

УДК 532.542 + 532.592

## ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ ТРУБКЕ С ДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ СТЕНКОЙ

С. А. РЕГИРЕР, И. М. СКОБЕЛЕВА

(Москва)

Рассматривается перистальтическое течение вязкой несжимаемой жидкости в трубке со слабо проницаемой стенкой. Задача решается методом малого параметра. Исследуется влияние проницаемости на основное течение и деформаций стенки на поток жидкости через стенку.

Квазистационарное течение вязкой жидкости в трубке с деформирующейся стенкой (перистальтическое течение) неоднократно рассматривалось в связи с приложениями этой задачи к физиологическим проблемам (см. [1-3]), в частности к изучению движения крови по сосудам при наличии сократительной деятельности гладких мышц в стенках сосудов. В некоторых случаях интерес может представить аналогичное исследование с учетом проницаемости стенок трубки (например, отток крови в ветви, отходящие от основного сосуда, можно приближенно учесть, вводя эквивалентную проницаемость стенки — см. [9], стр. 50).

1. Рассмотрим осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости в длинной трубке переменного радиуса

$$r_w = r_0 [1 + hf(x/\lambda, t/t_*)]$$

где  $r_0$  — средний радиус,  $h$  — относительная амплитуда радиальных смещений стенки (фиг. 1). Постоянные  $\lambda$  и  $t_*$  имеют смысл характерных

масштабов длины и времени для изменений  $r_w$ , т. е.

$$\partial r_w / \partial x \sim hr_0 / \lambda, \quad \partial r_w / \partial t \sim hr_0 / t_*$$

Безразмерные величины  $h = \text{const}$  и  $f(x/\lambda, t/t_*)$  будем считать заданными, причем

$$|hf| \leq 1, \quad |f| \sim 1.$$

Смещения стенки будем полагать чисто радиальными. Стенка трубки предполагается проницаемой, причем скорость фильтрации жидкости  $v_{nf}$ ,

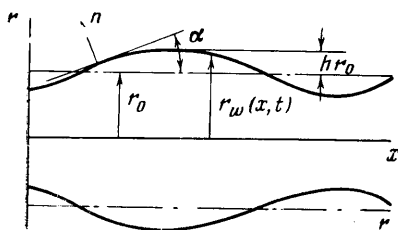
направленная по нормали к стенке, линейно зависит от перепада давлений на стенке. В системе координат, связанной со стенкой

$$v_{nf} = \frac{k}{\mu\delta} (p - p_e) \quad (1.1)$$

Здесь  $p_e = \text{const}$  — давление в среде, окружающей трубку;  $p$  — давление в жидкости;  $k$ ,  $\delta$  — коэффициент проницаемости и толщина стенки;  $\mu$  — вязкость жидкости.

Для определения продольной и радиальной компонент скорости  $u$ ,  $v$  и давления  $p$  служат уравнения

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$



Фиг. 1

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (1.2)$$

На стенке трубки выполняются условия

$$V = e_r \frac{\partial r_w}{\partial t} + e_n v_{nf}, \quad e_n = -e_x \sin \alpha + e_r \cos \alpha \quad (1.3)$$

$$\sin \alpha = \frac{\partial r_w / \partial x}{\sqrt{1 + (\partial r_w / \partial x)^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial r_w / \partial x)^2}}$$

В начальном и конечном сечениях задаются значения давления на оси трубки

$$p(0, 0, t) = p^+ = \text{const}, \quad p(L, 0, t) = p^- = \text{const} \quad (1.4)$$

Другие условия при  $x = 0$ ,  $x = L$ , как и в работе [4], не ставятся, поскольку используемый далее приближенный метод решения задачи связан с понижением порядка исходной системы уравнений, и указанные здесь условия обеспечивают построение однозначного решения. Введем теперь ряд упрощающих предположений и оценок.

Во-первых, будем считать, что скорость фильтрации  $v_{nf}$  по порядку величины не превышает характерную скорость радиального смещения стенки  $v_* = hr_0 / t_*$ .

Во-вторых, будем считать малыми в сравнении с единицей величины  $h$ ,  $\varepsilon = r_0 / \lambda$ ,  $S = \rho r_0^2 / \mu t_*$  и отношение  $v_* / u_*$  характерных значений радиальной и продольной скоростей.

В-третьих, длину трубки  $L$  будем считать сравнимой с величиной  $\lambda$  или большей ее.

В-четвертых, ограничимся рассмотрением только перистальтических течений, т. е. таких, для которых расход жидкости в продольном направлении обеспечивается преимущественно изменениями радиуса трубки, а приложенная на ее концах разность давлений  $\Delta p = p^+ - p^-$  дает в расход вклад того же или меньшего порядка величины.

При этом будем считать, что давления в жидкости и вне трубки имеют одинаковый порядок величины, а перепад  $\Delta p$  не превышает по порядку характерной величины  $p_*$  среднего давления в жидкости.

Перистальтическое течение определяется параметрами  $t_*$ ,  $\lambda$ ,  $r_0$ ,  $h$ , через которые выражаются характерные значения давления и компонент скорости

$$v_* = \frac{hr_0}{t_*}, \quad u_* = \frac{\lambda}{r_0} v_* = \frac{h\lambda}{t_*}, \quad p_* \sim \frac{\mu u_*}{r_0^2} \lambda = \frac{\mu h \lambda^2}{t_* r_0^2} \quad (1.5)$$

Сделанные выше предположения сводятся к формулам

$$\frac{kp_*}{\delta\mu} \lesssim \frac{hr_0}{t_*} \quad \text{или} \quad K \equiv \frac{kp_* t_*}{\delta\mu hr_0} = \frac{k\lambda^2}{\delta r_0^3} \lesssim 1$$

$$h \ll 1, \quad \varepsilon = \frac{r_0}{\lambda} \ll 1, \quad S = \frac{\rho r_0^2}{\mu t_*} \ll 1, \quad \frac{L}{\lambda} \gtrsim 1 \quad (1.6)$$

$$p_e \sim p_* = \frac{\mu h \lambda^2}{t_* r_0^2}, \quad \Delta p \lesssim p_*$$

Из этих оценок следует, что число Рейнольдса

$$R_v = \rho r_0 v_* / \mu = hS$$

мало в сравнении с единицей.

2. Введем безразмерные величины с учетом оценок (1.5), (1.6), положив

$$\begin{aligned} r^\circ &= \frac{r}{r_0}, & x^\circ &= \frac{x}{\lambda}, & L^\circ &= \frac{L}{\lambda}, & t^\circ &= \frac{t}{t_*} \\ u^\circ &= \frac{ut_*}{h\lambda}, & v^\circ &= \frac{vt_*}{hr_0}, & p^\circ &= \frac{(p-p_e)t_*r_0^2}{\mu h\lambda^2} \\ p^{\pm\circ} &= \frac{(p^\pm - p_e)t_*r_0^2}{\mu h\lambda^2} & r_w^\circ &= 1 + hf(x^\circ, t^\circ) \end{aligned}$$

Опуская верхний индекс  $^\circ$ , запишем в новых переменных уравнения и граничные условия (1.2) — (1.4)

$$\begin{aligned} S \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + h \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \varepsilon^2 S \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + h \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] &= - \frac{\partial p}{\partial r} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$u = - \frac{\varepsilon^2 h K \partial f / \partial x}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 h^2 (\partial f / \partial x)^2}} p, \quad v = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{K}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 h^2 (\partial f / \partial x)^2}} p \quad \text{при } r=1+l/f \quad (2.2)$$

$$p(0, 0, t) = p^+, \quad p(L, 0, t) = p^- \quad (2.3)$$

Расходы жидкости в продольном направлении и через стенку на длине  $l \ll L$  мгновенный и суммарный за безразмерное время  $T$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} g_x^0 &= \frac{g_x t_*}{\pi r_0^2 h \lambda} = 2 \int_0^{1+l/f} r u dr, & G_x^0 &= \int_0^T g_x^0 dt, & G_f^0 &= \int_0^T g_f^0 dt \\ g_f^0 &= \frac{g_f t_*}{2\pi r_0^2 h \lambda} = K \int_0^l (1 + hf) p(x, 1 + hf, t) \sqrt{1 + \varepsilon^2 h^2 (\partial f / \partial x)^2} dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

Система (2.1) — (2.3) содержит четыре безразмерных параметра  $h$ ,  $\varepsilon$ ,  $S$ ,  $K$ , три из которых ( $h$ ,  $\varepsilon$ ,  $S$ ) малы, а  $K$  не превышает единицы по порядку величины. Не умаляя общности, можно считать, что  $h$ ,  $\varepsilon^2$ ,  $S$ ,  $K$  представляются целыми неотрицательными степенями малого параметра  $\vartheta$

$$\begin{aligned} h &= h_0 \vartheta^m, & m &\geq 1; & \varepsilon^2 &= \varepsilon_0^2 \vartheta^n, & n &\geq 1 \\ S &= S_0 \vartheta^s, & s &\geq 1; & K &= K_0 \vartheta^q, & q &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Параметр  $\vartheta$  выбран таким образом, что числа  $m$ ,  $n$ ,  $s$ ,  $q$  принимают наименьшие возможные значения. Выбор постоянных  $h_0$ ,  $\varepsilon_0^2$ ,  $S_0$ ,  $K_0$ , имеющих порядок единицы, будет особо оговариваться далее в каждой частной задаче.

Неизвестные функции  $u, v, p$  будем искать в виде разложений

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i u_i, \quad v = \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i v_i, \quad p = \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i p_i$$

После их подстановки в (2.1) — (2.3) получим последовательность линейных систем.

Вид уравнений для всех приближений (кроме нулевого) зависит от соотношений между  $h, \varepsilon^2, S$ , т. е. от параметров  $m, n, s$ , а вид граничных условий для всех приближений — от соотношений между  $h, \varepsilon^2, K$ , т. е. от чисел  $m, n, q$ . Количество возможных ситуаций весьма велико; далее в п.3—5 будут рассмотрены некоторые из них.

Для определения  $u_i, v_i, p_i$  во всех приближениях получаются уравнения и граничные условия следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial r} + \varphi_{xi}, & \frac{\partial p_i}{\partial r} &= \varphi_{ri} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial r} + \frac{v_i}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$u_i(x, 1, t) = u_{wi}(x, t), \quad v_i(x, 1, t) = v_{wi}(x, t) \quad (2.7)$$

$$p_i(0, 0, t) = p_i^+, \quad p_i(L, 0, t) = p_i^-$$

Здесь  $\varphi_{xi}, \varphi_{ri}, u_{wi}, p_i^\pm$  — известные величины, определяемые по предыдущим приближениям, причем всегда

$$\varphi_{x0} = \varphi_{r0} = 0, \quad p_0^\pm = p^\pm, \quad p_i^\pm = 0 \quad \text{при } i \geq 1 \quad (2.8)$$

Величина  $v_{wi}(x, t)$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} v_{wi}(x, t) &= a_i(x, t) + b_i p_i \quad (K \sim 1) \\ v_{wi}(x, t) &= a_i(x, t) \quad (K \ll 1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $a_i, b_i = \text{const}$  известны.

Решение краевой задачи (2.6), (2.7) начинается с интегрирования второго уравнения (2.6). Вводя новые неизвестные  $p_{i0}(x, t)$ , имеющие смысл коэффициентов в разложении давления на оси по степеням  $\vartheta$ , получаем

$$p_i = p_{i0} + \int_0^r \varphi_{ri} dr \quad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в первое уравнение (2.6) и интегрируя его с учетом первого условия (2.7), найдем

$$u_i = u_{wi} + \frac{r^2 - 1}{4} \frac{\partial p_{i0}}{\partial x} - T_x \{r, U_i\} \quad (2.11)$$

$$U_i = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^r \varphi_{ri} dr - \varphi_{xi}, \quad T_x \{r, Z\} = \int_r^1 \frac{1}{r} \int_0^r r Z dr dr$$

После интегрирования уравнения неразрывности (2.6) с учетом (2.11) и требования регулярности  $v_i$  вблизи оси при регулярных правых частях (2.6), (2.7) будем иметь

$$\begin{aligned} v_i &= -\frac{r}{2} \frac{\partial u_{wi}}{\partial x} - \frac{1}{8} r \left( \frac{r^2}{2} - 1 \right) \frac{\partial^2 p_{i0}}{\partial x^2} + T_r \left\{ r, \frac{\partial U_i}{\partial x} \right\} \\ T_r \{r, Z\} &= \frac{1}{r} \int_0^r \int_r^1 \frac{1}{r} \int_0^r r Z dr dr dr \end{aligned} \quad (2.12)$$

Полагая  $r = 1$  в (2.12) и используя второе граничное условие (2.7), а также формулу (2.9), получаем уравнение для определения  $p_{i0}$

$$\frac{\partial^2 p_{i0}}{\partial x^2} - 16b_i p_{i0} = Q_i \quad Q_i \equiv -16T \left\{ \frac{\partial U_i}{\partial x} \right\} + 8 \frac{\partial u_{ni}}{\partial x} +$$

$$+ 16 \left( a_i + b_i \int_0^1 \varphi_{ri} dr \right), \quad T \{Z\} \equiv T_r \{1, Z\} \quad (2.13)$$

Линейные операторы  $T_x$ ,  $T_r$ ,  $T$  обладают свойством перестановочности с линейными операторами, действующими на переменные  $x$ ,  $t$ . Справедливы, кроме того, соотношения

$$T_x \{1, Z\} = 0, \quad T_r \{0, Z\} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} r T_r \{r, Z\} = r T_x \{r, Z\}$$

$$T_x \{r, r^m \psi(x, t)\} = \psi(x, t) \frac{1 - r^{m+2}}{(m+2)^2}$$

$$T_r \{r, r^m \psi(x, t)\} = \frac{\psi(x, t)}{(m+2)^2} \left( \frac{r}{2} - \frac{r^{m+3}}{m+4} \right)$$

$$T \{r^m \psi(x, t)\} = \frac{\psi(x, t)}{2(m+2)(m+4)}$$

Общее решение уравнения (2.13), удовлетворяющее двум последним условиям (2.7), имеет вид

$$p_{i0} = \Psi \{Q_i\} + p_i^+ + \frac{x}{L} (p_i^- - p_i^+) \quad \text{при } b_i = 0 \quad (2.14)$$

$$p_{i0} = \Phi_i \{Q_i\} + \frac{1}{\text{sh } 4L \sqrt{b_i}} [p_i^- \text{sh } 4x \sqrt{b_i} + p_i^+ \text{sh } 4(L-x) \sqrt{b_i}] \quad \text{при}$$

$$b_i \neq 0 \quad (2.15)$$

$$\Psi \{Z\} = \int_0^x \int_0^x Z dx dx - \frac{x}{L} \int_0^L \int_0^x Z dx dx$$

$$\Phi_i \{Z\} = -\frac{1}{4 \sqrt{b_i} \text{sh } 4L \sqrt{b_i}} \left[ \text{sh } 4(L-x) \sqrt{b_i} \int_0^x Z \text{sh } 4x \sqrt{b_i} dx + \right.$$

$$\left. + \text{sh } 4x \sqrt{b_i} \int_x^L Z \text{sh } 4(L-x) \sqrt{b_i} dx \right]$$

Операторы  $\Psi$ ,  $\Phi_i$  перестановочны с линейными операторами, действующими на переменную  $t$ . Для  $\Psi$ ,  $\Phi_i$  справедливы соотношения

$$\Psi \{Z\} |_{x=0} = \Phi_i \{Z\} |_{x=0} = \Psi \{Z\} |_{x=L} = \Phi_i \{Z\} |_{x=L} = 0$$

$$\lim_{b_i \rightarrow 0} \Phi_i \{Z\} = \Psi \{Z\}$$

Формально всегда  $b_i = K$  и, казалось бы, при  $K \ll 1$  можно положить  $b_i = 0$  и пользоваться решением (2.14), а при  $K \sim 1$  — решением (2.15). Однако при этом окажется, что для фиксированных  $x$  величины  $|p_{i0}|$ , определяемые по (2.14), будут возрастать с увеличением  $L$  как  $L^{2i-1}$ . Такое решение будет иметь смысл только при  $KL^2 \ll 1$ . Следовательно, нужно полагать

$$b_i = 0 \quad \text{при } KL^2 \ll 1, \quad b_i = K \quad \text{при } KL^2 \gtrsim 1$$

Ниже в п. 3–5 результаты вычислений по формулам (2.10)–(2.12), (2.14), (2.15) будут приводиться без повторения уравнений (2.6) и без промежуточных выкладок: всякий раз будут указываться только вид правых частей в (2.6) и граничные условия.

3. Пусть основным малым параметром задачи служит  $K$ , причем

$$h \ll K^2 \quad \varepsilon \ll K, \quad S \ll K^2 \quad (3.1)$$

т. е.  $q = 1, m \geq 2, n \geq 2, s \geq 2$ . Положим  $\vartheta = K$  и  $K_0 = 1$ .

Для нулевого и первого приближений в (2.6), (2.7) следует положить

$$\varphi_{x_0} = 0, \quad \varphi_{r_0} = 0, \quad \varphi_{x_1} = 0, \quad \varphi_{r_1} = 0 \quad (3.2)$$

$$u_{w_0} = 0, \quad v_{w_0} = a_0 = df/dt, \quad b_0 = 0, \quad u_{w_1} = 0, \quad v_{w_1} = a_1 = p_0, \quad b_1 = 0$$

Из формул (2.11), (2.12), (2.14) с учетом (2.8), (3.2) находим

$$u_0 = \frac{r^2 - 1}{4} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \quad v_0 = -\frac{r}{8} \left( \frac{r^2}{2} - 1 \right) \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2}$$

$$p_0 = 16 \Psi \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} \right\} + p^+ + \frac{x}{L} (p^- - p^+) \quad (3.3)$$

$$u_1 = \frac{r^2 - 1}{4} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad v_1 = -\frac{r}{8} \left( \frac{r^2}{2} - 1 \right) \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}, \quad p_1 = 16 \Psi \{p_0\} \quad (3.4)$$

Для второго приближения уравнения и граничные условия при  $\varepsilon \ll K, S \ll K^2$  ( $n > 2, s > 2$ ) такие же, как в первом приближении, и решение имеет вид (3.4) с увеличенными на единицу индексами. При  $\varepsilon \sim K, S \sim K^2$  ( $n = 2, s = 2$ )

$$\varphi_{x_2} = \varepsilon_0^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - S_0 \frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{r^2 - 1}{4} \left( \varepsilon_0^2 \frac{\partial^3 p_0}{\partial x^3} - S_0 \frac{\partial^2 p_0}{\partial x \partial t} \right) \quad (3.5)$$

$$\varphi_{r_2} = \varepsilon_0^2 \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r^2} \right) = -\frac{\varepsilon_0^2}{2} r \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2}$$

$$u_2(x, 1, t) = 0, \quad v_2(x, 1, t) = p_1 \quad \text{при } h \ll K^2 \quad (3.6)$$

$$u_2(x, 1, t) + h_0 f(\partial u_0 / \partial r) |_{r=1} = 0,$$

$$v_2(x, 1, t) + h_0 f(\partial v_0 / \partial r) |_{r=1} = p_1 \quad \text{при } h \sim K^2$$

Из обозначений п.2 из (3.6) следует

$$u_{w_2} = 0, \quad a_2 = p_1, \quad b_2 = 0 \quad \text{при } h \ll K^2$$

$$u_{u_2} = -h_0 f \left( \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = -\frac{h_0 f}{2} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad \text{при } h \sim K^2 \quad (3.7)$$

$$v_{w_2} = a_2 = p_1 + \frac{h_0 f}{16} \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2}, \quad b_2 = 0$$

Решение во втором приближении при  $h \sim K^2$  имеет тогда согласно (2.8), (2.11), (2.12), (2.14) вид

$$u_2 = -\frac{h_0 f}{2} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{r^2 - 1}{4} \frac{\partial p_{20}}{\partial x} - \frac{\varepsilon_0^2}{32} (1 - r^2)^2 \frac{\partial^3 p_0}{\partial x^3} +$$

$$+ \frac{S_0}{64} (1 - r^2) (3 - r^2) \frac{\partial^2 p_0}{\partial x \partial t}$$

$$v_2 = \frac{rh_0}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left( f \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) + \frac{r}{8} \left( 1 - \frac{r^2}{2} \right) \frac{\partial^2 p_{20}}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon_0^2}{192} r (3 - 3r^2 + r^4) \frac{\partial^4 p_0}{\partial x^4} -$$

$$- \frac{S_0}{384} r (3 - r^2)^2 \frac{\partial^3 p_0}{\partial x^2 \partial t}$$

$$p_2 = p_{20} - \frac{\varepsilon_0^2}{4} r^2 \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2}, \quad p_{20} = \Psi \{ Q_2 \} \quad (3.8)$$

$$Q_2 = - \frac{\varepsilon_0^2}{12} \frac{\partial^4 p_0}{\partial x^4} + \frac{S_0}{6} \frac{\partial^3 p_0}{\partial x^2 \partial t} - 3h_0 f \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} - 4h_0 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} + 256 \Psi \{ p_0 \}$$

Из полученных выше выражений нетрудно выделить слагаемые, связанные со смещением стенки. Согласно п.1, эти слагаемые имеют тот же порядок величины, что и остальные члены, описывающие течение за счет приложенных перепадов давления.

Для мгновенного расхода жидкости с точностью до членов второго приближения из (2.4) получаем

$$g_x^0 = 2 \int_0^1 r (u_0 + Ku_0 + K^2 u_2) dr \quad (3.9)$$

$$g_f^0 = K \int_0^l [p_0 + Kp_1 + K^2 (p_2 + h_0 f p_0)] |_{r=1} dx \quad (3.10)$$

Чтобы найти из (3.8)–(3.10) формулы, соответствующие случаям  $h \ll K^2$ ,  $\varepsilon \ll K$  или  $S \ll K^2$ , достаточно положить в них формально  $h_0 = 0$ ,  $\varepsilon_0 = 0$  или  $S_0 = 0$ .

Интегрированием по времени из (3.9), (3.10) получаются суммарные расходные характеристики. Чтобы подробнее рассмотреть их зависимость от смещений стенки, положим  $p^+ = p^- = 0$ . Будем считать, что  $f$  — периодическая функция  $t$  с периодом, равным единице. Интегралы по времени в пределах (0, 1) от  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $p_0$ ,  $p_1$  в этом случае обращаются в нуль. Если  $h \ll K^2$ , то исчезают и интегралы от  $u_2$ ,  $p_2$ . Таким образом, при  $h \ll K^2$  смещения стенки не дают вклада в суммарные расходные характеристики. При  $h \sim K^2$  из (3.9), (3.10) после интегрирования по времени и некоторых преобразований находим

$$G_x^0 = \frac{h}{2} \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \Psi \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right\} - f \frac{\partial p_0}{\partial x} \right] dt = - \frac{h}{2L} \int_0^L \int_0^1 f \frac{\partial p_0}{\partial x} dx dt$$

$$G_f^0 = - Kh \int_0^1 \int_0^l \left[ 4 \Psi \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right\} - f p_0 \right] dx dt \quad (3.11)$$

Для вывода этих формул использованы соотношения

$$h = h_0 K^2, \quad \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} = 16 \frac{\partial f}{\partial t}$$

Как видно из (3.11), в рассматриваемом случае проницаемость стенки не оказывает влияния на суммарный продольный расход. Суммарные расходные характеристики не зависят также от параметров  $\varepsilon$ ,  $S$ . Интересной особенностью первой формулы (3.11) является независимость  $G_x^0$  от  $x$ , т. е. от положения сечения, через которое подсчитывается расход. В следующих приближениях эта особенность исчезает.

Локальные мгновенные характеристики течения зависят от параметров  $\varepsilon, S$ . В частности, при  $\varepsilon \sim K$  согласно (3.8) давление изменяется по радиусу трубки, причем

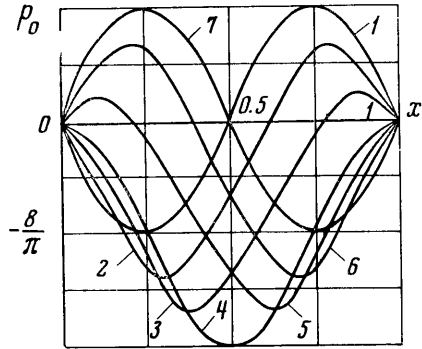
$$p \approx A(x, t) + r^2 B(x, t),$$

$$A(x, t) = p_0 + Kp_1 + K^2 p_{20},$$

$$B(x, t) = -4\varepsilon^2 \partial f / \partial t$$

Отсюда видно, что в сечении трубки давление убывает от оси к стенке, если трубка в данный момент расширяется, и возрастает, если трубка сужается.

*Пример.* Предположим, как и в [4], что стенка деформируется по закону бегущей волны, причем  $f = \cos \xi$ ,  $\xi = 2\pi(x - t)$ . Тогда при  $h \sim K^2$ ,  $\varepsilon \ll K$ ,  $S \ll K^2$ ,  $p^+ = p^- = 0$ , формулы для распределения давления вдоль оси трубки имеют в этом случае вид



Фиг. 2

$$p_0 = -\frac{8}{\pi} \left[ \sin \xi + \sin 2\pi t - \frac{x}{L} (\sin \xi_L + \sin 2\pi t) \right] \quad (3.12)$$

$$p_1 = \frac{32}{\pi} \left[ \frac{\sin \xi}{\pi^2} + \left( \frac{2x^3}{3L} - \frac{2xL}{3} - \frac{x}{\pi^2 L} \right) \sin \xi_L + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\pi^2} - \frac{x}{\pi^2 L} + \frac{4xL}{3} - 2x^2 + \frac{2x^3}{3L} \right) \sin 2\pi t \right] \quad (3.13)$$

$$p_2 \equiv p_{20} = h_0 q_{2h} + q_{2h} \quad (3.14)$$

$$q_{2h} = \frac{7}{\pi} \sin 2\xi - \frac{16}{\pi^2 L} (\sin \xi_L + \sin 2\pi t) \sin \xi - \frac{7x}{\pi L} \sin 2\xi_L - \frac{8x}{\pi^2 L^2} \cos 2\xi_L + \\ + \frac{7}{\pi} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \sin 4\pi t + \frac{8}{\pi^2 L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \cos 4\pi t - \\ - \frac{8}{\pi^2 L} \left( 1 - \frac{2x}{L} \right) (2 \sin 2\pi t \sin \xi_L + 1)$$

$$q_{2h} = -\frac{128}{\pi^5} \sin \xi + \frac{256}{3\pi} \left[ \frac{x^5}{5L} - x^3 \left( \frac{2L}{3} + \frac{1}{\pi^2 L} \right) + \right. \\ \left. + x \left( \frac{7L^3}{15} + \frac{L}{\pi^2} + \frac{3}{2\pi^4 L} \right) \right] \sin \xi_L + \frac{256}{3\pi} \left[ \frac{x^5}{5L} - x^4 + x^3 \left( \frac{4L}{3} - \frac{1}{\pi^2 L} \right) + \frac{3x^2}{\pi^2} - \right. \\ \left. - x \left( \frac{8L^3}{15} + \frac{2L}{\pi^2} - \frac{3}{2\pi^4 L} \right) - \frac{3}{2\pi^4} \right] \sin 2\pi t$$

Здесь слагаемые  $q_{2h}$  и  $q_{2h}$  обусловлены соответственно смещениями стенки и фильтрацией жидкости.

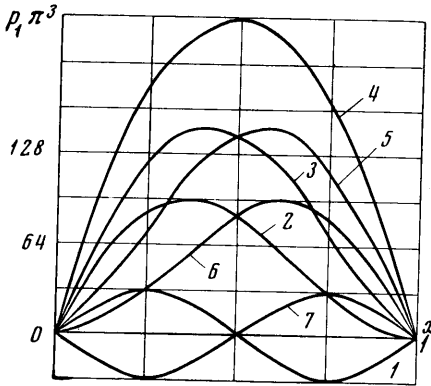
На фиг. 2—5 изображены графики, иллюстрирующие эволюцию во времени распределений  $p_0(x, t)$ ,  $p_1(x, t)$ ,  $q_{2h}(x, t)$ ,  $q_{2h}(x, t)$  при  $L = 1$ . Кривые 1—7 соответствуют моментам времени  $t = 0, 1/16, 1/8, 1/4, 3/8, 7/16, 1/2$ . Второй половине периода ( $1/2 < t \leq 1$ ) соответствуют кривые, получающиеся зеркальным отображением приведенных. Влияние длины трубки  $L$  на распределение давления весьма сложно. На фиг. 6 показана зависимость давления  $p_0$  от  $L$  в четырех сечениях при  $t = 0$ .



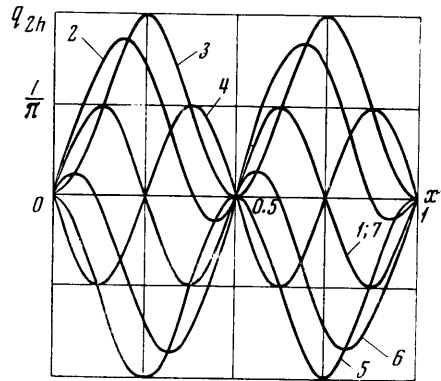
Суммарный (за период) продольный расход жидкости, вычисленный по первой формуле (3.11), зависит только от длины трубки

$$G_x^0 = 4h \left( 1 - \frac{1 - \cos 2\pi L}{2\pi^2 L^2} \right) \quad (3.15)$$

График зависимости  $\beta = G_x^0 / 4h$  от  $L$  изображен далее на фиг. 7. Очевидно, что при длине трубки, кратной длине волны, когда  $L$  — целое число, величина  $G_x^0$  дости-



Фиг. 3



Фиг. 4

гает своего максимального значения  $4h$ , к которому она также стремится при  $L \rightarrow \infty$ . Наиболее сильно зависимость  $G_x^0$  от  $L$  проявляется при  $L < 1$ .

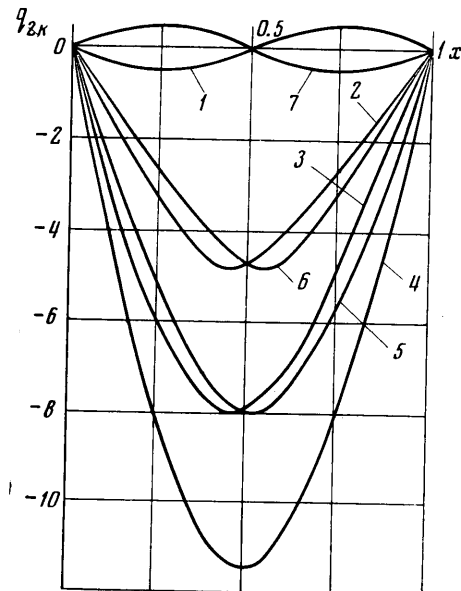
Суммарный расход жидкости через стенку на длине  $l = L$  обращается в нуль. Среднее же по времени значение скорости фильтрации

$$\langle v_{nf} \rangle = \int_0^1 v_{nf} dt$$

отлично от нуля всюду, за исключением точек  $x = 0, L/2, L$ . Для  $\langle v_{nf} \rangle$  из (3.12) — (3.14) получается формула

$$\begin{aligned} \langle v_{nf} \rangle &= K \int_0^1 (p_0 + Kp_1 + K^2p_2) dt = \\ &= -\frac{8Kh}{\pi^2} F_1 \left( \frac{x}{L}, L \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

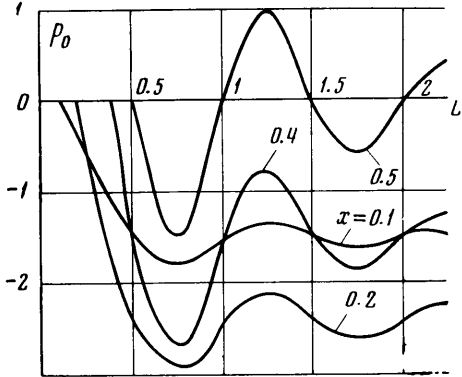
$$\begin{aligned} F_1(\eta, L) &= \frac{1}{L} [\cos 2\pi L(1 - \eta) - \\ &- \cos 2\pi L\eta - (1 - 2\eta)(\cos 2\pi L - 1)] \end{aligned}$$



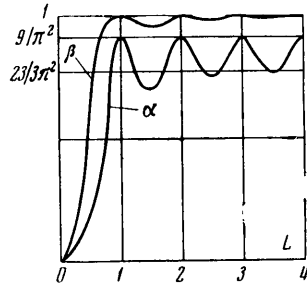
Фиг. 5

Графики функции  $F_1(\eta, L)$  изображены на фиг. 8 (сплошные кривые). Видно, что за счет деформаций стенки происходит всасывание жидкости через стенку при  $x > L/2$ . При  $0 < x < L/2$  такой же объем жидкости удаляется через стенку. Из (3.16) следует, что при некотором  $L < 1$  объем переносимой таким образом жидкости достигает максимального значения. Его можно вычислить, пользуясь формулой (3.11) при  $l = L/2$ .

4. Рассмотрим далее случай, когда  $h$  и  $K$  — малые величины одного порядка, причем  $\varepsilon \ll K$ ,  $S \ll K^2$ . Решение будем строить в виде разложения по степеням  $K$ , полагая  $m = 1$ ,  $q = 1$ ,  $K_0 = 1$ ,  $h = h_0 K$ ,  $n \geq 2$ ,  $s \geq 2$ .



Фиг. 6



Фиг. 7

Уравнения в первых трех приближениях в этом случае совпадают с соответствующими уравнениями п. 3, т. е. с (2.6) при  $\varphi_{xi}$ ,  $\varphi_{\tau i}$ , определенных формулами (3.2), (3.5). Граничные условия для компонент скорости имеют вид

$$u_{w_0} = 0, v_{w_0} = a_0 = \frac{\partial f}{\partial t}, b_0 = 0 \quad (4.1)$$

$$u_1(x, 1, t) + h_0 f \left( \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = 0$$

$$v_1(x, 1, t) + h_0 f \left( \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = p_0$$

$$u_2(x, 1, t) + h_0 f \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} + \frac{h_0^2 f^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} \right) \Big|_{r=1} = 0 \quad (4.2)$$

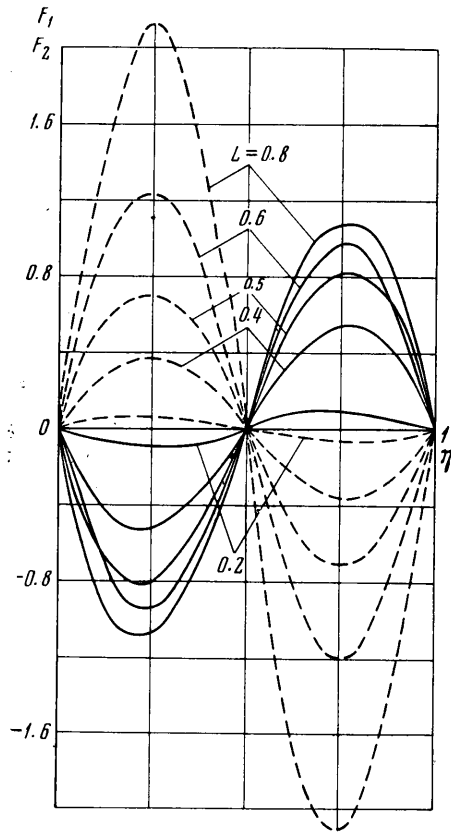
$$v_2(x, 1, t) + h_0 f \left( \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} + \frac{h_0^2 f^2}{2} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} \right) \Big|_{r=1} = p_1$$

Условия для давления определены в (2.8).

Решение для нулевого приближения представляется формулами (3.3). Для первого приближения тогда из (4.2) получаем

$$u_{w1} = -\frac{h_0 f}{2} \frac{\partial p_0}{\partial x},$$

$$v_{w1} = a_1 = 0 + \frac{h_0 f}{4b} \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} \quad (4.3)$$



Фиг. 8

Согласно (2.11), (2.12), (2.14) решение в первом приближении имеет вид

$$u_1 = \frac{r^2 - 1}{4} \frac{\partial p_{10}}{\partial x} - \frac{h_0 f}{2} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (4.4)$$

$$v_1 = -\frac{r}{8} \left( \frac{r^2}{2} - 1 \right) \frac{\partial^2 p_{10}}{\partial x^2} + \frac{h_0 f}{4} r \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} + \frac{h_0}{4} r \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x}$$

$$p_1 \equiv p_{10} = 16 \Psi \{p_0\} - 3h_0 \Psi \left\{ f \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} \right\} - 4h_0 \Psi \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right\}$$

Используя (4.2), (4.4), выразим граничные условия для  $u_2$ ,  $v_2$  через давление

$$u_{w2} = -\frac{h_0 f}{2} \frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{h_0^2 f^2}{4} \frac{\partial p_0}{\partial x}$$

$$v_{w2} = a_2 = p_1 + \frac{h_0 f}{16} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - h_0^2 f^2 \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{h_0^2}{4} f \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (4.5)$$

$$b_2 = 0$$

Тогда во втором приближении при  $\varepsilon \sim K$ ,  $S \sim K^2$  получим

$$u_2 = -\frac{h_0 f}{2} \frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{h_0^2 f^2}{4} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{r^2 - 1}{4} \frac{\partial p_{20}}{\partial x} - \frac{\varepsilon_0^2}{2} (1 - r^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} +$$

$$+ \frac{S_0}{64} (1 - r^2) (3 - r^2) \frac{\partial^2 p_0}{\partial x \partial t}$$

$$v_2 = \frac{h_0 r}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left( f \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) + \frac{h_0^2}{8} r \frac{\partial}{\partial x} \left( f^2 \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) + \frac{r}{8} \left( 1 - \frac{r^2}{2} \right) \frac{\partial^2 p_{20}}{\partial x^2} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_0^2}{192} r (3 - 3r^2 + r^4) \frac{\partial^4 p_0}{\partial x^4} - \frac{S_0}{384} r (3 - r^2)^2 \frac{\partial^3 p_0}{\partial x^2 \partial t} \quad (4.6)$$

$$p_2 = p_{20} - \frac{\varepsilon_0^2}{4} r^2 \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2}, \quad p_{20} = \Psi \{Q_2\}$$

$$Q_2 = -\frac{\varepsilon_0^2}{12} \frac{\partial^4 p_0}{\partial x^4} + \frac{S_0}{6} \frac{\partial^3 p_0}{\partial x^2 \partial t} - 4h_0 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_1}{\partial x} - 3h_0 f \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - 8h_0^2 f \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} -$$

$$- 48h_0^2 f^2 \frac{\partial f}{\partial t} + 16p_1$$

Мгновенные расходные характеристики в рассматриваемом течении имеют вид

$$g_x^0 = 2 \int_0^1 (u_0 + K u_1 + K^2 u_2) r dr + 2K^2 h_0 f (r u_1) |_{r=1} + K^2 h_0^2 f^2 \frac{\partial}{\partial r} (r u_0) |_{r=1}$$

$$g_f^0 = K \int_0^1 [p_0 + K (p_1 + h_0 f p_0) + K^2 (p_2 + h_0 f p_1)] |_{r=1} dx \quad (4.7)$$

Если  $f$  — периодическая функция времени, то суммарные расходные характеристики, получающиеся из (4.7) интегрированием по периоду, при

$p^+ = p^- = 0$  выражаются формулами

$$G_x^0 = -\frac{h}{2L} \int_0^L \int_0^L f \frac{\partial p_0}{\partial x} dx dt + 2Kh \int_0^L \left[ \frac{\partial}{\partial x} \Psi \{A_1\} - 4f \frac{\partial}{\partial x} \Psi \{p_0\} \right] dt + \quad (4.8)$$

$$+ \frac{h^2}{4} \int_0^L \left[ 8f \frac{\partial}{\partial x} \Psi \left\{ 12f \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right\} - 3f^2 \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \Psi \{A_2\} \right] dt$$

$$A_1 = 4 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \Psi \{p_0\} + 4 \Psi \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right\} + 3fp_0,$$

$$A_2 = 2 \frac{\partial f}{\partial x} \left[ 4 \frac{\partial}{\partial x} \Psi \left\{ 12f \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right\} + f \frac{\partial p_0}{\partial x} \right]$$

$$G_f^0 = -Kh \int_0^L \int_0^L \left[ 4\Psi \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right\} - fp_0 \right] dx dt + 4Kh^2 \int_0^L \int_0^L \left[ \Psi \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} B_1 \right\} - \right. \\ \left. - f\Psi \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right\} \right] dx dt - 48K^2h \int_0^L \int_0^L \Psi \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right\} dx dt \quad (4.9)$$

$$B_1 = 4 \frac{\partial}{\partial x} \Psi \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right\} + f \frac{\partial p_0}{\partial x}$$

Как и в п. 3, суммарные расходные характеристики не зависят от  $\varepsilon$  и  $S$  (от  $\varepsilon$  зависит лишь поперечное распределение давления). Однако в данном случае продольный расход изменяется от сечения к сечению.

*Пример.* Если  $f = \cos \xi$ ,  $\xi = 2\pi(x-t)$ ,  $\varepsilon \ll K$ ,  $S \ll K^2$ ,  $p^+ = p^- = 0$ , то распределение давления в нулевом приближении совпадает с (3.12), а в первом приближении описывается суммой выражений (3.13) и  $h_0 q_{2h}$  из (3.14). Формула для  $p_2$  очень громоздкая и здесь не приводится.

Суммарный продольный расход через некоторое сечение  $x \in [0, L]$  вычисляется по формуле

$$G_x^0 = 4h \left( 1 - \frac{1 - \cos 2\pi L}{2\pi^2 L^2} \right) - 4Kh \left\{ \frac{5}{\pi^3 L} \sin \pi L \cos \pi(L-2x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi^2} \left[ \frac{x}{L} \cos 2\pi(L-x) + \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \cos 2\pi x \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{7}{\pi^2 L^2} + \frac{2}{3} + \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \right) (\cos 2\pi L - 1) + \frac{8}{\pi^2} \right\} \quad (4.10)$$

Отсюда при  $x = L$  следует

$$G_x^0 = 4h [1 - K\alpha(L)] \quad (4.11)$$

$$\alpha(L) = \frac{5}{2\pi^3 L} \sin 2\pi L + \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{7}{\pi^2 L^2} + \frac{2}{3} \right) (\cos 2\pi L - 1) + \frac{9}{\pi^2}$$

График зависимости  $G_{x1}^0 = \alpha(L)$  изображен на фиг. 7. Расход через выходное сечение  $G_x^0$  в данном приближении является убывающей функцией проницаемости  $K$ . При целых  $L$  и при  $L \rightarrow \infty$  величина  $G_x^0$  принимает наименьшее значение  $4h(1 - 9K/h^2)$ .

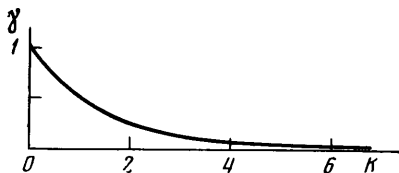
Заметим, что расходы через сечения  $x = 0$  и  $x = L$  совпадают; соответственно обращается в нуль и расход жидкости через стенку, вычисленный с точностью до членов порядка  $Kh$ . Однако, несмотря на это, проницаемость влияет на продольный расход.

Средняя по времени скорость фильтрации выражается формулой

$$\langle v_{nf} \rangle = -\frac{8Kh}{\pi^2} F_1 \left( \frac{x}{L}, L \right) - \frac{8K^2h}{\pi^2} F_2 \left( \frac{x}{L}, L \right) \quad (4.12)$$

Здесь  $F_1$  имеет тот же вид, что и в (3.16), и

$$\begin{aligned} F_2(\eta, L) = & \frac{2}{L} \left[ \left( 4L^2\eta^2 - \frac{4L^2}{3} - \frac{7}{\pi^2} \right) \cos 2\pi L(1-\eta) + \right. \\ & + \left( -4L^2\eta^2 + 8L^2\eta - \frac{8L^2}{3} + \frac{7}{\pi^2} \right) \cos 2\pi L\eta + \\ & + \left( \frac{8L^2\eta^3}{3} - 4L^2\eta^2 - \frac{14\eta}{\pi^2} - \frac{4L^2\eta}{3} + \frac{4L^2}{3} + \frac{7}{\pi^2} \right) \cos 2\pi L + \\ & + \frac{5L\eta}{\pi} \sin 2\pi L(1-\eta) + \frac{5L}{\pi}(\eta-1) \sin 2\pi L\eta - \frac{8}{3}L^2\eta^3 + \\ & \left. + 4L^2\eta^2 + \frac{14}{\pi^2} - \frac{20L^2\eta}{3} - \frac{7}{\pi^2} + \frac{8L^2}{3} \right] \end{aligned}$$



Фиг. 9

Графики  $F_2(\eta, L)$  приведены на фиг. 8 (штриховые кривые). Очевидно, что второе слагаемое в (4.12) соответствует некоторому уменьшению средних скоростей фильтрации; общая картина при  $K \sim h \ll 1$  остается такой же, как в задаче п. 3. Напомним, что согласно п. 2 формула (4.12) имеет смысл при  $KL^2 \ll 1$ .

5. Рассмотрим далее случай с более интенсивной фильтрацией жидкости через стенку, полагая  $K \sim 1$  ( $q = 0$ ) и принимая  $h$  в качестве основного малого параметра ( $\varepsilon \ll h$ ,  $S \ll h^2$  или  $n \geq 2$ ,  $s \geq 2$ ). Ограничимся первыми двумя приближениями.

Для нулевого приближения  $\varphi_{x0} = \varphi_{r0} = 0$  и

$$u_0(x, 1, t) = 0, \quad v_0(x, 1, t) = \partial f / \partial t + Kp_0 \quad (a_0 = \partial f / \partial t, \quad b_0 = K) \quad (5.1)$$

Распределение скоростей выражается формулами (3.3), а давление  $p_0$  согласно (2.8), (2.15) имеет вид

$$p_0 = 16\Phi \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} \right\} + \frac{1}{\text{sh } 4L\sqrt{K}} (p^- \text{sh } 4x\sqrt{K} + p^+ \text{sh } 4(L-x)\sqrt{K}) \quad (5.2)$$

$$(\Phi\{Z\} = \Phi_0\{Z\})$$

Для первого приближения  $\varphi_{x1} = \varphi_{r1} = 0$  и

$$u_{w1}(x, 1, t) = -\frac{f}{2} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \quad a_1 = \frac{f}{16} \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2}, \quad b_1 = K \quad (5.3)$$

Очевидно, что граничные условия для  $u_1$  отличаются от (4.3) только отсутствием постоянного множителя  $h_0$ ; поэтому и распределение скоростей можно получить непосредственно из (4.4), полагая в этих формулах  $h_0 = 1$ . Давление в первом приближении представляется в виде

$$p_1 = p_{10} = \Phi\{Q_1\}, \quad Q_1 = -4 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} - 3f \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} \quad (5.4)$$

С точностью до членов порядка  $h$  имеем далее

$$g_x^0 = 2 \int_0^1 r (u_0 + hu_1) dr, \quad g_f^0 = K \int_0^l (p_0 + hp_1 + hfp_0) dx \quad (5.5)$$

При  $p^+ = p^- = 0$  и периодических по  $t$  функциях  $f$  из (5.5) получают следующие выражения для суммарных характеристик:

$$G_x^0 = -\frac{h}{8} \int_0^1 \left( 4f \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \Phi \{Q_1\} \right) dt \quad (5.6)$$

$$G_f^0 = -Kh \int_0^1 \int_0^l \left[ \Phi \left\{ 4 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} + 3f \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} \right\} - f \Phi \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} \right\} \right] dx dt$$

*Пример.* При  $f = \cos \xi$ ,  $\xi = 2\pi(x-t)$ ,  $p^+ = p^- = 0$ ,  $L = 1$  из (3.3), (4.3), (5.3)–(5.6) получаем для расхода через выходное сечение  $x = L$  формулу

$$G_x^0 = 4h \frac{\pi^2(11K + \pi^2)}{(4K + \pi^2)(16K + \pi^2)} \quad (5.7)$$

График зависимости  $G_x^0 / 4h$  от  $K$  представлен на фиг. 9.

Если  $K \ll 1$ , то из (5.7) легко получить выражения, совпадающие с (3.15) и (4.11) при  $L = 1$ . Расход через начальное сечение  $x = 0$  совпадает с (5.7), поэтому суммарный расход жидкости через всю стенку трубки и в этом случае равен нулю.

Институт механики МГУ

Поступило 28 X 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hermans J. J. Viscous flow through elastic capillaries. In: «Deformation and flow in biological systems», Amsterdam, North-Holland, 1952, pp. 344–351.
2. Burns J. C., Parkes T. Peristaltic motion. J. Fluid Mech., 1967, vol. 29, No. 4, pp. 731–743.
3. Shapiro A. H. Pumping and retrograde diffusion in peristaltic waves. Proc. Workshop on Uretral Reflux in Children. Washington, 1967, pp. 109–133.
4. Регирер С. А. О движении вязкой жидкости в трубке с деформирующейся стенкой. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4, стр. 202–204.
5. Fung Y. C., Yin C. S. Peristaltic transport. Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1968, vol. 35, No. 4, pp. 48–55.
6. Shapiro A. H., Jaffrin M. Y., Weinberg S. L. Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number. J. Fluid Mech., 1969, vol. 37, No. 4, pp. 799–825.
7. Fung Y. C., Yih F. Peristaltic waves in circular cylindrical tubes. Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1969, vol. 36, No. 3, pp. 579–587.
8. Zien T. F., Ostrach S. A long wave approximation to peristaltic motion. J. Biomech., 1970, vol. 3, No. 1, pp. 63–75.
9. Павловский Ю. Н., Регирер С. А., Скобелева И. М. Гидродинамика крови. Итоги науки. Гидромеханика, 1968. М., ВИНТИ, 1970, стр. 5–96.