времени t

$$Q_s \equiv [Q]_{x=0}=Q_n{}^* t^n \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{1.2}$$

где n — любое действительное число, ограниченное лишь тем, что должно быть $n > -1$; $Q_n{}^*$ — постоянный коэффициент, размерность которого зависит от показателя степени n. При $n=0$ производительность стока будет постоянной. Начало координат помещено в точечном стоке.

Можно использовать различные физические соображения для пояснения ограничения, налагаемого на число n. Например, количество жидкости V, которое за время t извлекается из точечного стока, определяется, интегрируя равенство (1.2), формулой

$$V=\int_0^t Q dt=\frac{Q_n{}^*}{n+1}\,[t^{n+1}]_0{}^t$$

Очевидно, что величина V будет конечной лишь в том случае, если $n > -1$.

Особый интерес и значительная общность постановки данной задачи связана с тем, что при любой переменной производительности стока можно, учитывая линейность исходных дифференциальных уравнений и допустимость применения метода суперпозиции, разбить исследуемый промежуток времени на интервалы и аппроксимировать заданную производительность стока одночленными степенными зависимостями.

Можно отметить, что уравнения (1.1) встречаются не только в теории фильтрации, но и в различных разделах математической физики, например в теории теплопроводности, диффузии; к первому уравнению (1.1) для пятимерного пространства (при $\alpha = 4$) Карман свел решение задачи о распространении турбулентных возмущений.

Расход и понижение давления связаны линейной зависимостью, определяемой основным законом фильтрации Дарси (аналогичны линейные законы Фурье и Фика в теории теплопроводности и диффузии)

$$Q = -\frac{k}{\mu}\sigma_\alpha \frac{\partial \Delta p}{\partial x} \tag{1.3}$$

Здесь k — коэффициент проницаемости пористой среды, μ — динамический коэффициент вязкости фильтрующейся жидкости (эти коэффициенты принимаются постоянными); σ_α — площадь поверхности, через которую подсчитывается расход.

Величину σ_α в пространстве $(\alpha + 1)$ измерений условимся выражать так:

$$\sigma_\alpha = 2^\alpha A_\alpha x^\alpha \tag{1.4}$$

где A_α — постоянная величина, значение которой зависит от α. Например, при $\alpha = 0, 1, 2$, т. е. соответственно в прямолинейно-параллельном, плоскорадиальном (осесимметричном) и сферическом радиальном потоках

$$A_0 = 2\sigma, \quad A_1 = \pi b, \quad A_2 = \pi \tag{1.5}$$

где σ — неизменная площадь поперечного сечения исследуемого прямолинейно-параллельного потока; коэффициент 2 взят с учетом двухстороннего притока к стоку (при одностороннем притоке этот коэффициент следует исключить, учтя это и в соответствующих последующих формулах для потока в пространстве одного измерения, т. е. при $\alpha = 0$); b — мощность пласта, т. е. высота осесимметричного потока $\alpha \approx 1$.

Предполагается, что точечный сток включается в работу в начальный момент времени, когда поле было невозмущенным; т. е. начальные условия для каждой задачи таковы:

$$\Delta p(x, t) = 0 \quad \text{при } t = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \infty \tag{1.6}$$

$$Q(x, t) = 0 \quad \text{при } t = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \infty \tag{1.7}$$

С учетом равенств (1.3) и (1.4) условие (1.2) примет вид

$$\left[x^\alpha \frac{\partial \Delta p}{\partial x}\right]_{x=0} = -\frac{Q_n t^n \mu}{2^\alpha A_\alpha k} \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{1.8}$$

В итоге поставленные две краевые задачи формулируются так: требуется решить первое уравнение (1.1) при условиях (1.6) и (1.8); второе уравнение (1.1) надо решить при условиях (1.7) и (1.2).

Конечно, уравнения (1.1) и их решения не независимы друг от друга, а связаны соотношением (1.3), вытекающим из закона Дарси. Поэтому, решив одно из двух уравнений (1.1), т. е. найдя либо функцию $\Delta p(x, t)$, либо $Q(x, t)$, можно определить другую функцию, пользуясь соотношением (1.3). Однако при определенных условиях оказывается проще и иногда бывает вполне достаточно решить какое-то одно из уравнений (1.1). Поэтому здесь приводятся решения каждого из двух уравнений, чтобы на основе сопоставления легче было установить: на каком этапе и почему то или иное уравнение решается проще?

Обе сформулированные задачи автомодельны [1][1]. Поэтому решения уравнений (1.1) ищутся в форме

---

[1] Решения некоторых автомодельных задач через вырожденные гипергеометрические (конфлюентные) функции было дано Л. И. Седовым [1] еще в 1944 г.

$$\Delta p(x,t) = t^{m_1}\eta_{n,\alpha}(\xi), \qquad Q(x,t) = t^{m_2}f_{n,\alpha}(\xi)$$
$$\left(\xi = \frac{x^2}{4\varkappa t}\right) \tag{1.9}$$

где m_1 и m_2 — искомые постоянные показатели степени, $\eta_{n,\alpha}$, $f_{n,\alpha}$ — искомые функции от безразмерной неотрицательной величины ξ.

Вид искомых функций зависит от n и α, входящих как параметры и в аргументы функций. При $m_1 = 0$ получается классическая форма решения первого уравнения (1.1), указанная Коши при $\alpha = 0$. Рибо [2] считал, что им впервые (также при $\alpha = 0$) предложены в 1948 г. решения в форме (1.9), когда $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$ и n — любое целое число. Однако на самом деле решения в форме (1.9) в упомянутом частном случае были впервые предложены в 1935 г. Хартри [3], выразившим $\eta_{n,0}$ и $f_{n,0}$ через впервые же введенные им интегральные функции ошибок. Здесь решения в форме (1.9) ищутся для более общего случая любого целого положительного числа α (включая нуль).

Значения m_1 и m_2 легко находятся, подставляя (1.9) соответственно в (1.8) и (1.2) и требуя, чтобы результаты подстановки зависели только от ξ. Оказывается, что

$$m_1 = n + {}^1/_2(1-\alpha), \qquad m_2 = n \tag{1.10}$$

Подставляя (1.9) в (1.1) и учитывая (1.10), получаем для определения искомых функций $\eta_{n,\alpha}$, $f_{n,\alpha}$ следующие обыкновенные однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, линейно зависящими от независимого переменного

$$\xi\frac{d^2\eta_{n,\alpha}}{d\xi^2} + \left(\xi + \frac{1+\alpha}{2}\right)\frac{d\eta_{n,\alpha}}{d\xi} - \frac{2n+1-\alpha}{2}\eta_{n,\alpha} = 0 \tag{1.11}$$
$$\xi\frac{d^2f_{n,\alpha}}{d\xi^2} + \left(\xi + \frac{1-\alpha}{2}\right)\frac{df_{n,\alpha}}{d\xi} - nf_{n,\alpha} = 0$$

Чтобы выполнялись условия (1.6) и (1.7), функции $\eta_{n,\alpha}$ и $f_{n,\alpha}$ должны удовлетворять равенствам

$$[\eta_{n,\alpha}(\xi)]_{\xi\to\infty} = 0, \qquad [f_{n,\alpha}(\xi)]_{\xi\to\infty} = 0 \tag{1.12}$$

Кроме того, для выполнения условий (1.8) и (1.2) искомые функции должны удовлетворять еще следующим равенствам:

$$\left[\xi^{1/2(1+\alpha)}\frac{d\eta_{n,\alpha}}{d\xi}\right]_{\xi=0} = -\frac{Q_n{}^*\mu}{2^{2\alpha}A_\alpha k\varkappa^{1/2(\alpha-1)}} \tag{1.13}$$
$$[f_{n,\alpha}(\xi)]_{\xi=0} = Q_n{}^*$$

Пользуясь известными [4, 5] способами интегрирования дифференциальных уравнений типа (1.11) и учитывая равенства (1.9), (1.10), в результате получаем выражения либо через функцию Уиттекера W

$$\Delta p(x,t) = Q_n{}^* t^{n+1/2(1-\alpha)}\frac{\mu\Gamma(n+1)}{2^{2\alpha}A_\alpha k\varkappa^{1/2(\alpha-1)}\Gamma({}^1/_2(\alpha+1))}\times$$
$$\times\,\xi^{-1/4(\alpha+1)}e^{-1/2\xi}W_{-(n+1/4(3-\alpha)),\,1/4(1-\alpha)}(\xi) \tag{1.14}$$
$$Q(x,t) = Q_n{}^* t^n\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma({}^1/_2(\alpha+1))}\xi^{1/4(\alpha-1)}e^{-1/2\xi}W_{-(n+1/4(1-\alpha)),\,1/4(1+\alpha)}(\xi)$$

либо через вырожденные гипергеометрические функции (ВГФ) второго рода (1.15)

$$\Delta p(x,t) = Q_n{}^* t^n\frac{\mu\Gamma(n+1)}{2^{\alpha+1}A_\alpha k\Gamma({}^1/_2(\alpha+1))}x^{1-\alpha}e^{-\xi}\Psi(n+{}^1/_2(3-\alpha), {}^1/_2(3-\alpha);\xi)$$
$$Q(x,t) = Q_n{}^* t^n\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma({}^1/_2(\alpha+1))}e^{-\xi}\Psi(n+{}^1/_2(1-\alpha), {}^1/_2(1-\alpha);\xi)$$

где Γ — символ гамма-функции; $\alpha = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Эти формулы служат решениями двух поставленных краевых задач; напомним, что n — любое действительное число, но $n > -1$; безразмерная величина ξ определяется (1.9).

2. Перейдем к анализу частных случаев полученных формул.

Если в функции Уиттекера $W_{\chi,\lambda}$ первый параметр χ равен нулю, то она вырождается [4, 5] в функцию Макдональда (модифицированную функцию Бесселя второго рода) K_λ

$$W_{0,\lambda}(\xi) = \sqrt{\xi/\pi} K_\lambda(^1/_2\xi) \tag{2.1}$$

На основании первого уравнения (1.14) можно утверждать, что в этом случае понижение давления Δp будет выражаться через функцию Макдональда, если

$$n + {}^1/_4(3-\alpha) = 0 \tag{2.2}$$

Так, например, полагая для плоскорадиального потока $\alpha = 1$, $n = -{}^1/_2$ и учитывая (2.1) и (1.9), согласно первому уравнению (1.14) получим

$$\Delta p(x, t) = Q^*_{-1/2} t^{-1/2} \frac{\mu}{4\pi bk} \exp \frac{-x^2}{8\varkappa t} K_0\left(\frac{x^2}{8\varkappa t}\right) \tag{2.3}$$

Если $n = 0$, т. е. если точечный сток имеет постоянный дебит $Q_0{}^*$ (см. (1.2)), то в (1.15) первые и вторые параметры ВГФ второго рода Ψ между собой равны; в таком случае ВГФ второго рода вырождается в неполную гамма-функцию [4, 6] и получим

$$\Delta p(x, t) = \frac{Q_0{}^*\mu}{2^{\alpha+1} A_\alpha k \Gamma(^1/_2(\alpha+1))} x^{1-\alpha} \Gamma(^1/_2(\alpha-1); \xi), \tag{2.4}$$

$$Q(x, t) = \frac{Q_0{}^*}{\Gamma(^1/_2(\alpha+1))} \Gamma(^1/_2(\alpha+1); \xi)$$

Последние множители в этих равенствах представляют собой неполные гамма-функции.

Если второй параметр в ВГФ второго рода не равен целому (положительному или отрицательному) числу, то ВГФ второго рода можно заменить более простыми ВГФ первого рода [4–6]. При $\alpha = 0, 2, 4, 6, \ldots$, т. е. в пространстве нечетного числа измерений, второй параметр функции Ψ в формулах (1.15) заведомо не равен целому числу. Для этого случая из (1.15) получим

$$\begin{aligned} \Delta p(x, t) = Q_n{}^* t^n \frac{\mu \Gamma(n+1)}{2^{\alpha+1} A_\alpha k \Gamma(^1/_2(\alpha+1))} x^{1-\alpha} e^{-\xi} \Bigg[\frac{\Gamma(^1/_2(1-\alpha))}{\Gamma(n + {}^1/_2(3-\alpha))} \times \\ \times \xi^{1/2(\alpha-1)} \Phi(n+1, {}^1/_2(\alpha+1); \xi) + \\ + \frac{\Gamma(^1/_2(\alpha-1))}{\Gamma(n+1)} \Phi(n + {}^1/_2(3-\alpha), {}^1/_2(3-\alpha); \xi) \Bigg] \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} Q(x, t) = Q_n{}^* t^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(^1/_2(\alpha+1))} e^{-\xi} \Bigg[\frac{\Gamma(-{}^1/_2(\alpha+1))}{\Gamma(n + {}^1/_2(1-\alpha))} \times \\ \times \xi^{1/2(\alpha+1)} \Phi(n+1, {}^1/_2(\alpha+3); \xi) + \\ + \frac{\Gamma(^1/_2(\alpha+1))}{\Gamma(n+1)} \Phi(n + {}^1/_2(1-\alpha), {}^1/_2(1-\alpha); \xi) \Bigg] \end{aligned} \tag{2.6}$$

где Φ — символ ВГФ первого рода, n — любое действительное число, но $n > -1$; $\alpha = 0, 2, 4, 6 \ldots$.

Наибольший интерес представляют собой потоки в пространстве одного и двух измерений. Перейдем к их анализу.

3. Рассмотрим прямолинейно параллельный поток ($\alpha = 0$). При $\alpha = 0$ формулы (1.14), (1.15), (2.5), (2.6) упростятся; мало того, при $\alpha = 0$ второй параметр (λ) в функции Уиттекера в формулах (1.14) станет равным $^1/_4$, а это дает возможность [4–6] в рассматриваемом частном случае перейти к функциям Вебера (обозначаемым символом D) параболического цилиндра и функциям Эрмита (обозначаемым символом H), и получить следующие формулы:

$$\Delta p(x,t) = Q_n{}^* t^n \frac{\mu\sqrt{\varkappa t}}{k\sigma} \frac{2^n\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi/2} D_{-2(n+1)}(\sqrt{2\xi}) \tag{3.1}$$

$$Q(x,t) = Q_n{}^* t^n \frac{2^{n+1/2}\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi/2} D_{-(2n+1)} \sqrt{2\xi} \tag{3.2}$$

$$\Delta p(x,t) = Q_n{}^* t^n \frac{\mu\sqrt{\varkappa t}}{k\sigma} \frac{2^{2n+1}\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi} H_{-2(n+1)}(\sqrt{\xi}) \tag{3.3}$$

$$Q(x,t) = Q_n{}^* t^n \frac{2^{2n+1}\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi} H_{-(2n+1)}(\sqrt{\xi}) \tag{3.4}$$

Формула (3.1) совпадает с полученной Нордоном [7]. При полуцелых и целых значениях показателя степени n Хартри (см. ниже) [3] для прямолинейно-параллельного потока вывел формулы, которые в несколько более завершенном виде можно записать так [8][1]:

$$\Delta p(x,t) = Q_n{}^* t^n \frac{\mu\sqrt{\varkappa t}}{k\sigma} 2^{2n}\Gamma(n+1)\, i^{2n+1} \operatorname{erfc}\sqrt{\xi} \tag{3.5}$$
$$Q(x,t) = Q_n{}^* t^n 2^{2n}\Gamma(n+1)\, i^{2n} \operatorname{erfc}\sqrt{\xi}$$

где $n = -^1/_2, 0, ^1/_2, 1, ^3/_2, 2, \ldots$. Приравнивая правую часть второго равенства (3.5) правым частям вторых равенств (1.14) и (1.15) при $\alpha = 0$, а также равенств (2.6), (3.2), (3.4) и полагая для удобства $2n = m$, $\sqrt{\xi} = y$, получаем возможность установить связь между интегральной дополнительной функцией ошибок $i^m \operatorname{erfc} y$ и всеми важнейшими разновидностями и частными случаями ВГФ. Эта связь устанавливается при любом целом положительном значении m, тогда как в известных монографиях и справочниках, в частности и в [4–6], упомянутая связь указывается лишь при $m = 0$ и $m = 1$, т. е. для функций $\operatorname{erfc} y$ и $i \operatorname{erfc} y$.

Итак

$$\begin{aligned} 2^m \sqrt{\pi} i^m \operatorname{erfc} y &= \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y^2/2} W_{-1/4(2m+1)}(y^2) = e^{-y^2}\Psi\left(^1/_2(m+1), ^1/_2; y^2\right) = \\ &= 2^{1/2(m+1)} e^{-y^2/2} D_{-(m+1)}(\sqrt{2}y) = 2^{m+1} e^{-y^2} H_{-(m+1)}(y) = \\ &= \sqrt{\pi} e^{-y^2}\left[\frac{1}{\Gamma(^1/_2(m+2))} \Phi\left(\frac{1}{2}(m+1), \frac{1}{2}; y^2\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\Gamma(^1/_2(m+1))} \Phi\left(\frac{1}{2}(m+2), \frac{3}{2}; y^2\right)\right] \\ & m = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{3.6}$$

Можно доказать, что многие соотношения, установленные в (3.6), справедливы и при целых отрицательных значениях m.

---

[1] В статье [9], представляющей существенный интерес для решения ряда автомодельных задач, связанных с фильтрацией жидкости и газа, автор не использовал (при переходе к линейному дифференциальному уравнению) работ Хартри [3], Рибо [2], Нордона [7]. Сопоставление результатов исследований Хартри и Рибо см. в [8].

4. Рассмотрим плоскорадиальный поток ($\alpha = 1$). Перепишем (1.15), полагая в них $\alpha = 1$, так как в таком виде они будут необходимы для сопоставления с некоторыми другими трансцендентными функциями

$$\Delta p(x, t) = Q_n{}^* t^n \frac{\mu \Gamma(n+1)}{4\pi bk} e^{-\xi} \Psi(n+1, 1; \xi) \tag{4.1}$$

$$Q(x, t) = Q_n{}^* t^n \Gamma(n+1) e^{-\xi} \Psi(n, 0; \xi) \tag{4.2}$$

Заметим, что из (4.1) проще выводятся все результаты, полученные Г. И. Баренблаттом и Н. П. Трифоновым [10], не использовавшими ВГФ для решения соответствующих уравнений. При $\alpha = 1$ первая формула (1.14) вырождается в формулу, выведенную В. Н. Беловым [11], [12] и затем Беркуном [13].

При целых положительных значениях числа n, включая нуль, в статье [8] были выведены следующие формулы:

$$\Delta p(x, t) = Q_n{}^* t^n \frac{\mu n!}{4\pi bk} \varphi_n(\xi) \tag{4.3}$$

$$Q(x, t) = Q_n{}^* t^n n! \psi_n(\xi)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

где φ_n и ψ_n — специальные кратные интегральные показательные функции, определенные в статье [8]; их более широкие применения были показаны в [12]. Приведем здесь несколько улучшенные определения упомянутых функций

$$\varphi_n(\xi) = (\xi)^n \left\{ \overset{nu}{\int_0} \left[-Ei\left(-\frac{1}{v}\right)\right] dv \right\}_{u=1/\xi} = \xi^n \left\{ \int_0^u v^{n-1} \varphi_{n-1}\left(\frac{1}{v}\right) dv \right\}_{u=1/\xi} \tag{4.4}$$

$$\varphi_{-n}(\xi) = \xi^{-n} \left\{ \frac{d^n}{dv^n} \left[-Ei\left(-\frac{1}{v}\right)\right]\right\}_{v=1/\xi} = \xi^{-n} \left\{ \frac{d}{dv} \left[\frac{1}{v^{n-1}} \varphi_{-(n-1)}\left(\frac{1}{v}\right)\right]\right\}_{v=1/\xi}$$

$$\psi_n(\xi) = \xi^n \left\{ \overset{nu}{\int_0} e^{-1/v} dv \right\}_{u=1/\xi} = \xi^n \left\{ \int_0^u v^{n-1} \psi_{n-1}\left(\frac{1}{v}\right) dv \right\}_{u=1/\xi} \tag{4.5}$$

$$\psi_{-n}(\xi) = \xi^{-n} \left\{ \frac{d^n}{dv^n} e^{-1/v} \right\}_{v=1/\xi} = \xi^{-n} \left\{ \frac{d}{dv} \left[\frac{1}{v^{n-1}} \psi_{-(n-1)}\left(\frac{1}{v}\right)\right]\right\}_{v=1/\xi}$$

где

$$\varphi_0(\xi) = -Ei(-\xi), \qquad \psi_0(\xi) = e^{-\xi}$$

причем во всех формулах (4.4), (4.5) $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, индекс n над символом интеграла указывает на необходимость произвести n-кратное интегрирование подынтегральной функции, Ei — символ интегральной показательной функции; между функциями φ_n и ψ_n есть следующая связь:

$$\frac{d\varphi_n(\xi)}{d\xi} = -\frac{1}{\xi} \psi_n(\xi), \qquad \psi_n(\xi) = \varphi_{n-1}(\xi) - n\varphi_n(\xi), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4.6}$$

Приравнивая (при n целом и положительном) правые части равенств (4.1), (4.2) соответственно правым частям равенств (4.3), оказывается возможным выразить ВГФ второго рода через кратные интегральные показательные функции φ_n и ψ_n

$$\Psi(1 + n, 1; \xi) = e^{\xi} \varphi_n(\xi) \tag{4.7}$$

$$\Psi(n, 0; \xi) = e^{\xi} \psi_n(\xi)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

В исследованиях плоскорадиального потока, независимо проведенных Беркуном [14], также были использованы функции, почти аналогичные φ_n.

5. При $\alpha = 2$ из (1.14), (1.15), (2.5), (2.6) получаются формулы для сферического радиального потока.

Связь кратных интегральных функций, встречающихся при исследовании трех простейших одномерных потоков ($\alpha = 0, 1, 2$), с другими высшими трансцендентными функциями проанализирована в статье [15].

Возвращаясь к анализу общих формул (1.15) для одномерного потока в любом многомерном пространстве, можно утверждать, что, как и следовало ожидать из физических соображений, величины Δp и Q не обращаются в нуль при $0 \leqslant x < \infty$, $0 < t < \infty$. Действительно, известно [4], что ВГФ второго рода $\Psi(a, c; \xi)$ не имеет положительных нулей, если соблюдены, например, следующие два условия: во-первых, параметры a и c суть действительные числа; во-вторых, величина $(a - c + 1)$ положительна. В ВГФ второго рода, входящих в формулы (1.15), оба параметра действительны; кроме того, величина $(a - c + 1)$ одинакова для обеих формул и равна $(n + 1)$, т. е. положительна, так как выше было оговорено, что $n > -1$.

Формулы (1.14), (1.15), (2.5), (2.6) позволяют проводить не только качественный анализ поведения величин Δp и Q, основываясь на известных [4, 5] дескриптивных свойствах ВГФ. По этим формулам возможно подсчитывать величины Δp и Q при любых значениях n и α (при которых эти формулы справедливы), используя имеющиеся таблицы ВГФ и функций Уиттекера, приведенные, например, в выпусках опубликованных Вычислительным центром АН СССР. Кроме того, учитывая известные [4, 5] простые приближенные выражения для ВГФ при малых и больших значениях аргумента, можно значительно упростить расчетные формулы (1.14), (1.15), (2.6); при подсчетах по упрощенным приближенным формулам отпадает необходимость использовать таблицы ВГФ.

Поступило 8 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
2. Ribaud G. Une solution nouvelle de l'équation de Fourier. Comptes Rendus Acad. Sci., 1948, t. 226, pp. 140—142.
3. Hartree D. R. Some properties and applications of repeated integrals of the error function. Mem. and Proc. Manchester literary and Philos. Soc., 1935, vol. 80, No. 9, pp. 85—102.
4. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1965.
5. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, ч. 2. Физматгиз, 1963.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
7. Nordon J. Sur une solution nouvelle de l'équation de Fourier. Comptes Rendus Acad. Sci., 1949, t. 228, pp. 167—168.
8. Щелкачев В. Н. Обобщение формы решений простейших основных задач теории нестационарного поля фильтрационных потоков. Тр. Моск. ин-та нефтехимической и газовой пром-сти, 1967, вып. 66, стр. 96—106.
9. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 1, стр. 67, 68.
10. Баренблатт Г. И., Трифонов Н. П. О некоторых осесимметричных задачах неустановившейся фильтрации жидкости и газа в пористой среде. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 1, стр. 59—70.
11. Белов В. Н. О некоторых свойствах интегральных функций, характеризующих решения основных задач теории нестационарного поля. Тр. Моск. ин-та нефтехимической и газовой пром-сти, 1970, вып. 94.
12. Щелкачев В. Н. Некоторые новые решения основных задач теории нестационарного поля. III Всес. съезд по теорет. и прикл. механ., Аннот. докл. М., «Наука», 1968, стр. 328—329.
13. Беркун В. А. К решению некоторых осесимметричных задач нестационарной фильтрации. Тр. УкрНИИГаза, 1969, вып. 3 (7), стр. 97—103.
14. Беркун В. А. Решение одной осесимметричной задачи нестационарной фильтрации в бесконечном пласте. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, вып. 4.
15. Щелкачев В. Н. Связь характеристических функций стоков-источников переменной производительности с другими высшими трансцендентными функциями. Тр. Моск. ин-та нефтехимической и газовой пром-сти, 1970, вып. 94.